

# ФЛУКТУАЦИОННО-ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ДВИЖУЩИХСЯ ТЕЛ

Г.В. Дедков, А.А. Кясов

*Кабардино-Балкарский государственный университет, Нальчик*  
gv\_dedkov@mail.ru

Поступила 01.06.09

В обзоре представлена релятивистская теория флуктуационно-электромагнитного взаимодействия тел, движущихся друг относительно друга, с акцентом на конфигурациях "малая частица - пластина" и "пластина - пластина". Получены фундаментальные выражения для консервативно-диссипативных сил и мощности нагрева движущегося тела в системе отсчета другого (покоящегося) тела. Рассматриваются равновесные и неравновесные тепловые конфигурации. Проводится критический анализ имеющихся в этой области результатов. Обсуждаются недавние эксперименты.

УДК 539.25

## 1. Введение

В наиболее ясной физической форме вопрос о флуктуационно-электромагнитном взаимодействии в сцеплении отдельных молекул и более крупных физических тел был поставлен П.Н. Лебедевым в начале 90-х годов XIX века. Так, в своей работе об исследовании пондеромоторного действия электромагнитных волн на резонаторы он писал [1]: «...Становясь на точку зрения электромагнитной теории света, мы должны утверждать, что между двумя молекулами, как между двумя вибраторами, в которых возбуждены электромагнитные колебания, существуют пондеромоторные силы: они обусловлены электродинамическими взаимодействиями переменных электрических токов в молекулах (по законам Ампера) или переменных зарядов в них (по законам Кулона), мы, следовательно, должны утверждать, что между молекулами в этом случае должны существовать молекулярные силы, причина которых неразрывно связана с процессами лучеиспускания. Наибольший интерес и наибольшую трудность по своей сложности представляет собой

случай, имеющий место в физическом теле, в котором одновременно действуют друг на друга много молекул, причем колебания этих молекул, благодаря их близкому соседству, не независимы друг от друга...»

Понимая всю сложность этой фундаментальной проблемы, П.Н. Лебедев занялся, как он пишет, «простейшей и ближайшей задачей» о действии монохроматической электромагнитной волны на отдельную покоящуюся молекулу в зависимости от частоты поля и резонансной частоты молекулы.

Сегодня, почти 120 лет спустя, взаимодействие электромагнитного излучения с веществом, как и его проявление – флуктуационно-электромагнитное взаимодействие (ФЭВ) конденсированных тел, остаются на переднем крае физических исследований. Только в последние годы по проблеме ФЭВ опубликован ряд обзорных работ [2-11], причем список этот далеко не полон. В современных теоретических и экспериментальных исследованиях акцент направлен на изучение неравновесных и динамических конфигураций.

В общем случае ФЭВ обусловлено квантовыми и тепловыми флуктуациями поляризации и намагниченности конденсированных тел. В случае атомарных частиц, находящихся вне радиуса действия химических сил, взаимодействие между ними осуществляется посредством флуктуаций электрических и магнитных моментов (дипольных и более высокого порядка). К ФЭВ традиционно относятся консервативные силы Ван-дер-Ваальса и Казимира, радиационный теплообмен, а также силы диссипативного характера, возникающие при относительном движении тел, разделенных вакуумным промежутком. Изучение ФЭВ между движущимися телами, в отличие от статического случая [2, 5, 6, 9, 11, 12], обнаруживает много интересных особенностей [4, 7, 8, 10]. Диапазон приложений, связанных с ФЭВ, простирается от физики элементарных частиц и атомной физики до астрофизики и космологии [13-15]. Измерение сил Казимира, в частности, позволяет изучать структуру квантового вакуума и получать ограничения на величину гипотетических дальнедействующих сил, отличных от ньютоновских гравитационных сил [3, 16]. Изучение ФЭВ также стимулируется развитием нанотехнологии, поскольку на микро- и наноскопическом масштабах учет эффектов ФЭВ между отдельными узлами микромашины является необходимым [17, 18].

Исторически почти сразу же после создания теории электромагнитных флуктуаций С.М. Рытовым [19] она была применена к расчету ФЭВ между толстыми покоящимися пластинами (далее конфигурация 2) Е.М. Лифшицем [20]. Конфигурации «малая частица–пластина» (конфигурация 1) с самого начала уделялось значительно меньше внимания, поскольку консервативную силу притяжения частицы к пластине (силу Казимира–Полдера) можно получить предельным переходом к разреженной среде для вещества одной из пластин:  $\varepsilon(\omega) - 1 = 4\pi n\alpha(\omega) \rightarrow 0$  [20, 21] ( $n$  и  $\alpha(\omega)$  – плотность и поляризуемость атомов разреженной среды,  $\varepsilon(\omega)$  – диэлектрическая проницаемость). Это утвердило точку зрения о том, что конфигурация 1 является лишь частным случаем конфигурации 2, даже при рассмотрении неравновесных ситуаций при различии температур тел или при их относительном движении [7, 22, 23]. Вероятно, только этим и объясняется то, что точное решение задачи в рамках конфигурации 1 с учетом всех релятивистских эффектов при  $T_1 \neq T_2$  было получено лишь 50 лет спустя в наших работах [8, 10, 24-26]. Особая роль конфигурации 1, помимо ее большей простоты, связана с предельно ясной физической постановкой задачи (см. далее п.3.1). В отличие от этого и от теории Лифшица–Питаевского для сил Казимира в статическом случае (исключением является так назы-

ваемый «термодинамический парадокс», п.4.2), проблема релятивистского (и неравновесного) решения проблемы ФЭВ в конфигурации 2 продолжает интенсивно дискутироваться (см. далее пп. 2 и 4.7).

Именно по этой причине в центре внимания данного обзора находится конфигурация 1, которой посвящен раздел 3. В разделе 2 дается историческая ретроспектива развития теории ФЭВ в динамических и неравновесных ситуациях. Раздел 4 посвящен конфигурации 2. Наряду с кратким обсуждением классических результатов теории консервативного взаимодействия и теплообмена покоящихся пластин, обсуждаются термически и динамически неравновесные конфигурации, а также релятивистские обобщения теории в совсем недавних работах [23, 27]. В разделе 5 рассматриваются приближенные методы расчета ФЭВ – приближение аддитивности и Дерягина. В разделе 6 кратко обсуждаются недавние экспериментальные результаты, связанные с различными аспектами ФЭВ, а в заключении 7 формулируются краткие выводы. Все формулы записываются в гауссовой системе единиц,  $k_B, \hbar, c$  – постоянные Больцмана, Планка и скорость света в вакууме,  $T$  – абсолютная температура.

## 2. Историческая справка

Развитие теоретических представлений о ФЭВ можно условно разделить на два периода. К наиболее фундаментальным достижениям первого из них относятся теория сил Казимира–Полдера [28,29] и Лифшица [20], а также теория электромагнитных флуктуаций Рытова [19,30]. Их объединяет то, что рассматривалось взаимодействие между покоящимися телами. Детальное изложение соответствующих вопросов отражено в классических обзорах и монографиях (см., например, [12, 21, 31-33]).

Началом второго периода можно считать появление первых работ по диссипативным электромагнитным силам между движущимися телами [34-36]. В них впервые вычислялась «вязкая» сила торможения  $F = -\eta V$ , действующая на атомарную частицу, движущуюся вблизи поверхности поляризующейся среды. Проблема расчета диссипативных сил ФЭВ впервые рассматривалась Теодоровичем (в конфигурации 2) [37, 38], Махантом (в конфигурации 1) [39], Шайхом и Харрисом (в обеих конфигурациях) [40]. И уже эти первые работы продемонстрировали противоречивость получаемых результатов, положив начало длительной теоретической дискуссии (подробнее см. [4,10]), не завершенной вплоть до настоящего времени. Ключевыми вопросами были наличие или отсутствие диссипативных сил при  $T = 0$ , а также их зависимость от скорости и расстояния (в том числе и при  $T \neq 0$ ).

Существенной вехой в этой дискуссии можно считать работу Томассони и Видома [41], в которой было получено правильное выражение для коэффициента трения  $\eta$  силы вакуумного трения, действующей на малую частицу вблизи поверхности в нерелятивистском не запаздывающем пределе. Из [41] следовало, что  $\eta = 0$  при нулевой температуре частицы и поверхности. Правильность формулы Томассони и Видома, однако, была не совсем очевидной, поэтому она не была сразу всеми принята [42].

