АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА И ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ИНВАРИАНТЫ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ И ЛИУВИЛЛЕВЫХ СЛОЕНИЙ*

В.П. Маслов, А.И. Шафаревич

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

shafarev@yahoo.com

Поступила 05.09.2012

Изучаются асимптотические решения уравнений Навье-Стокса, описывающие периодические системы вихрей в трехмерном пространстве. Мы рассматриваем следующие ситуации.

1. Локализованные вихревые нити, оси которых образуют двумерную поверхность (вихревая пленка).
2. Система тонких вихрей, заполняющая трехмерный объем.
3. Локализованные точечные вихри, периодически расположенные в объеме.

Решения связаны с топологическими инвариантами векторных полей и лиувиллевых слоений на цилиндре или торе. Уравнения, описывающие эволюцию системы вихрей, определены на графе, представляющем собой множество траекторий или лиувиллевых торов векторного поля.

УДК 517.958

1 Введение

1.1 Асимптотические решения уравнений Навье–Стокса

Поле скоростей $u(x,t)$ несжимаемой вязкой жидкости (зависящее от времени t векторное поле в $\mathbf{R}^3$) удовлетворяет уравнениям Навье–Стокса

* Работа выполнена при поддержке гранта правительства РФ для господдержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых, в ФГБОУ ВПО Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова по договору N 11G.34.31.0054, а также грантов РФФИ 09-01-12063-офи-м, 11-01-00937-а, 10-01-00748-а и программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-3224.2010.1).

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u, \nabla)u + \nabla P = \nu \Delta u, \quad (\nabla, u) = 0. \tag{1}$$

Здесь $P(x,t)$ – давление, ν – коэффициент вязкости. Вихревая структура тейлоровского масштаба ([6,23,30]), описывается асимптотическим решением уравнений (1) вида

$$u(x,t) = U(\frac{S(x,t)}{h}, x, t) + hU_1 + \dots, \quad P = \Pi(\frac{S(x,t)}{h}, x, t) + h\Pi_1 + \dots, \tag{2}$$

где $h \to 0$, $h^2 = \nu$, $S(x,t)$ — одномерная, двумерная или трехмерная вектор-функция; пространственные свойства такого поля определяются зависимостью функции $U(z,x,t)$ от вектора "быстрых" переменных $z = S/h$. Мы рассматриваем следующие три ситуации.

1.2 Система вихрей, образующая двумерную пленку

Пусть $S(x,t)$ — двумерная вектор-функция, причем $U(z,x,t) \to V(x,t)$ при $|z_1| \to \infty$, и U 2π-периодична по z_2. Тогда поле U описывает периодическую систему вихревых нитей, находящихся друг от друга на расстоянии порядка h (тейлоровский масштаб) причем их оси образуют гладкую двумерную поверхность (вихревую пленку); эта поверхность задается уравнением $S_1(x,t) = 0$, а оси вихрей ортогональны векторам $\nabla S_1, \nabla S_2$.

1.3 Система вихревых нитей, заполняющая пространство

Если вихревые нити периодической системы не выстраиваются в двумерную поверхность, а расположены по всему объему, поле скоростей снова имеет вид (2), $S = (S_1, S_2)$, но функция U 2π-периодична по каждой из быстрых переменных z_1, z_2.

1.4 Периодическая система локализованных вихрей

Периодическая структура, состоящая из вихрей, каждый из которых локализован вблизи одной точки, описывается функцией U, зависящей от трехмерного вектора быстрых переменных $z = S/h$, $S = (S_1, S_2, S_3)$; зависимость от каждой из переменных z_j 2π-периодическая.

Ниже описаны асимптотические решения уравнений Навье–Стокса, соответствующие этим трем ситуациям.

2 Вихревые пленки

2.1 Уравнения Эйлера и топологические инварианты векторных полей на двумерном цилиндре

2.1.1 Уравнения Эйлера на двумерном цилиндре

Рассмотрим сперва асимптотические решения вида (2), описывающие вихревые пленки. Обозначим через M_t поверхность в $\mathbf{R}^3$, заданную уравнением $S_1(x,t) = 0$. Поскольку функция $U(z,x,t) - V(x,t)$ быстро убывает при $|z_1| \to \infty$, ее $\bmod O(h)$ можно заменить на ее ограничение на M_t; кроме того, можно считать, что $S_1(x,t)$ – расстояние до M_t по нормали (точнее, любая гладкая функция в $\mathbf{R}^3$, совпадающая с этим расстоянием в достаточно малой окрестности поверхности M_t), а S_2 и U в окрестности поверхности совпадают с $S_2|_{M_t}$ и $U|_{M_t}$. С учетом этого обстоятельства, подстановка (2) в (1) и приравнивание к нулю коэффициента при h^{-1} в левой части равенства приводит к следующему утверждению.

Утверждение 2.1 *Если уравнения (1) допускают асимптотические решения вида (2), функция U удовлетворяет уравнениям*

$$\begin{cases} (v,\nabla_z)v + \nabla_z\Pi = 0, \\ (\nabla_z, v) = 0, \end{cases} \tag{3}$$

$$(v,\nabla_z)w = 0 \tag{4}$$

где ∇_z означает дифференцирование по быстрым переменным z в евклидовой метрике $g^{ij} = (\nabla S_i, \nabla S_j)|_{M_t}$ на цилиндре $\mathbf{R}_{z_1} \times \mathbf{S}^1_{z_2}$, $v_j = (\partial S_j/\partial t + dS_j(U))|_{M_t}$ – компоненты поля скоростей, ортогональная вихревой пленке и касательная к ней, но ортогональная осям вихревых нитей, m – единичный вектор, ортогональный $\nabla S_1, \nabla S_2$ (т.е. направленный вдоль осей нитей), $w = (U,m)|_{M_t}$ – компонента поля скоростей, направленная вдоль осей вихрей.

Замечание. В силу выбора функций S_1, S_2, указанная выше евклидова метрика имеет вид $ds^2 = dz_1^2 + (\nabla S_2)^2|_{M_t} dz_2^2$.

Замечание. Уравнения на двумерное векторное поле v суть стационарные уравнения Эйлера на цилиндре; последнее уравнение на функцию w означает, что она постоянна на траекториях векторного поля v.

2.1.2 Интегральные тождества для решений уравнений Эйлера

В дальнейшем нам понадобятся решения v уравнений Эйлера, почти все траектории которых замкнуты. Такие поля удовлетворяют условию $v_1 \to 0$ при $z_1 \to \infty$; они обладают некоторыми специальными свойствами, которые мы сейчас обсудим.

Утверждение 2.2 *Пусть v – решение уравнений Эйлера (3), причем $v_1 \to 0$ при $z_1 \to \infty$. Справедливы следующие тождества*

$$\int_0^{2\pi} v_1 v_2 dz_2 = \int_{-\infty}^{\infty} v_1 v_2 dz_1 = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z_1}\int_0^{2\pi}(v_1^2 + \Pi)dz_2 = \frac{\partial}{\partial z_2}\int_{-\infty}^{\infty}((v_2^2 - \omega_2^2) + (\nabla S_2)|^2_{M_t}(\Pi - \Pi_0))dz_1 = 0.$$

Здесь $\omega_2 = \lim_{z_1\to\infty} v_2 = (\frac{\partial S_2}{\partial t} + (V,\nabla)S_2)|_{M_t}$, $\Pi_0 = \lim_{z_1\to\infty}\Pi$.

Замечание. Полученные равенства похожи на интегральные тождества из работы [13], которым удовлетворяют решения уравнений Эйлера или Навье–Стокса, убывающие на бесконечности. Отметим, однако, что в нашем случае в нуль обращаются не константы, а функции от одной из переменных z.

2.1.3 Параметризация решений уравнений Эйлера

Следующий шаг асимптотической процедуры состоит в нахождении уравнений на параметры, от которых зависят решения уравнений (3) – (4). В работах [40-42,53] обсуждалась гипотеза, согласно которой параметрами, от которых зависят решения уравнений Эйлера, являются топологические инварианты векторных полей дивергенции нуль относительно сохраняющих площадь (объем в трехмерном случае) диффеоморфизмов области течения. Приведем эту гипотезу применительно к нашей ситуации.