Первые попытки развития релятивистского подхода к вычислению диссипативной силы  $F_x$  были сделаны авторами [43-45] для конфигурации 2. Из этих работ следовало, что  $F_x = 0$  в пределе  $c \rightarrow \infty$ , что находилось в диссонансе с [41], с работой [46] и с более поздними расчетами в нерелятивистском не запаздывающем пределе [47]. Поскольку в конфигурации 2 нулевое трение в пределе  $c \rightarrow \infty$  было получено также авторами [48], то к

2002-му году ситуация с диссипативными силами ФЭВ представлялась весьма запутанной как для конфигурации 1, так и для конфигурации 2.

Правильность нерелятивистского результата [41] в конфигурации 1 была окончательно установлена в наших работах [8, 10, 24, 25, 50], в которых была разработана последовательная релятивистская теория консервативно-диссипативных сил ФЭВ между движущейся частицей и поверхностью, из которой формула Томассони и Видома вытекает как частный случай, в пределе  $c \rightarrow \infty$  и при одинаковой температуре частицы и поверхности. Применение этого подхода позволило также получить, помимо консервативной силы ФЭВ [51], наиболее общее выражение для диссипативной силы ФЭВ между частицей и «черным» излучением (равновесным газом фотонов в вакууме) [26], а также для скорости теплового нагрева (охлаждения) частицы в фотонном газе и вблизи нагретой поверхности [8, 10, 52]. Затем в работах [53], используя соответствие между конфигурациями 1 и 2, были впервые получены самосогласованные (между обеими конфигурациями) выражения для сил ФЭВ и скорости теплообмена двух движущихся с нерелятивистской относительной скоростью пластин без учета запаздывания (при различной температуре пластин), и с учетом запаздывания – при тепловом равновесии.

Для конфигурации 2 строго релятивистское решение с различными температурами пластин и вакуумного фона пока отсутствует. Общим методом вычисления диссипативной тангенциальной силы ФЭВ является расчет статистически усредненной компоненты  $\langle \sigma_{xz} \rangle$  тензора натяжений электромагнитного поля в зазоре, порождаемого случайными источниками электромагнитного поля в пластинах, имеющих, в общем случае, разные температуры. При вычислении консервативных сил Казимира этим методом, аналогично вычисляется усредненная тензорная компонента  $\langle \sigma_{zz} \rangle$ . Но для практической реализации данного подхода должна быть решена регулярная электродинамическая задача по нахождению электромагнитного поля в вакуумном зазоре с учетом релятивистского движения второй пластины. Детального обсуждения и решения такой задачи до последнего времени не было, хотя подобные попытки и предпринимались несколькими авторами [43, 44]. Варианты решения, предложенные в [7, 22, 47], не являются удовлетворительными, поскольку в главных своих чертах основываются либо на приближенном эвристическом подходе [46, 54], либо на динамической модификации теории Лифшица для консервативных сил, в которой в операторы электромагнитного поля искусственно вводятся доплеровские частотные сдвиги, обусловленные движением одной из пластин. Такой подход ранее использовался Теодоровичем [37, 38], и критикуется самими авторами [7, 22, 47]. Нерелятивистский эвристический подход [46, 54], являясь физически наглядным, не является общим, а динамическая модификация теории Лифшица [47], хотя и учитывает эффекты запаздывания, не является строго релятивистской, поскольку в ней отбрасывается ряд членов в лоренцевых преобразованиях амплитуд поля, и в ходе расчета делаются дополнительные упрощения. Приближенный характер теории диссипативных сил ФЭВ [7, 22, 46, 47] не позволяет рассматривать ее в качестве адекватной основы для осуществления корректного предельного перехода к конфигурации 1. Как показано нами в [53, 55], даже при вычислении консервативной силы Казимира в статическом случае, предельный переход к разреженной среде, вообще говоря, не всегда является вполне адекватным. Не выдерживает критики и последнее релятивистское обобщение теории ФЭВ Волокитина и Перссона [23], имеющее ряд недостатков катастрофического характера (см. [53] и п.4.8).

Противоречивость релятивистской проблемы в конфигурации 2 еще более обострилась после работ [27], в которых была получена нулевая диссипативная сила в случае ну-

левой температуры пластин и вакуума. Это в корне противоречит результатам [7, 22, 23, 46, 47]. Основываясь на своем решении в случае конфигурации 2, авторы [27] отрицают также и существование отличной от нуля диссипативной силы (в холодном случае) для конфигурации 1, что противоречит как нашим работам [24, 25, 49-53], так и работам других авторов [7, 22, 46, 47]. Принципиальным здесь является вопрос о наличии или отсутствии «вязкости» холодного вакуума в присутствии пластины для других движущихся тел. В безграничном холодном вакуумном фоне равномерно движущееся холодное тело не должно испытывать диссипативной силы. Это, в частности, подтверждается нашими результатами [26], и физически обусловлено релятивистской инвариантностью вакуумных электромагнитных мод. Электромагнитное поле вблизи пластины не обладает релятивистской инвариантностью, поэтому торможение равномерно движущегося тела вблизи пластины при нулевой температуре всей системы не противоречит принципу относительности. Отсутствие диссипативных сил в холодном случае в конфигурации 2 следует также из работы Бартона [56], но ее специфика состоит в том, что вещество пластин предполагается прозрачным по отношению к излучению, т.е. не обладающим поглощающими свойствами.

Другим аспектом проблемы ФЭВ является вакуумный теплообмен между движущимися, в общем случае, телами. В статической конфигурации этот вопрос исследовался еще в работах С.М. Рытова с сотрудниками [19, 57, 58], и далее, в стандартной конфигурации 2, - в работах [59-64]. В статической конфигурации 1 вопрос рассматривался в работах [7, 22, 54, 64-66]. В отличие от них, в наших работах [4, 8, 10, 52, 53] вопрос теплообмена с самого начала анализировался как составная часть общей проблемы ФЭВ с учетом динамических эффектов. Для этого было необходимо установить связь между интегралом диссипации электромагнитного поля в объеме частицы, ее скоростью нагрева и мощностью диссипативной силы в системе отсчета покоящейся пластины [4, 8, 10, 24, 25].

Сравнительно недавно начал интенсивно обсуждаться вопрос о неравновесных силах Казимира–Лифшица в статических конфигурациях 1 и 2: в работах [67-72] в первом и [73,74] – во втором случае. Так, в работе [68] было получено выражение для неравновесной силы Казимира–Полдера, действующей на холодную частицу (атом), находящуюся вблизи нагретой пластины, температура которой отличается от температуры вакуумного фона, определяемой внешним окружением. Частица предполагалась не поглощающей излучение. Результаты [68] нашли экспериментальное подтверждение при измерении частоты осцилляций бозе-эйнштейновского конденсата атомов  $^{87}\text{Rb}$ , находящегося в магнитной ловушке вблизи диэлектрической пластины  $\text{SiO}_2$  [75]. Но из наших работ [4, 10, 70, 71] следует, что даже при тепловом равновесии вакуумного фона и нагретой пластины ситуация для холодной частицы (атома) является неравновесной, поскольку имеется конечная скорость нагрева частицы. Поглощаемая энергия может вызывать сдвиг уровней энергии атома. К аналогичному выводу пришли и авторы [69], обсуждавшие вопрос о внутренней динамике атома в основном состоянии, находящегося в тепловом поле нагретого тела. Подобные термические сдвиги атомных уровней наблюдались спектроскопическими методами, например, в экспериментах [76, 77].

В связи с консервативными силами Казимира большой резонанс вызвали вопросы о так называемом «термодинамическом парадоксе» теории Лифшица для тепловых вкладов [6, 78-86] (см. п.4.2) и о точности локально-плоского приближения Дерягина [87] (см. [88-93] и п.5).

Обширный круг вопросов теоретического и экспериментального характера, находящихся на переднем крае исследований, связанных с ФЭВ, касается структуры электромагнитного поля вблизи нагретых поверхностей [94-96] и его влияния на процессы испускания и поглощения частиц (подробнее см. обзоры [5,11] и соотв. литературу). В частности, ряд исследований прикладного характера связан с прохождением и излучением нейтральных атомных частиц в микрощелях и капиллярных структурах [97-100], атомными ловушками [101-105], взаимодействием магнито-диэлектрических тел [106-110]. Библиографию по этим и другим аспектам ФЭВ можно найти в обзоре [111].

Начальный этап экспериментальных исследований в области ФЭВ был связан существенным образом с работами Дерягина с сотрудниками [112]. За последние 10 лет по многим вопросам был достигнут значительный прогресс. Это касается, в первую очередь, прецизионных измерений сил Казимира в хорошо контролируемых условиях [75, 113-122]. Экспериментов по диссипативным силам ФЭВ [123-127] и теплообмену [128-131] (см. также [132,133]) пока значительно меньше.

Достижения в теоретических и экспериментальных исследованиях ФЭВ, в конечном итоге, находят многочисленные применения в интенсивно развивающихся направлениях микро- и нанотехнологии. Прогресс в области искусственных и биологических наноструктур неизбежно связан с изучением электромагнитных и флуктуационно-электромагнитных взаимодействий. Мы уже упоминали о приложениях теории ФЭВ к микро-электромеханическим системам [17, 18]. Изучение и изготовление наноструктур сегодня невозможно представить без сканирующих зондовых микроскопов (СЗМ), однако понимание и интерпретация взаимодействий зондов СЗМ с образцами в значительной мере опирается именно на результаты теории ФЭВ. Это касается силовых взаимодействий, термических и оптических эффектов, возникающих в контактах зондов с поверхностями. Детальное изложение этих и сопутствующих вопросов, а также обширная библиография имеется в обзорных статьях [33, 111, 131-136].

### **3. Флуктуационно-электромагнитное взаимодействие в конфигурации 1 (малая частица - пластина)**

#### **3.1. Постановка задачи и ее отличие от постановки в конфигурации 2 (пластина – пластина)**

В конфигурации 1 (рис. 1) будем рассматривать сферическую частицу радиуса  $R$ , движущуюся с постоянной скоростью  $V$  параллельно поверхности покоящейся пластины на расстоянии  $z \gg R$  от нее. Предполагаем, что частица имеет температуру  $T_1$  (в собственной системе покоя), а пластина и окружающий вакуумный фон – температуру  $T_2$ . Частица характеризуется зависящими от частоты дипольными электрической  $\alpha_e(\omega)$  и магнитной  $\alpha_m(\omega)$  поляризуемостями, а пластина – диэлектрической  $\varepsilon(\omega)$  и магнитной  $\mu(\omega)$  проницаемостями. Вещественная и мнимая компоненты поляризуемостей обозначаются в формулах одним и двумя штрихами. В целом рассматриваемая система термически неравновесна, но стационарна. Основными характеристиками ФЭВ являются компоненты флуктуационно-электромагнитной силы  $F_x, F_z$ , действующей на частицу, и скорость ее теплового нагрева  $dQ/dt$ . Все указанные величины определяются в системе отсчета, связанной с покоящейся пластиной.

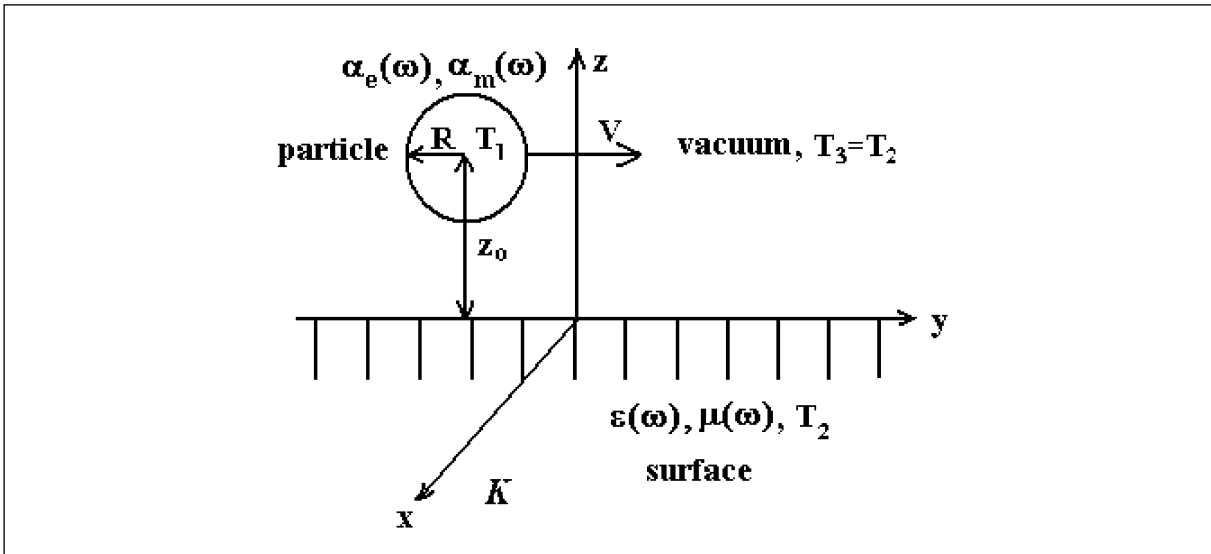


Рис. 1. Конфигурация 1. Геометрия движения сферической частицы и декартова система координат, связанная с поверхностью полубесконечной среды (система  $\Sigma$ ). Декартовы оси  $(x', y', z')$  собственной системы покоя частицы  $\Sigma'$  не показаны

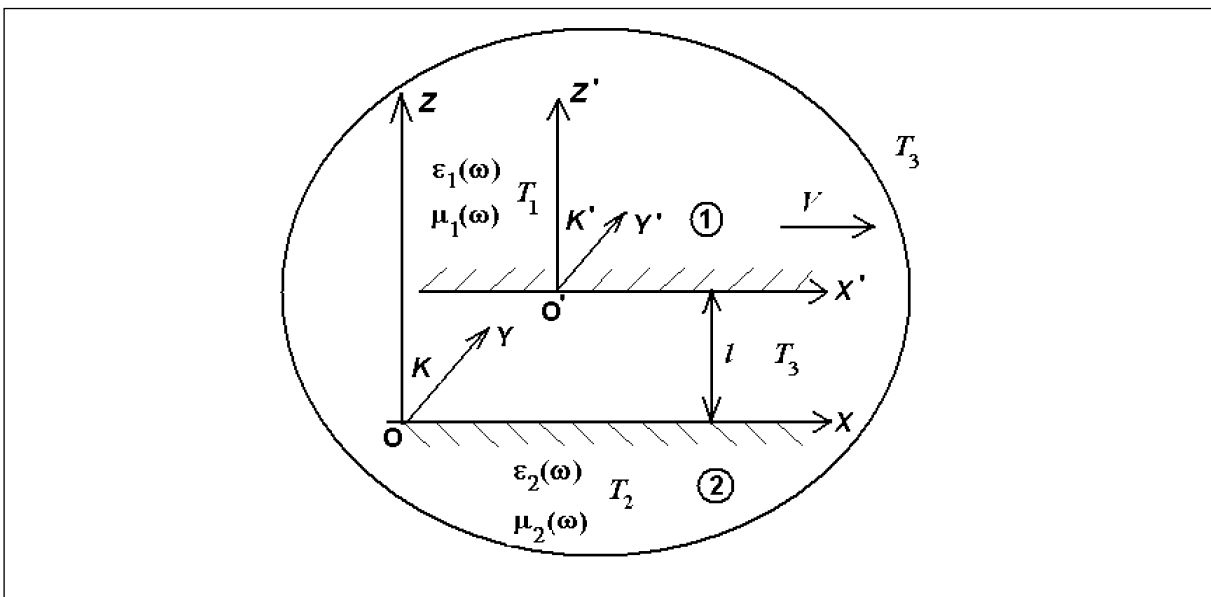


Рис. 2. Конфигурация 2, соответствующая протяженным толстым пластинам 1 и 2 с температурами  $T_1$  и  $T_2$  (в системе покоя каждой), соответственно.  $\Sigma$  и  $\Sigma'$  – соответствующие декартовы системы координат. Окружающий вакуумный фон, в общем случае, может иметь температуру  $T_3$ , отличающуюся от температур пластин

Важным преимуществом постановки общей релятивистской задачи в рамках конфигурации 1 является то, что наличие вакуумного фона в этом случае предполагается с самого начала, причем имеется только одно протяженное тело (пластина), покоящееся относительно вакуумного фона. Малая частица, движущаяся относительно пластины, движется также и по отношению к вакуумному фону, а пластина может находиться, а может и не находиться в тепловом равновесии с фоном. В обоих указанных случаях структура электромагнитного поля вблизи пластины определяется однозначным образом. Корректный учет вакуумного фона позволяет получить физически корректное решение данной

задачи в пределе  $z \rightarrow \infty$ , когда влияние нагретой пластины на частицу становится пренебрежимо малым.