Рассмотрим на двумерном цилиндре бездивергентное векторное поле $v(z)$; будем считать, что все положения равновесия этого поля невырождены и, кроме того, почти все траектории замкнуты. Обозначим через Γ фактор цилиндра по траекториям v; ясно, что Γ – граф, вершины которого соответствуют положениям равновесия, а ребра – областям, гладко расслоенным на замкнутые траектории v. На каждом ребре имеется естественная параметризация: периодической траектории γ сопоставляется число

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} z_1 dz_2$$

(переменная действия). Параметризованный граф Γ – инвариант поля v относительно сохраняющих площадь диффеоморфизмов цилиндра; кроме того, на этом графе определена (также инвариантная) функция, сопоставляющая каждой периодической траектории поля v ее частоту $\omega(I)$; ясно, что эта функция непрерывна на Γ и гладкая на каждом ребре. Если поле v удовлетворяет уравнениям Эйлера, функция частоты связана с интегралом Бернулли $B = \frac{1}{2}v^2 + \Pi$; для наших целей удобно использовать функцию B вместо ω.

Гипотеза 2.1 *Существует такое открытое (в подходящем смысле) подмножество в множестве пар Γ, B, где Γ - параметризованный граф, а B – непрерывная функция на Γ, гладкая на ребрах, что для каждой пары из этого открытого подмножества найдется гладкое решение v, Π уравнений Эйлера (5), для которого граф Γ есть множество траекторий поля v, а B – интеграл Бернулли.*

Замечание. Любое бездивергентное поле v на цилиндре, почти все траектории которого замкнуты, представляется в виде косого градиента скалярной функции ψ (функции тока). В координатах z

$$v_1 = -\frac{\partial\psi}{\partial z_2}, \quad v_2 = \frac{\partial\psi}{\partial z_1}, \quad \psi = Cz_1 + \psi_0(z_1, z_2),$$

где C – константа, ψ_0 – периодическая функция z_2 и $\psi_0 \to 0$ при $z_1 \to \infty$. Ясно, что Γ – граф Риба (множество линий уровня) функции ψ.

Замечание. Уравнение (4) означает, что w – функция, корректно определенная на Γ. Таким образом, полный набор "параметров", от которых зависят решения уравнений (3) – (4), состоит из троек Γ, B, w, где Γ – параметризованный граф, B, w – непрерывные функции на Γ, гладкие на ребрах. Функции B, w зависят также от "медленных" переменных $x, t, \quad x \in M_t$. Ниже получены уравнения на эти функции, определяющие эволюцию системы вихрей.

2.2 Коядро линеаризованных уравнений Эйлера

Уравнения на параметры возникают при анализе следующего приближения асимптотической процедуры. Именно, приравняем коэффициенты при h^0, возникающие в левой и правой частях (1) при подстановке туда (2). Получим уравнения на поле U_1 – линеаризованные уравнения (3) – (4) с правой частью. Нужные уравнения возникают из условий разрешимости этой задачи, т.е. условия ортогональности правой части коядру линеаризованного оператора (3) – (4). Опишем сперва коядро линеаризованного оператор Эйлера на двумерном цилиндре; оно состоит из бездивергентных векторных полей ξ, удовлетворяющих уравнениям

$$(v, \nabla_z)\xi - \frac{\partial v}{\partial z}^* \xi + \nabla_z \chi = 0. \qquad (5)$$

Утверждение 2.3 *Коядро линеаризованного оператора Эйлера бесконечномерно; именно, ему принадлежит любое бездивергентное поле, коммутирующее с v.*

Замечание. Указанное пространство в коядре линеаризованного оператора Эйлера порождается вариацией произвольной функций B и может быть интерпретировано как пространство функций на графе Г. Действительно, введем в произвольной области цилиндра, гладко расслоенной на траектории v, переменные действие-угол I, φ ([2,3]). Поля v и ξ в этих координатах имеют вид $\omega(I)\partial/\partial\varphi$ и $\lambda(I)\partial/\partial\varphi$ соответственно, где $\omega(I)$, $\lambda(I)$ — частоты этих полей на соответствующей параметру I траектории. Таким образом, поле ξ задается функцией $\lambda(I)$, определенной на графе Г.

Замечание. Коядро оператора, соответствующего уравнению (4), очевидно, состоит из функций, постоянных на траекториях поля v, т.е. из функций на Г. Таким образом, в коядре линеаризованного оператора системы (3) – (4) лежат пары функций на этом графе.

2.3 Условия разрешимости уравнения для поправки

Уравнения первого приближения (т.е. равенства, полученные приравниванием слагаемых порядка 1, возникающих при подстановке (2) в (1)) имеют следующий вид

$$\begin{cases} (v_1, \nabla_z)v + (v, \nabla_z)v_1 + \nabla_z \Pi_1 = -F, \\ \quad (\nabla_z, v_1) = -G, \\ (v, \nabla)w_1 + (v_1, \nabla)w = -H, \end{cases} \qquad (6)$$

где векторная функция F и скалярные G, H выражаются через v, w, Π, $v_1^j = dS_j(U_1)|_{M_t}$, $w_1 = (U_1, m)|_{M_t}$. Условия ортогональности указанному в предыдущем пункте пространству в коядре линеаризованного оператора Эйлера приводят к соотношению на F, G и H; точнее, имеет место следующая

Теорема 2.1 *Пусть существуют гладкие решения уравнений (6). Тогда функции F, G и H удовлетворяют равенствам*

$$\int_\gamma (F, v)d\varphi + a(I)\frac{\partial B}{\partial I} = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial I} + \int_\gamma G d\varphi = 0, \quad \int_\gamma H d\varphi + a\frac{\partial w}{\partial I} = 0. \qquad (7)$$

Здесь $B = \Pi + \frac{1}{2}v^2$ *– функция Бернулли,* γ *– произвольная замкнутая траектория поля* v*,* φ *– угловая координата на траекториях,* a *– вспомогательная функция на графе* Γ*.*

Замечание. Выписанные условия возникают из условий ортогональности правой части в (6) указанному выше бесконечномерному пространству в коядре линеаризованного оператора Эйлера (см. утверждение 2.3). Именно, равенства (7) суть условия ортогональности, записанные в специально выбранном "базисе оснащения этого пространства" — грубо говоря, он состоит из δ-образных полей с носителями на траекториях поля v. Именно такой выбор "базиса" позволяет свести нахождение условий ортогональности к усреднению вдоль траекторий.

2.4 Уравнения движения вихревой пленки

Рассмотрим уравнения (6) и перейдем в них к пределу при $|z_1| \to \infty$. Учитывая, что $U(z,x,t) \to V(x,t)$, немедленно получим следующее утверждение

Утверждение 2.4 *Векторное поле* $V(x,t)$ *удовлетворяет уравнениям Эйлера*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} + (V,\nabla)V + \nabla P_0 = 0, \\ (\nabla, V) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

где $P_0 = \lim_{|z_1|\to\infty} \Pi$*.*

Поскольку почти все траектории поля v замкнуты, $v_1 \to 0$ при $|z_1| \to \infty$; отсюда следует уравнение движения вихревой пленки – поверхности M_t, задаваемой уравнением $S_1(x,t) = 0$:

$$\left(\frac{\partial S_1}{\partial t} + (V,\nabla)S_1\right)|_{S_1=0} = 0. \tag{9}$$

Замечание. Равенство (9) означает, что поверхность M_t движется по потоку: нормальная скорость точки этой поверхности совпадает с нормальной к поверхности компонентой поля скоростей V.

2.5 Эволюция системы вихрей

Равенства (7) представляют собой уравнения, определяющую эволюцию "параметров" вихревой структуры – функций B, w, заданных на графе Γ и зависящих от точки движущейся поверхности M_t. Эти уравнения следует рассматривать совместно с уравнениями Эйлера (3) – (4); следующее утверждение более наглядно демонстрирует их структуру.