Конфигурация 2 (пластина – пластина), показанная на рис. 2, является классической конфигурацией, рассматривавшейся впервые Казимиром [28, 29] и Лифшицем [20] в основополагающих работах по вычислению консервативных сил ФЭВ между покоящимися однородными полупространствами, разделенными плоской вакуумной щелью. В этих работах постулировалось наличие полного термодинамического равновесия.

Однако в динамической ситуации постановка задачи в конфигурации 2, в отличие от конфигурации 1, должна быть более рафинированной, даже при наличии в системе полного теплового равновесия:  $T_1 = T_2 = T_3$  (см. рис. 2), поскольку только одна из пластин может покоиться относительно вакуумного фона, а вторая должна испытывать с его стороны тормозящую силу. Очевидно, что имеющаяся специфика вакуумного фона усложняет ультрарелятивистскую проблему. Как следствие этого, предельный переход к разреженной среде для вещества одной из пластин, с помощью которого в статическом случае можно вычислить силу Казимира–Полдера между частицей (атомом) и пластиной [20, 21], не обеспечивает, вообще говоря, адекватного решения проблемы в конфигурации 1 [53, 55]. Именно это обстоятельство побуждает нас рассматривать конфигурацию 1 как имеющую принципиально самостоятельное значение, а результаты, полученные для нее, как «эталонные».

### 3.2. Общие выражения для пондеромоторных сил и скорости теплового нагрева дипольной частицы, движущейся в электромагнитном поле

Пусть на частицу действует электромагнитное поле, создаваемое внешними источниками (лазерным излучением, квазистатическими полями) или полями флуктуационного происхождения от нагретой среды и (или) от равновесного вакуумного фона (фотонного газа). Компоненты  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  электромагнитного поля должны удовлетворять уравнениям Максвелла с учетом выполнения необходимых граничных условий. Хотя в дальнейшем рассматривается параллельное к поверхности движение частицы (см. рис. 1), все формулы данного раздела оказываются справедливы и в случае произвольного направления скорости  $\mathbf{V}$ .

Запишем общее выражение для электромагнитной силы Лоренца, действующей на частицу: (все величины отнесены к лабораторной системе отсчета, связанной с пластиной)

$$\mathbf{F} = \int \rho \mathbf{E} d^3r + \frac{1}{c} \int \mathbf{j} \times \mathbf{B} d^3r, \quad (3.1)$$

где  $\rho$  и  $\mathbf{j}$  – локальные плотности электрического заряда и тока, а интегралы берутся по объему частицы. В том случае, когда входящие в (3.1) величины имеют флуктуационное происхождение, подынтегральные выражения необходимо подвергнуть статистическому усреднению. Будем характеризовать малую частицу векторными операторами дипольного электрического и (или) магнитного момента  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{m}$ . Для классических тепловых флуктуаций,  $k_B T \gg \hbar \omega_0$ , операторы  $\mathbf{d}(t)$ ,  $\mathbf{m}(t)$  – случайные функции времени, а в случае квантовых флуктуаций – квантовомеханические операторы в гейзенберговском представлении. В обоих случаях  $\langle \mathbf{d}(t) \rangle = 0$ ,  $\langle \mathbf{m}(t) \rangle = 0$ , но  $\langle \mathbf{d}(t)^2 \rangle \neq 0$ ,  $\langle \mathbf{m}^2(t) \rangle \neq 0$ . Если же  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{m}$  обусловлены внешними электромагнитными полями (лазерное излучение, постоянные поля и т.д.), то зависимости  $\mathbf{d}(t)$ ,  $\mathbf{m}(t)$  от времени определяются соответствующими зависимостями внешних полей. В рамках дипольного приближения  $R/z \ll 1$  (см. рис.1) векторы электри-



ческой и магнитной поляризации, создаваемые частицей, движущейся со скоростью  $\mathbf{V}$ , записываются в виде:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{d}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{V}t), \quad (3.2)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{m}(t)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{V}t). \quad (3.3)$$

Если скорость  $\mathbf{V}$  направлена вдоль оси  $x$ , то дельта-функции, входящие в (3.2), (3.3), раскрываются как

$$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{V}t) = \delta(x - Vt)\delta(y)\delta(z - z_0). \quad (3.4)$$

Принимая во внимание (3.2) - (3.3), для плотностей заряда и тока будем иметь

$$\rho = -\text{div}\mathbf{P}, \quad \mathbf{j} = \frac{\partial\mathbf{P}}{\partial t} + c \cdot \text{rot}\mathbf{M}. \quad (3.5)$$

Учитывая уравнения Максвелла  $\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ ,  $\text{div}\mathbf{B} = 0$ , и подставляя (3.5) в (3.1), после несложного интегрирования формула (3.1) преобразуется к виду:

$$\mathbf{F} = \nabla(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{d} \times \mathbf{B}) + \frac{1}{c}(\mathbf{V}\nabla)(\mathbf{d} \times \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) + \frac{1}{c}\frac{d}{dt}(\mathbf{d} \times \mathbf{B}). \quad (3.6)$$

В случае стационарных флуктуаций [21], который в дальнейшем нас интересует в данной работе, порядок дифференцирования по времени во втором слагаемом (3.6) и необходимого статистического усреднения можно поменять местами, и тогда, учитывая, что

$\left\langle \frac{d}{dt}(\mathbf{d} \times \mathbf{B}) \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle \mathbf{d} \times \mathbf{B} \rangle = 0$ , формула (3.6) принимает вид:

$$\mathbf{F} = \langle \nabla(\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) \rangle. \quad (3.7)$$

Обратимся к расчету скорости теплового нагрева частицы. Очевидно, что в ее системе покоя скорость нагрева определяется интегралом джоулевых потерь

$$\frac{dQ'}{dt'} = \int \langle \mathbf{j}' \cdot \mathbf{E}' \rangle d^3r'. \quad (3.8)$$

Выполняя в подынтегральном выражении (3.8) стандартные релятивистские преобразования плотности тока, электрического поля и объема [8, 10, 24, 25]), и учитывая (3.7), получим

$$\int \langle \mathbf{j}' \cdot \mathbf{E}' \rangle d^3r' = \gamma^2 \left( \int \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle d^3r - \mathbf{F} \cdot \mathbf{V} \right), \quad (3.9)$$

где  $\gamma = (1 - V^2 / c^2)^{-1/2}$  – фактор Лоренца.

В рамках релятивистской термодинамики в формулировке Планка [138] выполняется соотношение  $dQ' / dt' = \gamma^2 dQ / dt$ , поэтому из (3.8) и (3.9) следует:

$$\int \langle \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} \rangle d^3r = \frac{dQ}{dt} + \mathbf{F} \cdot \mathbf{V}. \quad (3.10)$$

Тождество (10) может служить определением скорости нагрева частицы  $dQ / dt$  в лабораторной системе отсчета, но для дальнейшего целесообразно получить более простое выражение. Для этой цели, используя (3.2)-(3.5) и уравнение  $\text{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$ , интеграл джоулевых потерь в (3.10) преобразуем к виду (точки над векторами  $\mathbf{d}, \mathbf{m}$  обозначают дифференцирование по времени):

$$\begin{aligned}
\int \mathbf{j} \cdot \mathbf{E} d^3r &= \int \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \cdot \mathbf{E} d^3r + c \int \text{rot} \mathbf{M} \cdot \mathbf{E} d^3r = \\
&= (\dot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E} + \dot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{V} \cdot \nabla (\mathbf{d} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) - \frac{d}{dt} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) = \\
&= (\dot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E} + \dot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{B}) + \mathbf{V} \cdot \mathbf{F} - \frac{d}{dt} (\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}) - \frac{\mathbf{V}}{c} \frac{d}{dt} \mathbf{d} \times \mathbf{B}
\end{aligned} \tag{3.11}$$