Теорема 2.2 *Равенства (7) эквивалентны системе уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial t} + (< U >, \nabla)B + a\dfrac{\partial B}{\partial I} + Q(B,w) = \dfrac{\partial}{\partial I}D^2\dfrac{\partial}{\partial I}B, \\ \dfrac{\partial a}{\partial I} + < (\nabla, U) > + E(B,w) = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + (< U >, \nabla)w + a\dfrac{\partial w}{\partial I} + K(B,w) = \dfrac{\partial}{\partial I}D^2\dfrac{\partial}{\partial I}w. \end{cases} \tag{10}$$

Здесь угловыми скобками обозначено усреднение вдоль траекторий поля v,

$$D^2 = (1 + (\nabla S_2)^2)|_{M_t} < (\frac{\partial z}{\partial \varphi})^2 >,$$

функции Q, E, K зависят от B, w, I и точки движущейся поверхности M_t. В частности,

$$-Q =< (\frac{\partial}{\partial t} + (U, \nabla))\Pi + v_k(\frac{\partial}{\partial t} + 2(U, \nabla)\frac{\partial S_k}{\partial t}) + v_k(U, S_k'' U) +$$
$$+ v_k z_1(\nabla S_k), ((\frac{\partial S_j}{\partial t} + (U, \nabla S_j))\frac{\partial U}{\partial z_j} + \nabla S_j \frac{\partial \Pi}{\partial z_j}) > |_{M_t}$$

(по повторяющимся индексам предполагается суммирование, а S_j'' обозначает матрицу вторых производных функции S_j).

Замечание. Слагаемые $\frac{\partial}{\partial I} D^2 \frac{\partial}{\partial I} B$, $\frac{\partial}{\partial I} D^2 \frac{\partial}{\partial I} w$ в уравнениях (10) описывают влияние вязкости жидкости на рассматриваемую систему вихрей. Отметим, что "коэффициент вязкости" D^2 зависит от самих неизвестных функций B, w. Аналогичное явление возникает при описании развитой турбулентности – уравнения динамики содержат т.н. турбулентную вязкость, зависящую от неизвестного поля скоростей. Отметим, что выражение для турбулентной вязкости заранее неизвестно – оно выбирается из физических соображений или из соображений максимальной простоты модели. В нашем случае D^2 вполне определенная (хотя и сложно заданная) функция от B, w.

Замечание. Уравнения (10) по переменной I заданы на графе Γ. Ниже обсуждаются условия в вершинах графа, которым удовлетворяют функции a, B, w.

2.6 Условия Кирхгофа

Очевидно, функции w, B непрерывны на графе Γ. Производные этих функций, а также функция a, в каждой вершине удовлетворяют равенствам Кирхгофа теории электрических цепей. Именно, имеет место следующее утверждение.

Утверждение 2.5 *В каждой внутренней вершине (т.е. вершине степени, большей 1) графа Γ, функции $a, D^2\frac{\partial B}{\partial I}, D^2\frac{\partial w}{\partial I}$ удовлетворяют условиям Кирхгофа*

$$a_{out} = a_{in}, \quad (D^2 \frac{\partial B}{\partial I})_{out} = (D^2 \frac{\partial B}{\partial I})_{in}, \quad (D^2 \frac{\partial w}{\partial I})_{out} = (D^2 \frac{\partial w}{\partial I})_{in},$$

где индексом "out" обозначена сумма пределов соответствующей функции в данной вершине по исходящим ребрам, а индексом "in" – сумма ее пределов по входящим ребрам.

Замечание. В вершинах степени 1 графа Γ (они соответствуют эллиптическим положениям равновесия поля v) функция a обращается в нуль.

Замечание. В ситуации общего положения все внутренние вершины Γ суть вершины степени 3; в этом случае условия Кирхгофа принимают вид

$$a_1 = a_2 + a_3, \quad (D^2 \frac{\partial B}{\partial I})_1 = (D^2 \frac{\partial B}{\partial I})_2 + (D^2 \frac{\partial B}{\partial I})_3, \quad (D^2 \frac{\partial w}{\partial I})_1 = (D^2 \frac{\partial w}{\partial I})_2 + (D^2 \frac{\partial w}{\partial I})_3,$$

где индексом “1” обозначен предел по входящему ребру, а индексами “2”, “3” – пределы по исходящим ребрам.

2.7 Напряжения Рейнольдса

Хорошо известно (см., например, [6]), что при усреднении гидродинамических уравнений возникают слагаемые, описывающие влияние флуктуаций на среднее поле (напряжения Рейнольдса); в нашей ситуации роль среднего поля играет интеграл от поля скоростей по двумерному цилиндру “быстрых” переменных z. Именно, обозначим через U_0 убывающую часть поля скоростей: $U_0 = U - V$ и чертой — усреднение по цилиндру:

$$\bar{f} = \int_0^{2\pi} dz_2 \int_{-\infty}^{\infty} dz_1 f.$$

Теорема 2.3 *Векторное поле $\bar{U}_0$ удовлетворяет равенству*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \bar{U}_0}{\partial t} + (V, \nabla \bar{U}_0) + (\bar{U}_0, \nabla)V + (\bar{U}_0, \nabla)\bar{U}_0 + \overline{(\Theta, \nabla)\Theta + \Theta(\nabla, \Theta)} + \nabla \mathcal{P} = 0, \\ (\nabla, \bar{U}_0) = 0. \end{cases} \qquad (11)$$

Здесь $\Theta = U_0 - \bar{U}_0$, $\mathcal{P} = \overline{\Pi - \Pi_0}$.

Замечание. Слагаемые $\kappa = \overline{(\Theta, \nabla)\Theta + \Theta(\nabla, \Theta)}$ в уравнениях (11) в точности совпадают с напряжениями Рейнольдса (см., например, [6,20,36]) – в координатах они имеют вид

$$\kappa_i = \overline{(\nabla, \Theta\Theta_i)}.$$

Замечание. Уравнения (11) суть условия ортогональности правой части в (8) постоянному векторному полю. Такое поле, конечно, коммутирует с любым полем, в частности, с v, а потому лежит в коядре линеаризованного оператора Эйлера.

3 Система вихревых нитей, заполняющая все пространство

В этом случае функция U периодическая по обеим "быстрым"переменным z; с технической точки зрения, разница состоит в том, что в случае распределенной по пространству системы вихрей отсутствует поверхность M_t, а значит, и разложения по расстоянию до нее, приводящие к дополнительным слагаемым в формулах предыдущих пунктов. Кроме того, нет предельного перехода при $z_1 \to \infty$, а значит, и векторного поля V; переменные z_1, z_2 становятся равноправными.

3.1 Уравнения Эйлера и топологические инварианты векторных полей на торе

Будем считать, что переменные z меняются на двумерном торе $\mathbf{T}^2$. Подстановка (2) в (1) и приравнивание к нулю коэффициента при h^{-1} в левой части равенства приводит к следующему утверждению.

Утверждение 3.1 *Если уравнения (1) допускают асимптотические решения вида (2), функция U удовлетворяет уравнениям Эйлера*

$$\begin{cases} (v,\nabla_z)v+\nabla_z\pi=0,\\ (\nabla_z,v)=0,\\ (v,\nabla_z)w=0. \end{cases} \tag{12}$$

где ∇_z означает дифференцирование по быстрым переменным z в евклидовой метрике $g^{ij}=(\nabla S_i,\nabla S_j)$ на торе $\mathbf{T}^2$, $v_j=\partial S_j/\partial t+dS_j(U)$, $w=(U,m)$, где m – единичный вектор, ортогональный ∇S_1 и ∇S_2.

Замечание. Конструкция асимптотических решений вида (2) приводит к замене производных (a,∇) (a – векторное поле) на производные $(a,\nabla)+h^{-1}dS_j(a)\partial/\partial z_j$, т.е. к возникновению в декартовом произведении $\mathbf{R}^3_x\times\mathbf{T}^2_z$ связности, горизонтальное пространство которой задано векторами $a_i\partial/\partial x_i+b_j\partial/\partial z_j$, для которых $b_j=dS_j(a)$.

Граф Γ определяется точно так же, как в п.2.3; так же выглядит и гипотеза о параметризации решений уравнений (12):

Гипотеза 3.1 *Существует такое открытое (в подходящем смысле) подмножество в множестве троек Γ, B, w, где Γ - параметризованный граф, B, w – непрерывные функции на Γ, гладкие на ребрах, что для каждой тройки из этого открытого подмножества найдется гладкое решение v,π,w уравнений Эйлера (18), для которого граф Γ есть множество траекторий поля v, а B – функция Бернулли ($B=v^2/2+\Pi$).*

3.2 Коядро линеаризованных уравнений Эйлера и условия разрешимости уравнения для поправки

В рассматриваемой ситуации коядро состоит из бездивергентных векторных полей ξ на торе $\mathbf{T}^2$, удовлетворяющих уравнениям

$$\mathrm{rot}_z\big((v,\nabla_z)\xi-\frac{\partial v}{\partial z}^{*}\xi)\big)=0. \tag{13}$$

Следующее утверждение доказывается совершенно аналогично утверждению 2.3.

Утверждение 3.2 *Коядро линеаризованного оператора Эйлера бесконечномерно; именно, ему принадлежит любое бездивергентное поле, коммутирующее с v.*

Уравнения первого приближения (т.е. равенства, полученные приравниванием слагаемых порядка 1, возникающих при подстановке (2) в (1)) имеют следующий вид

$$\begin{cases} (v_1,\nabla_z)v+(v,\nabla_z)v_1+\nabla_z\Pi_1=-F,\\ \quad(\nabla_z,v_1)=-G,\\ (v,\nabla)w_1+(v_1,\nabla)w=-H, \end{cases} \tag{14}$$

где векторная функция F и скалярные G,H выражаются через v,w,Π, $v_1^j=dS_j(U_1)$, $w^1=(U,m)$. Условия ортогональности указанному в предыдущем утверждении пространству в коядре линеаризованного оператора Эйлера приводят к соотношению на F, G и H; следующая теорема доказывается аналогично теореме 2.1.

Теорема 3.1 *Пусть существуют гладкие решения уравнений (14). Тогда функции F, G и H удовлетворяют равенству*

$$\int_\gamma (F,v)d\varphi + a(I)\frac{\partial B}{\partial I} = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial I} + \int_\gamma G d\varphi = 0, \quad \int_\gamma H d\varphi + a\frac{\partial w}{\partial I} = 0. \tag{15}$$

Здесь $B = \pi + \frac{1}{2}v^2$ – функция Бернулли, γ – произвольная замкнутая траектория поля v, φ – угловая координата на траекториях, a – вспомогательная функция на графе Γ.

3.3 Уравнения системы вихревых нитей. Условия Кирхгофа

Уравнения (15) можно переписать в виде системы уравнений на функции B, w (напомним, что эти функции заданы на графе Γ и зависят от дополнительных параметров x, t). Следующее утверждение доказывается аналогично теореме 4.1 работы [50]

Теорема 3.2 *Равенства (15) эквивалентны системе уравнений*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial B}{\partial t} + (< U >, \nabla)B + a\dfrac{\partial B}{\partial I} + Q(B,w) = \dfrac{\partial}{\partial I}D^2\dfrac{\partial}{\partial I}B, \\ \dfrac{\partial a}{\partial I} + < (\nabla, U) > + E(B,w) = 0, \\ \dfrac{\partial w}{\partial t} + (< U >, \nabla)w + a\dfrac{\partial w}{\partial I} + K(B,w) = \dfrac{\partial}{\partial I}D^2\dfrac{\partial}{\partial I}w. \end{cases} \tag{16}$$

Здесь угловыми скобками обозначено усреднение вдоль траекторий поля v,

$$D^2 = g < (\frac{\partial z}{\partial \varphi})^2 >,$$

$g = \det(\nabla S_i, \nabla S_j)$, Q, E, K зависят от B, w, I, x, t. Функции w, B непрерывны на графе Γ; в каждой вершине степени, большей 1, функции $a, D^2\frac{\partial B}{\partial I}, D^2\frac{\partial w}{\partial I}$ удовлетворяют условиям Кирхгофа

$$a_{out} = a_{in}, \quad (D^2\frac{\partial B}{\partial I})_{out} = (D^2\frac{\partial B}{\partial I})_{in}, \quad (D^2\frac{\partial w}{\partial I})_{out} = (D^2\frac{\partial w}{\partial I})_{in},$$

где индексом "out" обозначена сумма пределов соответствующей функции в данной вершине по исходящим ребрам, а индексом "in" – сумма ее пределов по входящим ребрам. В вершинах степени 1 графа Γ функция a обращается в нуль.

3.4 Напряжения Рейнольдса

Уравнения Рейнольдса выводятся так же, как в работе [50]. Именно, следующее утверждение доказывается интегрированием уравнений (14) по тору $\mathbf{T}^2$.

Теорема 3.3 *Пусть уравнения (14) имеют гладкое решение. Тогда справедливы равенства*

$$\frac{\partial \bar{U}}{\partial t} + (\bar{U}, \nabla\bar{U}) + \nabla\bar{\Pi} + \overline{(\Theta, \nabla\Theta) + \Theta(\nabla, \Theta)} = 0, \quad (\nabla, \bar{U}) = 0. \tag{17}$$

Здесь $\Theta = U - \bar{U}$, чертой обозначено усреднение по тору $\mathbf{T}^2$.

Замечание. Если вихри выстраиваются в пленку, асимптотическое описание такой структуры содержит два векторных поля, не зависящих от "быстрых"переменных. Одно их них – предельное поле $V(x,t)$ – удовлетворяет уравнениям Эйлера и определяет движение пленки. Второе – усредненное поле U_0 – удовлетворяет уравнениям Рейнольдса (в которые входят поле V и напряжения Рейнольдса). В случае распределенной системы вихрей предельного поля нет; есть только среднее поле, связанное с напряжениями Рейнольдса.

Замечание. Вихревая структура, описанная во второй части работы, в пределе исчезающей вязкости ($h \to 0$) не переходит в решение уравнений Эйлера. Слабый предел этой структуры удовлетворяет уравнениям Рейнольдса; “огибающая” быстрых осцилляций (очевидно, отличная от нуля) представляет собой функцию медленных переменных x, t, меняющуюся по сложному закону – для его вычисления надо найти максимум по быстрым переменным решения уравнений (16).

4 Периодическая структура, состоящая из локализованных вихрей.

Наконец, рассмотрим в жидкости структуру, состоящую из локализованных в одной точке вихрей, периодически расположенных в пространстве. В этом случае $S \in \mathbf{R}^3$ и функция $U(z,x,t)$ 2π-периодична по “быстрым” переменным $z = S/h$, т.е. переменные z меняются на трехмерном торе $\mathbf{T}^3$.

4.1 Трехмерные эйлеровы поля и инварианты Фоменко лиувиллевых слоений

Подстановка (2) в (1) и приравнивание к нулю коэффициента при h^{-1} в левой части равенства приводит к следующему утверждению.

Утверждение 4.1 *Если уравнения (1) допускают асимптотические решения вида (2), функция U удовлетворяет уравнениям Эйлера*

$$(v, \nabla_z)v + \nabla_z \pi = 0, \quad (\nabla_z, v) = 0, \tag{18}$$

где ∇_z означает дифференцирование по быстрым переменным z в евклидовой метрике $g^{ij} = (\nabla S_i, \nabla S_j)$ на торе $\mathbf{T}^3$, $v_j = \partial S_j/\partial t + dS_j(U)$.

Замечание. Конструкция асимптотических решений вида (2) приводит к замене производных (a, ∇) (a – векторное поле) на производные $(a, \nabla) + h^{-1} dS_j(a)\partial/\partial z_j$, т.е. к возникновению в декартовом произведении $\mathbf{R}^3_x \times \mathbf{T}^3_z$ связности, горизонтальное пространство которой задано векторами $a_i \partial/\partial x_i + b_j \partial/\partial z_j$, для которых $b_j = dS_j(a)$.

Центральную роль в конструкциях предыдущих пунктов играла гипотеза о параметризации решений уравнений Эйлера топологическими инвариантами бездивергентных векторных полей. В нашей ситуации векторное поле v трехмерно; описание инвариантов произвольных трехмерных полей дивергенции нуль, по-видимому, представляет собой трансцендентно сложную задачу. Однако топология эйлеровых полей общего положения специфична и аналогична топологии интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы; инварианты таких систем описаны в рамках теории их топологической классификации [5]. Определим нужные нам инварианты и сформулируем соответствующую гипотезу о параметризации.