В случае стационарных флуктуаций входящих в (3.11) величин, последние два слагаемых при усреднении обратятся в нуль, поэтому, с учетом (3.10), получим:

$$dQ/dt = \langle \dot{\mathbf{d}} \cdot \mathbf{E} + \dot{\mathbf{m}} \cdot \mathbf{B} \rangle. \tag{3.12}$$

Формулы (3.7) и (3.12) максимально удобны для расчета сил и нагрева частицы, движущейся во флуктуационном электромагнитном поле нагретых тел. При этом, в соответствии с применяемым методом расчета [8, 10, 24-26], слагаемые в правой части (3.7), (3.12) должны представляться суммами попарных произведений спонтанных и индуцированных компонент флуктуирующих величин:

$$\mathbf{F} = \langle \nabla (\mathbf{d}^{\text{sp}} \cdot \mathbf{E}^{\text{ind}} + \mathbf{d}^{\text{ind}} \cdot \mathbf{E}^{\text{sp}} + \mathbf{m}^{\text{sp}} \cdot \mathbf{B}^{\text{ind}} + \mathbf{m}^{\text{ind}} \cdot \mathbf{B}^{\text{sp}}) \rangle; \tag{3.13}$$

$$dQ/dt = \langle \dot{\mathbf{d}}^{\text{sp}} \cdot \mathbf{E}^{\text{ind}} + \dot{\mathbf{d}}^{\text{ind}} \cdot \mathbf{E}^{\text{sp}} + \dot{\mathbf{m}}^{\text{sp}} \cdot \mathbf{B}^{\text{ind}} + \dot{\mathbf{m}}^{\text{ind}} \cdot \mathbf{B}^{\text{sp}} \rangle. \tag{3.14}$$

Отсутствие взаимной корреляции флуктуационных полей нагретой пластины и прилегающего к ней равновесного вакуумного фона позволяет находить их вклады в (3.13), (3.14) по отдельности [26, 96].

### 3.3. Метод расчета сил ФЭВ и теплового нагрева

Основываясь на формулах (3.13), (3.14), процедуру вычисления сил ФЭВ и теплового нагрева частицы можно свести к последовательности нескольких стандартных, хотя и достаточно трудоемких этапов.

1. Фигурирующие в правых частях формул (3.13), (3.14) векторные величины разлагаются в интегралы Фурье по частоте и двумерному волновому вектору  $\mathbf{k}$ , параллельному поверхности пластины. Еще раз отметим, что все величины определяются в системе отсчета  $\Sigma$  покоящейся пластины.

2. Решается общая электродинамическая задача, связанная с нахождением полей, индуцированных в пластине флуктуирующими дипольными моментами движущейся частицы. При этом, в соответствии с формулами (3.2)-(3.4), для нахождения Фурье-компонент векторов поляризации  $\mathbf{P}_{\omega\mathbf{k}}$  и намагниченности  $\mathbf{M}_{\omega\mathbf{k}}$  необходимо получить выражения для спонтанных моментов частицы  $\mathbf{d}^{\text{sp}}(t)$ ,  $\mathbf{m}^{\text{sp}}(t)$  в системе  $\Sigma$ , связанной с неподвижной пластиной, используя релятивистские преобразования этих величин из системы покоя частицы  $\Sigma'$  в систему  $\Sigma$  [10]:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}' + \frac{1}{c} [\mathbf{V} \mathbf{m}'] - \frac{(\gamma-1) \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{d}')}{V^2}; \tag{3.15}$$

$$\mathbf{m} = \mathbf{m}' - \frac{1}{c} [\mathbf{V} \mathbf{d}'] - \frac{(\gamma-1) \mathbf{V} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{m}')}{V^2}. \tag{3.16}$$

При нахождении Фурье-разложений  $\mathbf{d}^{\text{sp}}(t)$ ,  $\mathbf{m}^{\text{sp}}(t)$  сначала записываются Фурье-разложения  $\mathbf{d}^{\text{sp}}(t')$ ,  $\mathbf{m}^{\text{sp}}(t')$  в системе покоя частицы  $\Sigma'$ , причем частота  $\omega'$  и время  $t'$

выражаются через  $\omega$  и  $t$  лабораторной системы  $\Sigma$ , а затем полученные соотношения подставляются в (3.15), (3.16). Определение компонент индуцированных полей  $\mathbf{E}^{\text{ind}}, \mathbf{B}^{\text{ind}}$ , генерируемых движущейся частицей, основано на решении системы уравнений для Фурье-компонент векторов Герца:

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mu(\omega) \right) \Pi^e_{\omega \mathbf{k}} = -\frac{4\pi}{\varepsilon(\omega)} \mathbf{P}_{\omega \mathbf{k}} ; \quad (3.17)$$

$$\left( \Delta + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mu(\omega) \right) \Pi^m_{\omega \mathbf{k}} = -\frac{4\pi}{\mu(\omega)} \mathbf{M}_{\omega \mathbf{k}} . \quad (3.18)$$

Необходимые граничные условия для  $\Pi^e_{\omega \mathbf{k}}$  и  $\Pi^m_{\omega \mathbf{k}}$  вытекают из условий непрерывности тангенциальных составляющих  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  на поверхности  $z = 0$  [24-26]. В случае взаимодействия с вакуумным фоном используется трехмерное Фурье-разложение по вектору  $\mathbf{k}$ , и уравнения (3.17), (3.18) становятся алгебраическими. После нахождения Фурье-компонент векторов Герца из (3.17), (3.18) Фурье-компоненты поля определяются по формулам [139]:

$$\mathbf{E}_{\omega \mathbf{k}} = \text{graddiv} \Pi^e_{\omega \mathbf{k}} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mu(\omega) \Pi^e_{\omega \mathbf{k}} + \frac{i\omega}{c} \mu(\omega) \text{rot} \Pi^m_{\omega \mathbf{k}} ; \quad (3.19)$$

$$\mathbf{H}_{\omega \mathbf{k}} = \text{graddiv} \Pi^m_{\omega \mathbf{k}} + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\omega) \mu(\omega) \Pi^m_{\omega \mathbf{k}} - \frac{i\omega}{c} \varepsilon(\omega) \text{rot} \Pi^e_{\omega \mathbf{k}} . \quad (3.20)$$

3. Находятся статистические средние, обусловленные взаимодействием спонтанных моментов частицы с индуцированными полями пластины. Возникающие при статистическом усреднении корреляторы дипольных моментов частицы раскрываются с помощью флуктуационно – диссипационных соотношений, взятых в системе покоя частицы  $\Sigma'$  [140]:

$$\left\langle d_i^{\text{sp}}(\omega) d_k^{\text{sp}}(\omega') \right\rangle = 2\pi \delta_{ik} \delta(\omega + \omega') \hbar \alpha_e''(\omega) \coth \frac{\hbar \omega}{2k_B T_1} ; \quad (3.21)$$

$$\left\langle m_i^{\text{sp}}(\omega) m_k^{\text{sp}}(\omega') \right\rangle = 2\pi \delta_{ik} (\omega + \omega') \hbar \alpha_m''(\omega) \coth \frac{\hbar \omega}{2k_B T_1} , \quad (3.22)$$

где  $\alpha_{e,m}''(\omega)$  – мнимые компоненты электрической и магнитной поляризуемости.

4. Вычисляются индуцированные моменты частицы в системе  $\Sigma$ . Для этого сначала дипольные моменты частицы в системе отсчета  $\Sigma'$  выражаются через флуктуационные поля среды, заданные в той же системе посредством интегральных соотношений, обусловленных временной дисперсией [137]:

$$\mathbf{d}^{\text{ind}}(t') = \int_{-\infty}^{t'} \alpha_e(t' - \tau') \mathbf{E}^{\text{sp}}(\mathbf{r}'; \tau') d\tau' , \quad (3.23)$$

$$\mathbf{m}^{\text{ind}}(t') = \int_{-\infty}^{t'} \alpha_m(t' - \tau') \mathbf{H}^{\text{sp}}(\mathbf{r}'; \tau') d\tau' . \quad (3.24)$$

Индуцированные моменты в системе  $\Sigma$  находятся с помощью релятивистских преобразований полей в подынтегральных выражениях (3.23), (3.24) и последующей подстановки в (3.15) (3.16).