Напомним, (см. [2,3]), что решения стационарных уравнений Эйлера обладают следующими свойствами.

1) Векторное поле $\Omega = \mathrm{rot}_z v$ коммутирует с v (здесь rot_z - ротор по быстрым переменным z).

2) Векторное произведение $v \times \Omega$ является градиентом функции Бернулли $B = (v, v)/2 + \pi_0$.

3) Неособое компактное связное множество уровня функции B гомеоморфно тору; этот тор инвариантен относительно фазовых потоков полей v и Ω и движение на нем в силу любого из этих полей условно периодично.

Таким образом, топология стационарных эйлеровых полей аналогична топологии вполне интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы — такое поле определяет слоение трехмерного тора на двумерные, аналогичное лиувиллеву слоению изоэнергетической поверхности. Это обстоятельство позволяет ввести инвариант таких полей, аналогичный инварианту Фоменко (молекуле [5]), возникающему в теории гамильтоновых систем. Именно, обозначим через Γ множество компактных поверхностей уровня интеграла Бернулли B, и будем рассматривать такие поля v, для которых Γ — граф, причем все внутренние точки его ребер соответствуют неособым поверхностям уровня (т.е. двумерным торам).

Замечание. Отметим, что интеграл Бернулли B не может быть функцией Морса. Это следует из следующего простого утверждения (ср. с [5]).

Утверждение 4.2 *Любая изолированная критическая точка функции B вырождена.*

Таким образом, Γ не является графом Риба. В теории топологической классификации гамильтоновых систем с двумя степенями свободы рассматриваются графы, являющиеся множествами поверхностей уровня т.н. функций Морса-Ботта [5]; для наших целей важно, что Γ — граф.

Ясно, что граф Γ, построенный по полю v, не изменится, если это поле преобразовать при помощи сохраняющего объем диффеоморфизма трехмерного тора. Более того, на этом графе имеется естественная параметризация, инвариантная относительно таких диффеоморфизмов. Именно, рассмотрим произвольную вершину степени 1 графа Γ и сопоставим произвольной точке инцидентного ей ребра графа (т.е. тору, инвариантному относительно потоков полей v и Ω) число I, равное объему соответствующего полнотория, поделенному на $4\pi^2$. Таким образом, на этом ребре определена инвариантная параметризация; ориентируем ребро в направлении возрастания параметра. Далее, рассмотрим вторую вершину, инцидентную данному ребру; припишем этой вершине значение параметра I_0, равное пределу I по рассмотренному выше ребру, и параметризуем все остальные ребра, инцидентные указанной вершине, следующим образом. Прежде всего, параметризуем ребро в направлении от пройденной вершины; далее, точке a на ребре сопоставим число $I(a)$ так, чтобы выполнялись два условия: а) число $I(a_2) - I(a_1)$ равно объему трехмерной пленки, ограниченной торами a_1 и a_2, если ориентация ребра направлена от a_1 к a_2; б) предел $I(a)$ при стремлении к пройденной вершине, равен I_0. В результате получаем параметризацию на всех ребрах, инцидентных этой вершине. Этот процесс продолжим до тех пор, пока не получим параметризацию всех ребер. Именно, пусть на каком-то шаге часть ребер параметризована; рассмотрим произвольную вершину, инцидентную одному из параметризованных ребер. Все ребра, инцидентные данной вершине, делятся на два класса: те, на которых параметризация уже есть (назовем их входящими), и те, на которых ее пока нет (их назовем исходящими). Припишем выбранной вершине значение параметра I_0, равное сумме пределов I по всем входящим ребрам; после этого на каждом исходящем ребре определим параметр так, как описано выше.

Тем самым, определен топологический инвариант поля v — параметризованный граф Г. Далее, на этом графе имеются дополнительные инварианты — функции частот поля v. Именно, рассмотрим произвольное ребро графа; оно определяет область трехмерного тора, гладко расслоенную на двумерные торы. Зафиксируем в этой области базис циклов на инвариантных торах, гладко меняющийся от тора к тору и обозначим через $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2\}, \quad \varphi_j \in [0, 2\pi]$ угловые координаты на торах, отвечающие этому базису. В координатах I, φ (которые в дальнейшем будем называть переменными действие-угол по аналогии с теорией интегрируемых гамильтоновых систем, см. [2]) поле v имеет вид

$$v = \omega_1(I)\frac{\partial}{\partial\varphi_1} + \omega_2(I)\frac{\partial}{\partial\varphi_2};$$

функции $\omega_j(I)$ (частоты) определены инвариантно относительно диффеоморфизмов. Таким образом, мы определили набор инвариантов поля v, состоящий из параметризованного графа Г и пары гладких функций ω_1, ω_2 на его ребрах.

Гипотеза 4.1 *Существует такое открытое (в подходящем смысле) подмножество в множестве троек* $\Gamma, \omega_1, \omega_2$*, где* Γ *- параметризованный граф, а* ω_j *- гладкие функции на его ребрах, что для каждой тройки из этого открытого подмножества найдется гладкое решение* v, π *уравнений Эйлера (18), для которого граф* Γ *есть множество компактных поверхностей уровня интеграла Бернулли, а функции* ω_j *суть частоты поля* v *на соответствующих торах.*

Уравнения, определяющие эволюцию параметров, от которых зависит вектор v, суть уравнения на вектор частот ω, заданные по одной из переменных на графе Г.

4.2 Коядро линеаризованных уравнений Эйлера

Коядро линеаризованного оператора Эйлера состоит из бездивергентных векторных полей ξ на торе $\mathbf{T}^3$, удовлетворяющих уравнениям

$$\operatorname{rot}_z\big((v, \nabla_z)\xi - \frac{\partial v}{\partial z}^* \xi)\big) = 0. \tag{19}$$

Утверждение 4.3 *Коядро линеаризованного оператора Эйлера бесконечномерно; именно, любое бездивергентное поле, коммутирующее с* v *и* $\Omega = \operatorname{rot}_z v$*, удовлетворяет (19).*

Замечание. Указанное пространство в коядре линеаризованного оператора Эйлера порождается вариацией произвольных функций ω_1, ω_2 и может быть интерпретировано как пространство пар функций на графе Г. Действительно, введем в произвольной области трехмерного тора, гладко расслоенной на торы $B = const.$, описанные выше переменные действие-угол I, φ ([2]). Поля v и Ω в этих координатах имеют вид $\omega_1(I)\partial/\partial\varphi_1 + \omega_2(I)\partial/\partial\varphi_2$ и $\lambda_1(I)\partial/\partial\varphi_1 + \lambda_2(I)\partial/\partial\varphi_2$ соответственно, где $\omega_j(I), \quad \lambda_j(I)$ — частоты этих полей на соответствующем параметру I инвариантному тору. С другой стороны, любое бездивергентное коммутирующее с v и Ω поле ξ в тех же координатах имеет вид $b_1(I)\partial/\partial\varphi_1 + b_2(I)\partial/\partial\varphi_2$ ($b_j(I)$ — произвольные гладкие функции). Другими словами, лиувиллевы торы поля v являются инвариантными многообразиями и для поля ξ, которое, тем самым, определяется своим вектором частот b_1, b_2. Таким образом, множество бездивергентных полей, коммутирующих с v и Ω, интерпретируется как множество пар b_1, b_2 функций одной переменной I, которая меняется на графе Γ. Это обстоятельство является аргументом в пользу высказанной в предыдущем пункте гипотезы о параметризации множества решений уравнений Эйлера.