5. Вычисляются статистические средние, обусловленные взаимодействием индуцированных моментов частицы с флуктуационными полями пластины. Возникающие корреляторы Фурье-компонент электрического и магнитного поля выражаются через соответствующие спектральные плотности посредством соотношений, вытекающих из условия стационарности электромагнитных флуктуаций [21]:

$$\langle U_i^{sp} V_j^{sp} \rangle_{\omega \mathbf{k}} = (2\pi)^4 \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}') \left( U_i^{sp} V_j^{sp} \right)_{\omega \mathbf{k}}, \quad (3.25)$$

где  $U_i^{sp}, V_i^{sp} = E_i^{sp}, B_i^{sp}$  ( $i, j = x, y, z$ ).

В свою очередь, входящие в (3.25) спектральные плотности компонент поля выражаются через спектральные компоненты запаздывающей функции Грина в однородной и изотропной немагнитоактивной среде с помощью соотношений [21]:

$$\left( E_i^{sp} E_k^{sp} \right)_{\omega \mathbf{k}} = -\coth \frac{\hbar \omega}{2k_B T} \frac{\omega^2}{c^2} \text{Im} D_{ik}(\omega, \mathbf{k}); \quad (3.26)$$

$$\left( B_i^{sp} B_k^{sp} \right)_{\omega \mathbf{k}} = -\coth \frac{\hbar \omega}{2k_B T} \text{rot}_{i1} \text{rot}'_{k_m} \text{Im} D_{lm}(\omega, \mathbf{k}); \quad (3.27)$$

$$\left( E_i^{sp} B_k^{sp} \right)_{\omega \mathbf{k}} = -\coth \frac{\hbar \omega}{2k_B T} \frac{i\omega}{c} \text{rot}'_{k_m} \text{Im} D_{lm}(\omega, \mathbf{k}). \quad (3.28)$$

В более сложных случаях вместо  $\text{Im} D_{lm}(\omega, \mathbf{k})$  в (3.26)-(3.28) фигурирует антиэрмитова часть  $D_{lm}(\omega, \mathbf{k})$ . Полная сводка выражений для спектральных компонент запаздывающей функции Грина, включающей ее вакуумную и поверхностную составляющие для системы пластина – вакуумный фон при тепловом равновесии между ними, приводится в [10]. В этой же работе приведены выражения для проекций спонтанных и индуцированных дипольных моментов частицы в системе  $\Sigma$ . Выражения для проекций Фурье-компонент векторов Герца, индуцированных частицей в пластине и в вакуумном фоне, переход к которому делается с использованием известного правила [21]  $\mu(\omega) = 1, \varepsilon(\omega) = 1 + i \cdot \delta \cdot \text{sign}(\omega), \delta \rightarrow 0$ , получены в работах [10,26], а в [24, 25] – выражения для проекций Фурье-компонент индуцированного электрического и магнитного поля пластины, полученных с помощью уравнений (3.17)-(3.20).

6. На основании результатов пп.3 и 5 находятся результирующие выражения для сил ФЭВ и скорости нагрева частицы.

### 3.4. Структура флуктуационного электромагнитного поля вблизи нагретой пластины

Структура флуктуационного электромагнитного поля вблизи поверхности нагретой пластины, находящейся в тепловом равновесии с вакуумным фоном (фотонным газом) определяется спектральными плотностями электрического и магнитного поля  $(\mathbf{E}^2)_{\omega \mathbf{k}}, (\mathbf{B}^2)_{\omega \mathbf{k}}$ , которые находятся с помощью формул (3.26)-(3.28). В рассматриваемом случае, используя известные компоненты запаздывающей функции Грина [10], спектральные плотности определяются соотношениями [96]:

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}^2)_{\omega \mathbf{k}} &= \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \hbar \coth \left( \frac{\hbar \omega}{2k_B T} \right) \text{Im} \left( \frac{1}{q_0} \right) + \\ &+ 2\pi \hbar \coth \left( \frac{\hbar \omega}{2k_B T} \right) \text{Im} \left\{ \frac{\exp(-2q_0 z)}{q_0} \left[ (2k^2 - \omega^2 / c^2) \Delta_e(\omega) + (\omega^2 / c^2) \Delta_m(\omega) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.29)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}^2)_{\omega \mathbf{k}} &= \frac{4\pi\omega^2}{c^2} \hbar \coth \left( \frac{\hbar \omega}{2k_B T} \right) \text{Im} \left( \frac{1}{q_0} \right) + \\ &+ 2\pi \hbar \coth \left( \frac{\hbar \omega}{2k_B T} \right) \text{Im} \left\{ \frac{\exp(-2q_0 z)}{q_0} \left[ (2k^2 - \omega^2 / c^2) \Delta_m(\omega) + (\omega^2 / c^2) \Delta_e(\omega) \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\Delta_e(\omega) = \frac{q_0 \mathcal{E}(\omega) - q}{q_0 \mathcal{E}(\omega) + q}, \quad \Delta_m(\omega) = \frac{q_0 \mu(\omega) - q}{q_0 \mu(\omega) + q}, \quad q = (k^2 - (\omega^2 / c^2) \mathcal{E}(\omega) \mu(\omega))^{1/2}, \quad (3.31)$$

$$q_0 = (k^2 - \omega^2 / c^2)^{1/2}, \quad k^2 = k_x^2 + k_y^2$$

Первые слагаемые в правых частях (3.29) и (3.30) описывают вклад вакуумных мод с температурой  $T$ , а вторые слагаемые – вклад нагретой поверхности. С учетом (3.29), (3.30) спектральная плотность энергии флуктуационного электромагнитного поля над пластиной равна [96]

$$\rho(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_x}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_y}{2\pi} \left[ \frac{(\mathbf{E}^2)_{\omega \mathbf{k}} + (\mathbf{B}^2)_{\omega \mathbf{k}}}{8\pi} \right] = \frac{\hbar \omega^3}{\pi^2 c^3} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1} \right) +$$

$$+ \frac{\hbar}{4\pi^2} \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T}\right) \int_0^{\omega/c} dk k^3 \operatorname{Re} \left[ \frac{\exp(2i|q_0|z)}{|q_0|} (\Delta_e(\omega) + \Delta_m(\omega)) \right] +$$

$$+ \frac{\hbar}{4\pi^2} \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T}\right) \int_{\omega/c}^{\infty} dk k^3 \operatorname{Im} \left[ \frac{\exp(-2q_0 z)}{q_0} (\Delta_e(\omega) + \Delta_m(\omega)) \right] \quad (3.32)$$

Как видно из (3.32), функция  $\rho(\omega)$  включает вакуумную часть, в которую входят моды нулевых колебаний и черное излучение, и поверхностную часть, зависящую от расстояния до пластины, включающую сумму вкладов радиационных и нерадиационных (ближнеполевых) поверхностных мод. Вклад мод ближнего поля с волновыми векторами  $k > \omega/c$  экспоненциально убывает с увеличением расстояния  $z$  до поверхности по закону  $\exp(-2q_0 z)$ . В отличие от этого, вклад поверхностно-волновых мод с волновыми векторами  $k < \omega/c$  зависит от расстояния как  $\exp(2i|q_0|z)$ , поэтому  $\rho(\omega)$  в вакуумной области над поверхностью пластины на достаточно больших расстояниях носит осциллирующий характер. Наличие пространственных осцилляций характерно для картины стоячих волн в системе «пластина – вакуум» при отсутствии переноса энергии электромагнитного излучения. Это подтверждает прямое вычисление статистически усредненного вектора Пойнтинга для потока энергии от пластины, который оказывается равным нулю, как и следует ожидать при тепловом равновесии пластины и вакуумного фона. В отсутствие же равновесия структура флуктуационного электромагнитного поля принципиально изменяется. Так, хорошо известное выражение для  $\rho(\omega)$  нагретой пластины с температурой  $T$ , граничащей с холодным вакуумным фоном ( $T = 0$ ), полученное Левиным и Рытовым [58], в наших обозначениях имеет вид:

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar}{4\pi^2} \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T}\right) \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\omega^2}{2c^2} \int_0^{\omega/c} \frac{dk \cdot k}{|q_0|} (2 - |\Delta_e|^2 - |\Delta_m|^2) + \\ + \int_{\omega/c}^{\infty} dk \cdot k^3 \operatorname{Im} \left[ \frac{\exp(-2q_0 z)}{q_0} (\Delta_e + \Delta_m) \right] \end{array} \right\}. \quad (3.33)$$

Из сравнения формул (3.33) и (3.32) следует, что они отличаются только вкладом радиационных мод: в формуле (3.33) он определяется первым интегральным слагаемым, не зависящим от расстояния до пластины. В неравновесном случае картина стоячих поверхностно-волновых мод в системе «пластина – вакуум» заменяется картиной бегущих волн с ненулевым вектором Пойнтинга, направленным от пластины. В частности, для черной пластины ( $\Delta_e = \Delta_m = 0$ ) спектральная плотность энергии, определяемая первым слагаемым (3.33), принимает вид:

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar \omega^3}{4\pi^2 c^3} \coth(\hbar \omega / 2k_B T) = \frac{\hbar \omega^3}{2\pi^2 c^3} \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1} \right], \quad (3.34)$$

«как это и должно быть в одностороннем потоке, выделенном из равновесного излучения» [58].