4.3 Условия разрешимости уравнения для поправки

Уравнения первого приближения (т.е. равенства, полученные приравниванием слагаемых порядка 1, возникающих при подстановке (2) в (1)) имеют следующий вид

$$(v_1, \nabla_z)v + (v, \nabla_z)v_1 + \nabla_z \pi_1 = -F, \quad (\nabla_z, v_1) = -G, \tag{20}$$

где векторная функция F и скалярная G выражаются через v, $v_1^j = dS_j(U_1)$. Условия ортогональности указанному в предыдущем пункте пространству в коядре линеаризованного оператора Эйлера приводят к соотношению на F и G; точнее, имеет место следующая

Теорема 4.1 *Пусть существуют гладкие решения уравнений (20). Тогда функции F, G удовлетворяют равенству*

$$\int_\Lambda (Fd\phi) + a(I)\frac{\partial B}{\partial I} = 0, \quad \frac{\partial a}{\partial I} + \int_\Lambda G d\phi = 0, \quad \int_\Lambda (\Omega, F) = 0. \tag{21}$$

Здесь $B = \pi + \frac{1}{2}v^2$ – функция Бернулли, Λ – произвольный неособый тор лиувиллева слоения, $\Omega = \mathrm{rot}_z\, v$, $d\phi = d\phi_1 \wedge d\phi_2$, a – вспомогательная функция на графе Γ.

Замечание. Отождествим векторное поле F на торе $\mathbf{T}^3$ с 1-формой β при помощи плоской метрики g_{ij}. Уравнения (21) можно записать в виде

$$\int_\Lambda \beta(v) d\phi + a\frac{\partial B}{\partial I} = 0, \quad \int_\Lambda \beta(\Omega) d\phi = 0.$$

Из этих равенств можно вычислить ограничение формы β на лиувиллев тор Λ:

$$\beta|_\Lambda = a\frac{\partial B}{\partial I}\sigma,$$

где

$$\sigma = \frac{1}{\omega_1\lambda_2 - \omega_2\lambda_1}(\lambda_1 d\varphi_2 - \lambda_2 d\varphi_1).$$

Здесь ω_i, λ_i - частоты полей v, Ω соответственно на торе Λ.

4.4 Уравнения когерентной структуры

Уравнения (21) можно переписать в виде системы уравнений на вектор частот ω поля v (напомним, что этот вектор задан на графе Γ и зависит от дополнительных параметров x, t). Именно, имеет место

Теорема 4.2 *Равенства (21) эквивалентны следующим уравнениям на вектор ω:*

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + (w, \nabla\omega) + Q\frac{\partial\omega}{\partial I} + r\omega = \mathcal{D}^2\frac{\partial^2\omega}{\partial I^2} + a\frac{\partial B}{\partial I}, \quad \frac{\partial a}{\partial I} + R = 0. \tag{22}$$

Здесь коэффициенты 2×2-матриц Q, r, скалярные функции $R, \mathcal{D}$ и векторное поле w выражаются через ω и коэффициенты плоской метрики на $\mathbf{T}^3$, вычисленные в точках тора Λ. В частности,

$$\mathcal{D}^2 =< detg >,$$

где g - индуцированная риманова метрика на Λ, а угловые скобки означают усреднение по Λ.

4.5 Условия Кирхгофа для уравнений когерентной структуры

4.5.1 3–атомы и допустимые частоты на лиувиллевых торах

Каждое ребро графа Γ отвечает области трехмерного тора, гладко расслоенной на двумерные. Рассмотрим теперь произвольную вершину этого графа; она изображает особое множество уровня интеграла Бернулли B. Рассмотрим окрестность этого особого множества; предположим, что она является 3–атомом в смысле [5], т.е. представляет собой компактное связное ориентируемое многообразие с краем, снабженное структурой расслоения Зейферта, причем последнее либо тривиально, либо имеет тип $(1, 2)$ (см. [5]). Край многообразия состоит из нескольких торов; назовем тор внешним, если при приближении к нему параметр I растет и внутренним в противоположном случае.

Замечание. В топологической теории интегрируемых гамильтоновых систем с двумя степенями свободы [5] окрестности особых слоев лиувиллева слоения являются 3–атомами в силу условия Морса — Ботта на дополнительный интеграл и требования топологической устойчивости. Конечно, в нашей ситуации можно подчинить эйлерово поле v аналогичным требованиям; однако для наших целей не существенно, какие условия гарантируют "атомную" структуру особых множеств, так что мы будем считать, что такая структура нам известна a priori.

Рассмотрим теперь соответствующую внутреннюю вершину графа. Этой вершине инцидентно несколько ребер, причем некоторые из них являются входящими, а остальные — исходящими (напомним, что граф ориентирован в направлении возрастания параметра I). Обозначим через η, ζ допустимые базисы циклов на неособых торах атома (см. [5]); напомним их определение. Первый базисный цикл η на торе Лиувилля — это слой расслоения Зейферта; при стремлении тора к критической окружности этот цикл также стремится к этой окружности, проходимой 1 или 2 раза в зависимости от того, тривиально или нет слоение Зейферта на атоме. Второй цикл ζ дополняет η до базиса; если слоение Зейферта тривиально, этот цикл строится как пересечение тора Лиувилля с двумерной поверхностью — глобальным сечением слоения Зейферта. Если же слоение не тривиально, второй цикл определяется как пересечение тора с глобальным сечением "тривиализованного" слоения Зейферта — последнее получается выбрасыванием из атома малых окрестностей критических окружностей. При этом сечение должно удовлетворять следующему условию: его пересечение ζ' с границей трубчатой окрестности критической окружности связано со слоем η слоения Зейферта и исчезающим циклом κ соотношением $\eta = \kappa + 2\zeta$.

Замечание. Допустимый базис циклов определен, конечно, неоднозначно; именно, к каждому циклу ζ можно прибавить цикл $k\eta$, причем сумма целых чисел k по всем граничным торам данного атома должна равняться нулю (см. [5]).

Выбор базиса циклов определяет частоты поля v на неособых торах лиувиллева слоения, входящих в данный атом; обозначим через ω_0 частоту, соответствующую циклу η (слою слоения Зейферта), а через ω' — частоту, соответствующую циклу ζ. Ясно, что ω_0 — гладкая функция на атоме, постоянная на каждом торе Лиувилля (отметим, что функция ω' негладкая — ее асимптотика при прохождении через критическую окружность приведена, например, в [5]).

4.5.2 Условия Кирхгофа на 3–атоме

Теорема 4.3 *В каждой внутренней вершине (т.е. вершине степени, большей 1) графа Γ, соответствующей 3–атому, функции $a, D^2\frac{\partial B}{\partial I}, D^2\frac{\partial \omega_0}{\partial I}$ удовлетворяют условиям Кирхгофа*

$$a_{out} = a_{in}, \quad (D^2\frac{\partial \omega_0}{\partial I})_{out} = (D^2\frac{\partial \omega_0}{\partial I})_{in}, \quad (D^2\frac{\partial B}{\partial I})_{out} = (D^2\frac{\partial B}{\partial I})_{in},$$

где индексом "out" обозначена сумма пределов соответствующей функции в данной вершине по исходящему ребру, а индексом "in" – сумма ее пределов по входящим ребрам. Здесь $D^2 =< g^{11} >$, где g^{11} — элемент евклидовой метрики в R^3_z в координатах действие–угол, соответствующий координате I.

Следствие 4.1 *Пусть все вершины графа Γ изображают 3-атомы. Для каждого ребра графа выберем на лиувиллевых торах соответствующей области трехмерного тора базис циклов и, тем самым, определим частоты ω_1, ω_2 поля v. Далее, на лиувиллевых торах каждого атома выберем допустимый базис циклов η, ζ (см. [5] и предыдущий пункт). С каждой вершиной степени m графа Γ свяжем набор целочисленных двумерных векторов $A_1, \ldots, A_m$, определенных следующим образом. Рассмотрим j-е ребро графа, инцидентное данной вершине (индекс j меняется от единицы до m, причем исходящие вершины снабжены первыми k номерами); на лиувиллевых торах, соответствующих этому ребру, имеется базис циклов γ_1, γ_2, порождающий частоты ω_1, ω_2, и базис η, ζ. Эти базисы выражаются друг через друга; пусть*

$$\gamma_1 = A^1_j\eta + A^2_j\zeta$$

(отметим, что те же коэффициенты выражают частоту ω_0 через частоты ω_1, ω_2). Теперь условия Кирхгофа для ω_0 в вершинах графа можно переписать в терминах частот ω_1, ω_2; именно, из предыдущей теоремы следуют формулы

$$\sum_{j=1}^{k}(A_j,\omega^j) = \sum_{j=k+1}^{m}(A_j,\omega^j)$$

где ω^j — предел вектора частот $\omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ по j-му ребру графа в данной вершине.