В незапаздывающем пределе  $\omega z / c \ll 1$  формулы (3.32) и (3.33) дают одинаковый результат [96]:

$$\rho(\omega) = \frac{\hbar}{16\pi^2 z^3} \coth(\hbar \omega / 2k_B T) \left[ \operatorname{Im} \left( \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + 1} \right) + \operatorname{Im} \left( \frac{\mu(\omega) - 1}{\mu(\omega) + 1} \right) \right]. \quad (3.35)$$

Формула (3.35), очевидно, предсказывает резонансное усиление  $\rho(\omega)$  при условиях  $\operatorname{Re}[\varepsilon(\omega)] = -1$  или  $\operatorname{Re}[\mu(\omega)] = -1$ .

От величины  $\rho(\omega)$  зависят вероятности элементарных квантовых процессов испускания фотонов веществом вблизи нагретых тел. Этим обусловлены соответствующие изменения ширины линий и вероятностей атомных переходов, модификация интенсивности спонтанного равновесного и неравновесного теплового излучения, комбинационного и рэлеевского рассеяния (подробнее см. [11] и соотв. ссылки).

### 3.5. Нерелятивистская теория ФЭВ для частицы, движущейся вблизи поверхности. Локальное и нелокальное приближения

Для более полной иллюстрации общего метода расчета, схема которого намечена в п.3.3, вычислим компоненты силы и скорость нагрева частицы в нерелятивистском приближении теории ФЭВ ( $c \rightarrow \infty$ ). Сначала рассмотрим случай локальной диэлектрической проницаемости материала пластины ( $\varepsilon = \varepsilon(\omega)$ ). В нерелятивистском приближении формулы (3.13), (3.14), если пренебречь вкладом магнитных моментов, записываются в виде:

$$F_{x,z} = \langle \nabla_{x,z} (\mathbf{d}^{\text{sp}} \cdot \mathbf{E}^{\text{ind}} + \mathbf{d}^{\text{ind}} \cdot \mathbf{E}^{\text{sp}}) \rangle \quad (3.36)$$

$$\dot{Q} = \langle (\dot{\mathbf{d}}^{\text{sp}} \cdot \mathbf{E}^{\text{ind}} + \dot{\mathbf{d}}^{\text{ind}} \cdot \mathbf{E}^{\text{sp}}) \rangle \quad (3.37)$$

Индукционную компоненту электрического поля  $\mathbf{E}^{\text{ind}}$ , генерируемого движущейся частицей, находим из уравнений [4]

$$\mathbf{E}^{\text{ind}} = -\nabla \Phi^{\text{ind}}, \quad \Delta \Phi = 4\pi \operatorname{div} \mathbf{P}, \quad \mathbf{P} = \delta(x - Vt) \delta(y) \delta(z - z_0) \mathbf{d}^{\text{sp}}(t), \quad (3.38)$$

где  $\Phi$  и  $\Phi^{\text{ind}}$  – результирующий электрический потенциал и его составляющая, индуцированная частицей в пластине. Решение уравнения Пуассона должно удовлетворять условиям непрерывности потенциала и нормальной проекции электрического смещения на поверхности пластины  $z = 0$ :

$$\Phi(+0) = \Phi(-0), \quad -\Phi'(+0) = -\varepsilon \Phi'(-0), \quad \Phi'(z) = d\Phi / dz \quad (3.39)$$

Записывая все величины в Фурье-представлении (для вектора  $\mathbf{d}^{\text{sp}}(t)$ , очевидно, используется частотное разложение)

$$A(x, y, z, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d\omega d^2 k A_{\omega k} \exp(ik_x x + ik_y y - i\omega t),$$

уравнение Пуассона для потенциала  $\Phi(x, y, z)$  сводится к решению дифференциального уравнения

$$\left( \frac{d^2}{dz^2} - k^2 \right) \Phi_{\omega k}(z) = 4\pi \delta(z - z_0) (ik_x d^{sp}_x(\omega - k_x V) + ik_y d^{sp}_y(\omega - k_x V)) + 4\pi d^{sp}_z(\omega - k_x V) \delta'(z - z_0) \quad (3.40)$$

Решение уравнения (3.40) с учетом граничных условий (3.39), после отделения индуцированной части потенциала, приводит к выражению [4]:

$$\Phi_{\omega k}^{\text{ind}}(z) = \frac{2\pi}{k} \Delta(\omega) (ik_x d^{\text{sp}}_x(\omega - k_x V) + ik_y d^{\text{sp}}_y(\omega - k_x V) + kd^{\text{sp}}_z(\omega - k_x V)) \exp(-k(z + z_0)) \quad (3.41)$$

где  $\Delta(\omega) = (\varepsilon(\omega) - 1)/(\varepsilon(\omega) + 1)$ , а  $d^{\text{sp}}_{x,y,z}(\omega - k_x V)$  – проекции Фурье-компонент вектора  $\mathbf{d}^{\text{sp}}(t)$ . Далее, с учетом соотношения  $\mathbf{E}^{\text{ind}} = -\nabla\Phi^{\text{ind}}$ , находим  $\mathbf{E}^{\text{ind}}$ , а затем Фурье-разложения поля и дипольного момента подставляем в первое слагаемое в правой части (3.36). Возникающий коррелятор дипольных моментов раскрывается с помощью флуктуационно-диссипационного соотношения (3.21). При этом, в силу нерелятивистского характера задачи, векторы электрического поля и дипольного момента частицы в системах отсчета  $\Sigma$  и  $\Sigma'$  совпадают. Статистическое усреднение полученного вклада в проекции  $F_{x,z}(T_1)$  силы ФЭВ выполняется после дифференцирования по координатам  $x, z$  и подстановки координат частицы ( $x = Vt, 0, z_0$ ). В результате дальнейшего интегрирования по частотам и компонентам волнового вектора с учетом аналитических свойств входящих функций, получим (опуская в дальнейшем индекс у  $z_0$ )

$$F_x(T_1) = \frac{\hbar}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y k k_x \exp(-2kz) \Delta''(\omega) \alpha_e''(\omega^+) \coth\left(\frac{\hbar \omega^+}{2k_B T_1}\right); \quad (3.42)$$

$$F_z(T_1) = -\frac{\hbar}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y k^2 \exp(-2kz) \Delta'(\omega) \alpha_e''(\omega^+) \coth\left(\frac{\hbar \omega^+}{2k_B T_1}\right). \quad (3.43)$$

Совершенно аналогично вычисляется соответствующий вклад в скорость нагрева частицы по формуле (3.37)

$$\frac{dQ(T_1)}{dt} = -\frac{\hbar}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y k \exp(-2kz) \Delta''(\omega) \alpha_e''(\omega^+) \omega^+ \coth\left(\frac{\hbar \omega^+}{2k_B T_1}\right), \quad (3.44)$$

где  $\omega^+ = \omega + k_x V$ , а  $k = (k_x^2 + k_y^2)^{1/2}$ .

Нетрудно заметить, что формула (3.44) получается из (3.42) простой заменой  $k_x$  на  $-\omega^+$ . Это обусловлено дифференцированием в (3.36), (3.37) по координате  $x$  и времени  $t$  соответственно. Доплеровская частота  $\omega^+$  появляется в результате изменения частоты индуцированного электрического поля в системе покоя частицы. Этот очевидный факт не учитывается в недавней работе [23], в которой, по аналогии со случаем покоящейся частицы, в формуле для скорости нагрева фигурирует «обычная» частота  $\omega$ .