Замечание. В вершинах степени 1 графа Γ (они соответствуют вырождению тора в окружность, а не перестройке торов) функция a обращается в нуль.

Замечание. Предположим, что все вершины графа Γ соответствуют 3-атомам. Естественно предполагать, что эти атомы устойчивы, т.е. не рассыпаются при малой деформации (действительно, в задаче о когерентной структуре поле v зависит от дополнительных параметров x, t, изменение которых должно, вообще говоря, привести к распаду неустойчивых атомов). Такие атомы бывают трех типов: A (вырождение тора в окружность, ему соответствует вершина степени 1 графа G), B (перестройка двух торов в один, ему соответствует вершина степени 3, а сам атом имеет структуру тривиального расслоения Зейферта) и A^* (перестройка одного тора в один, такому атому соответствует вершина степени 2, а соответствующее расслоение Зейферта нетривиально). В этом случае условия Кирхгофа на атомах B, A^* вместе с условием обращения в нуль в вершинах, соответствующих атомам A, полностью определяют функцию a – другими словами, ее можно исключить из уравнений когерентной структуры аналогично тому, как это делается в классических уравнениях Прандтля, уравнениях одномерных когерентных структур ([22]) и уравнениях вытянутых вихрей ([40-42]).

4.6 Напряжения Рейнольдса

Следующее утверждение доказывается интегрированием уравнений (20) по трехмерном тору $\mathbf{T}^3$.

Теорема 4.4 *Пусть уравнения (20) имеют гладкое решение. Тогда справедливы равенства*

$$\frac{\partial V}{\partial t} + (V, \nabla V) + \nabla \mathcal{P} + \overline{(w, \nabla w) + w(\nabla, w)} = 0, \quad (\nabla, V) = 0. \tag{23}$$

Здесь $V = \bar{U}$, $w = U - \bar{U}$, черта означает усреднение по тору $\mathbf{T}^3$.

5 Связь с теорией развитой турбулентности

Приведенное выше асимптотическое описание вихревых структур имеет ряд общих черт с теорией турбулентности.

5.1 Наличие напряжений Рейнольдса

Усредненное поле скоростей во всех описанных случаях удовлетворяет уравнениям, аналогичным уравнениям Рейнольдса. Как известно, наличие напряжений Рейнольдса играет существенную роль в теории турбулентности, т.к. может приводить к росту энергии среднего поля.

5.2 Аналог турбулентной вязкости

Полученные уравнения движения вихревых структур содержат слагаемые, описывающие влияние вязкости на эти структуры. В эти слагаемые входит коэффициент, аналогичный турбулентной вязкости — вообще говоря, нелинейная функция от поля скоростей.

5.3 Колмогоровский масштаб и закон Колмогорова

Старшая часть описанных выше решений уравнений Навье–Стокса удовлетворяет уравнениям Эйлера. Поэтому они неустойчивы относительно более мелкомасштабных возмущений; точнее, линеаризуем уравнения Навье–Стокса на решении вида (2) и рассмотрим асимптотические решения линеаризованных уравнений вида

$$u = e^{i\frac{\sigma(z,x,t)}{\varepsilon}}(\eta(z,x,t) + \varepsilon\eta_1(z,x,t) + \dots), \quad \varepsilon \to 0. \tag{24}$$

Оказывается, такие решения растут со временем. Точнее, совершенно аналогично [30,27] доказывается следующее

Утверждение 5.1 *Пусть линеаризованные уравнения Навье–Стокса допускают решения вида (24). Тогда функция $\eta(z,x,t)$ удовлетворяет системе линейных уравнений вида*

$$\dot{\eta} + A(t)\eta = 0,$$

где $\dot{\eta}$ – производная функции η вдоль траекторий поля $U(z,x,t)$, $A(t)$ – матричная функция (явные формулы для A получаются аналогично [30,27]). Решения этой системы, вообще говоря, растут при $t \to \infty$; более того, существуют поля U, удовлетворяющие уравнениям Эйлера, для которых рост экспоненциальный.

Неустойчивость приводит к росту мелкомасштабных возмущений и, тем самым, к изменению вихревой структуры U, причем возникающая новая многофазовая структура снова удовлетворяет уравнениям Эйлера, если только $\varepsilon >> \sqrt{h}$. При этом условии растут еще более мелкомасштабные возмущения, причем этот рост связан только с тем, что старшая часть когерентной структуры удовлетворяет уравнениям Эйлера. Таким образом, рост продолжается до тех пор, пока новый масштаб не станет равным $h\sqrt{h} = h^{3/2}$, т.е. $\nu^{3/4}$ (закон Колмогорова). В этом случае старшая часть решения удовлетворяет уравнениям типа Навье–Стокса (включающим вязкие слагаемые).

Литература

1. *Андреев В.К., Капцов О.В., Пухначев В.В., Родионов А.А.* Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск, Наука, 1994.
2. *Arnold V.I, Khesin B.* Topological Methods in Hydrodynamics. Springer, 19
3. *Арнольд В.И.* Математические методы классической механики. М., Наука, 1974.
4. *Арнольд В.И., Козлов В.В., Нейштадт А.И.* Математические аспекты классической и небесной механики. "Современные проблемы математики. Фундаментальные направления." М., ВИНИТИ, 1985, с. 5 – 304.
5. *Болсинов А.В., Фоменко А.Т.* Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия, топология, классификация. т. 1,2. Изд-во РХД, 1999.
6. *Бэтчелор Д.* Введение в механику жидкости. М., Мир, 1973.
7. *Вакуленко С.А., Молотков И.А.* Стационарные волновые пучки в сильно нелинейной трехмерной неоднородной среде. Зап. научных семинаров ЛОМИ, т. 148, 1985, с. 52 – 60.
8. *Вакуленко С.А., Молотков И.А.* Волны в нелинейной неоднородной среде, сосредоточенные в окрестности заданной кривой. Докл. АН СССР, т. 262, N 3, 1982, с. 587 – 591.

9. *Вакуленко С.А., Маслов В.П., Молотков И.А., Шафаревич А.И.* Асимптотические решения уравнения Хартри, сосредоточенные при $h \to 0$ в малой окрестности кривой. Докл. АН СССР, т. 262, N 3, 1982, с. 587 – 591.
10. *Вишик М.И., Комеч А.И.* Индивидуальные и статистические решения двумерной системы Эйлера. ДАН СССР, т. 261, N 4, 1981, с. 780–785.
11. *Гольдштик М.А., Штерн В.Н., Яворский Н.И.* Вязкие течения с парадоксальными свойствами. М., Наука, 1989.
12. *Доброхотов С.Ю., Маслов В.П.* Конечнозонные почти периодические решения в ВКБ – приближениях. Современные проблемы математики, М., ВИНИТИ, 1980, т. 15, с. 3-94.
13. *Доброхотов С.Ю., Шафаревич. А.И.* О поведении на бесконечности поля скоростей несжимаемой жидкости. Изв. РАН, Мех. Жидкости и Газа, 1996, N 4, с. 38-42.
14. *Доброхотов С.Ю., Брунелло Тироцци, А.И. Шафаревич.* Представление быстроубывающих функций каноническим оператором Маслова. Мат. Заметки, 2007, т.82, (5), 792-796.
15. *Жук В.И., Рыжов О.С.* О пограничном слое с самоиндуцированным давлением на движущейся поверхности. Докл. АН СССР, т. 248, N 2, 1979, с. 314 -318.
16. *Краснов Ю.К.* Эволюция смерчей. //Нелинейные волны. Структуры и бифуркации. М.: Наука, 1987, с. 174-189.
17. *Кричевер И.М.* Метод усреднения для двумерных "интегрируемых"уравнений. Функц. анализ и его прилож., 1988, т. 22, вып. 3, с. 37 – 52.
18. *Кузмак Г.Е.* Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с переменными коэффициентами. Прикл. матем. и мех. т. 23 N 3, 1959, с. 730 – 744.
19. *Куликовский А.Г.* Сильные разрывы в течениях сплошных сред и их структура. Труды МИАН им. В.А. Стеклова, т. 182, 1988, с. 261 – 291.
20. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика М., Наука, 1984.
21. *Мак-Лафлин Д., Скотт Э.* Многосолитонная теория возмущений. В кн. "Солитоны в действии" М., Мир, 1981.
22. *Маслов В.П.* Асимптотические методы решения псевдодифференциальных уравнений. М., Наука, 1987, 408 стр. 1987.
23. *Маслов В.П.* Когерентные структуры, резонансы и асимптотическая неединственность для уравнений Навье-Стокса при больших числах Рейнольдса. УМН, 1986, т. 41, N6, с. 19-35.
24. *Маслов В.П., Омельянов Г.А.* Быстроосциллирующие асимптотические решения уравнений МГД в приближении Токамака. ТМФ, т. 92, N 2, 1992, с. 879-895.
25. *Маслов В.П., Омельянов Г.А.* Асимптотические солитонообразные решения уравнений с малой дисперсией. Успехи мат. наук, 1981, т. 36, вып. 3, с. 63-126.
26. *Маслов В.П., Шафаревич А.И.* Ламинарный след в произвольном внешнем потоке. Доклады РАН, т. 356, N 4, 1997, с. 476-480.
27. *Маслов В.П., Шафаревич А.И.* Локализованные асимптотические решения уравнений Навье-Стокса и ламинарные следы в несжимаемой жидкости. Прикл. мат., мех., т. 62, N 3, 1998, 424-432.
28. *Маслов В.П.* Об одной теореме теории множеств. Мат. Заметки, т.78, вып. 6, 2005, 870-877.
29. *Маслов В.П.* Закон "отсутствия предпочтения" и соответствующие распределения в частотной теории вероятностей. Мат. Заметки, т. 80, вып. 2, 2006, 220-230.
30. *Маслов В.П.* Закон Колмогорова и масштабы Колмогорова и Тейлора в анизотропной турбулентности. Препринт ИПМ РАН 506, 1991.
31. *Молотков И.А., Вакуленко С.А.* Сосредоточенные нелинейные волны. Л, Изд-во ЛГУ, 1988.
32. *Олейник О.А., Самохин В.Н.* Математические методы в теории пограничного слоя. М., Наука, 1997.
33. *Пенкин О.М., Покорный Ю.В.* О некоторых качественных свойствах уравнений на одномерном клеточном комплексе. Мат. Заметки, 1996, т. 59, N 5, с. 777-780.
34. *Прандтль Л.* Гидроаэромеханика. М., ИЛ., 1951.
35. *Рыжов О.С., Терентьев Е.Д.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением. Прикл. мат., мех., т. 41, N 6, 1977, с. 1007 – 1023.
36. *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. т. 1-2. М., Наука, 1994.
37. *Темам Р.* Уравнения Навье-Стокса. Теория и численный анализ. М., Мир, 1981.
38. Теория турбулентных струй. Под ред. Г.Н.Абрамовича. М., Наука, 1984.
39. *Уизем Дж.* Линейные и нелинейные волны. М., Мир, 1977.

40. *Шафаревич А.И.* Дифференциальные уравнения на графах, описывающие асимптотические решения уравнений Навье-Стокса, сосредоточенные в малой окрестности кривой. Дифференц. уравнения, т. 34, N 8, 1998, с. 1119 – 1130.
41. *Шафаревич А.И.* Обобщенные уравнения Прандтля-Маслова на графах, описывающие растянутые вихри в несжимаемой жидкости. Доклады РАН, т. 358 N 6, 1998, с. 752-756.
42. *Шафаревич А.И.* Уравнения на графах и асимптотические решения типа "узких струй" системы Навье-Стокса. Успехи мат. наук, т. 53, N 4, 1998, с. 187.
43. *Шафаревич А.И.* Асимптотические решения уравнений Навье-Стокса, описывающие сглаженные тангенциальные разрывы. Мат. Заметки, 2000, т.67(6), 398-949.
44. *S.Yu.Dobrokhotov, A.I.Shafarevich*. Some integral identities and remarks on the decay at infinity of the solution to the Navier-Stokes equation in the entire space. Russian Journal of Math. Phys. v.2, N1, pp. 133-136, 1994.
45. *Flashka H., Forest M., McLaughlin D*. The multiphase averaging and the inverse spectral solution of Korteweg-de Vries equations. Comm. Pure and Appl. Math., 1980, v.33, N 6, p. 739-784.
46. *Fraenkel L.E*. Examples of steady vortex rings of small cross-section in an ideal fluid. J. Fluid Mech., v. 51, 1972, pp. 119 – 135.
47. *Friedman A., Turkington B*. Vortex rings: existence and asymptotic estimates. Trans. Am. Math. Soc., v. 268, 1981, pp. 1 – 37.
48. *Haefliger A., Reeb G*. Varietes (non separees) a une dimension et structures feuilletees du plan. Enseign. Math. 1957, v. 3, pp. 107 – 126.
49. *Maslov V.P., Omel'yanov G.A.* Fluctuation – Generated Tokamak Pinch Instabilities. Russian Journal of Mathematical Physics, v. 2, N 4, 1994, pp. 463-485.
50. *Maslov V.P., Shafarevich A.I.* Rapidly Oscillating Asymptotic Solutions of the Navier-Stokes Equations, Coherent Structures, Fomenko Invariants, Kolmogorov Spectrum, and Flicker Noise. Russian Journal of Mathematical Physics, 2006, v.13, N 4, 414-425.
51. *McLaughlin D.W., Papanicolaou G.C., Pironneau O.R*. Convection of microstructures and related problems. SIAM J. Appl. Math., 1985, v.45, N 5, pp. 780-797.
52. *Moffatt H.K*. Magnetostatic equilibria and analogous Euler flows of arbitrary complex topology. Part 1. Fundamentals. J.Fluid Mech., 1985, v. 159, pp. 359-378.
53. *Moffatt H.K.* On the existence of Euler flows that are topologically accessible from a given flow. Revista Brasiliera de Ciencias Mecanicas IX, 1987, pp. 93-101.
54. *Moffatt H.K*. Generalized vortex rings with and without swirl. Fluid Dynamics Research, Holland, 1988, v.3, pp. 22-30.
55. *Moffatt H.K., Kida S., Ohkitani K.* Stretched vortices – the sinews of turbulence; large-Reynolds-number asymptotics. J. Fluid Mech., 1994, v. 259, pp. 241-264.
56. *Norbury J.* A family of steady vortex rings. J. Fluid mech., v. 57, 1973, p. 417-431.
57. *Prandtl L*. Uber Fliissigkeitsbewegungen bei sehr kleiner Reibung. Verh. Int. Math. Kongr. Heidelberg, 1904 – Teubner, 1905. pp. 484 – 494.
58. *Shafarevich A.I.* Asymptotical and Topological Constructions in Hydrodynamics. Operator Theory: Advances and Applications, v. 132, 347-359.
59. *Shnirelman A.I.* Lattice theory and flows of ideal incompressible fluid. Russian Journal of Mathematical Physics, 1993, v.1, N 1., pp. 105-113.

ASYMPTOTIC SOLUTIONS OF THE NAVIER – STOKES EQUATIONS AND TOPOLOGICAL INVARIANTS OF VECTOR FIELDS AND LIOUVILLE FOLIATIONS

V.P. Maslov, A.I. Shapharevich

Lomonosov Moscow State University

shafarev@yahoo.com

Received 05.09.2012

We construct asymptotic solutions of the Navier – Stokes equations, describing periodic systems of localized vortices in three-dimensional space. We consider the following cases.

1. Localized vortex filaments with their axes forming a two-dimensional surface (a vortex film).
2. System of thin filaments filling three-dimensional volume.
3. Localized point vortices periodically located in a volume.

The solutions are related to topological invariants of divergence-free vector fields and Liouville foliations on a cylinder or a torus. The equations describing the evolution of the vortex system are defined on graph which is the set of trajectories or the set of Liouville tori of a vector field.