Теперь перейдем к расчету вкладов индуцированных моментов частицы. Индуцированный дипольный момент  $\mathbf{d}^{\text{ind}}$  находится из интегрального соотношения (3.23). Поскольку, как и ранее, векторы электрического поля и дипольного момента в системах  $\Sigma$  и  $\Sigma'$  совпадают, то

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^{\text{ind}}(t) &= \int_{-\infty}^t d\tau \alpha_e(t - \tau) \mathbf{E}^{\text{sp}}(V\tau, 0, z_0, \tau) = \\ &= \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint d\omega d^2k \alpha_e(\omega - k_x V) \mathbf{E}^{\text{sp}}_{\omega \mathbf{k}}(z_0) \exp(-i(\omega - k_x V)t) \end{aligned} \quad (3.45)$$

При выводе формулы (3.45) учитывается, что поле поверхности берется в точке локализации частицы, а интегрирование по всем переменным выполняется в пределах  $(-\infty, \infty)$ .

При подстановке (3.45) и Фурье-разложения поля  $\mathbf{E}^{\text{sp}}$  во вторые слагаемые (3.36), (3.37) используются соотношения (3.25) и (3.26) флуктуационно-электромагнитной теории. В развернутой форме (3.26) записывается в виде [21]:

$$\left(E_i^{\text{sp}}(z) E_k^{\text{sp}}(z')\right)_{\omega \mathbf{k}} = \frac{i}{2} \coth \frac{\hbar \omega}{2k_B T} \frac{\omega^2}{c^2} \left[ D_{ik}(\omega \mathbf{k}, z, z') - D_{ki}^*(\omega \mathbf{k}, z', z) \right]. \quad (3.46)$$

Спектральные компоненты запаздывающей функции Грина совпадают с Фурье-компонентами электрического поля покоящегося точечного диполя, расположенного в точке  $\mathbf{r}'$ , и имеющего проекции  $d_l(\omega) = -\frac{\hbar c^2}{\omega^2} \delta_{lm}$ , где  $l, m = x, y, z$  [21]. В нерелятивистском приближении  $\mathbf{E}^{\text{ind}}$  и компоненты функции Грина находятся с помощью уравнения

$\mathbf{E}^{\text{ind}} = -\nabla \Phi^{\text{ind}}$  с учетом необходимой замены Фурье-компонент дипольного момента в (3.41). Действуя таким образом, для необходимых в дальнейшем спектральных корреляционных функций электрического поля поверхности получим:

$$\left(E_x^{\text{sp}}(z_0) E_x^{\text{sp}}(z_0)\right)_{\omega \mathbf{k}} = \hbar \coth \frac{\hbar \omega}{2k_B T} \frac{2\pi}{k} k_x^2 \exp(-2kz_0) \text{Im} \Delta(\omega); \quad (3.47)$$

$$\left(E_y^{\text{sp}}(z_0) E_y^{\text{sp}}(z_0)\right)_{\omega \mathbf{k}} = \hbar \coth \frac{\hbar \omega}{2k_B T} \frac{2\pi}{k} k_y^2 \exp(-2kz_0) \text{Im} \Delta(\omega); \quad (3.48)$$

$$\left(E_z^{\text{sp}}(z_0) E_z^{\text{sp}}(z_0)\right)_{\omega \mathbf{k}} = \hbar \coth \frac{\hbar \omega}{2k_B T} \frac{2\pi}{k} k^2 \exp(-2kz_0) \text{Im} \Delta(\omega). \quad (3.49)$$

Подставляя (3.47)- (3.49) в (3.25), находим коррелятор поля поверхности

$$\left\langle \mathbf{E}^{\text{sp}}_{\omega \mathbf{k}}(z_0) \mathbf{E}^{\text{sp}}_{\omega' \mathbf{k}'}(z_0) \right\rangle = 2(2\pi)^4 k \exp(-2kz_0) \hbar \coth(\hbar \omega / 2k_B T) \text{Im} \Delta(\omega) \delta(\omega + \omega') \delta(\mathbf{k} + \mathbf{k}'). \quad (3.50)$$

С учетом (3.50) и аналитических свойств функций в интегральном выражении для вычисляемого вклада в силу (скорость нагрева),  $\iiint d\omega d\omega' d^2 k d^2 k'(\dots)$ , после элементарного интегрирования по частоте  $\omega'$  и по волновому вектору  $\mathbf{k}'$  находим вклад в проекции силы ФЭВ и скорость нагрева частицы, обусловленные ее индуцированным дипольным моментом:

$$F_x(T_2) = -\frac{\hbar}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y k k_x \exp(-2kz) \Delta''(\omega) \alpha_e''(\omega^+) \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T_2}\right); \quad (3.51)$$

$$F_z(T_2) = -\frac{\hbar}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y k^2 \exp(-2kz) \Delta''(\omega) \alpha_e'(\omega^+) \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T_2}\right); \quad (3.52)$$

$$\frac{dQ(T_2)}{dt} = \frac{\hbar}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y k \exp(-2kz) \Delta''(\omega) \alpha_e''(\omega^+) \omega^+ \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T_2}\right). \quad (3.53)$$

Наконец, учитывая (3.42)-(3.44) и (3.51)-(3.53), для суммарных проекций сил и скорости нагрева частицы получим:



$$F_x = -\frac{\hbar}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y k k_x \exp(-2kz) \Delta''(\omega) \alpha_e''(\omega^+) \left[ \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T_2}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_B T_1}\right) \right]; \quad (3.54)$$

$$F_z = -\frac{\hbar}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y k^2 \exp(-2kz) \left[ \Delta''(\omega) \alpha_e'(\omega^+) \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T_2}\right) + \Delta'(\omega) \alpha_e''(\omega^+) \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_B T_1}\right) \right]; \quad (3.55)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\hbar}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y k \exp(-2kz) \Delta''(\omega) \alpha_e''(\omega^+) \omega^+ \left[ \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T_2}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_B T_1}\right) \right]. \quad (3.56)$$

В несколько иной форме записи частотных аргументов подынтегральных функций и компоновки пределов интегрирования формулы (3.54)–(3.56) были впервые получены в [4]. Рассмотрим некоторые частные случаи, вытекающие из них. В линейном разложении по скорости при  $T_1 = T_2 = T$  из (3.54) следует формула для «вязкой» силы трения, впервые полученная в работе [41]

$$F_x = \frac{3}{2\pi} \frac{\hbar V}{z^5} \int_0^\infty d\omega \alpha''(\omega) \Delta''(\omega) \frac{d}{d\omega} \frac{1}{\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1}. \quad (3.57)$$

В «холодном» пределе  $T_1 = T_2 = T \rightarrow 0$ , учитывая, что  $\coth(\hbar\omega/2k_B T) \rightarrow \text{sign}(\omega)$ , после изменения порядка интегрирования в (3.54) получим [4]:

$$\begin{aligned} F_x &= \frac{4\hbar}{\pi^2} \int_0^\infty dk_x k_x \int_0^\infty dk_y k \exp(-2kz) \int_0^{k_x V} d\omega \alpha''(\omega - k_x V) \Delta''(\omega) = \\ &= -\frac{4\hbar V}{\pi^2 z^5} \int_0^\infty du (u^3 K_0(2u) + 0.5u^2 K_1(2u)) \int_0^u dp \alpha''(\omega_0(u-p)) \Delta''(\omega_0 p), \quad \omega_0 = V/z \end{aligned} \quad (3.58)$$

где  $K_0(x)$  и  $K_1(x)$  – функции Бесселя. Из (3.58) следует наличие тормозящей латеральной силы, действующей на холодную нерелятивистскую частицу, движущуюся вблизи холодной поверхности. Нелинейная зависимость от скорости определяется конкретным видом функций  $\alpha''(\omega)$  и  $\Delta''(\omega)$ . Поскольку функция, стоящая под внешним интегралом (3.58), имеет максимум вблизи  $u \approx 1$ , то  $F_x$  достигает максимальной величины в том случае, когда характерные частоты поглощения частицы и поверхности близки к  $\omega_0 = V/z$ . При  $\omega_0 \sim 10^{15} \text{ s}^{-1}$  и  $z = 1 \text{ nm}$ , например, частица должна иметь скорость порядка  $10^6 \text{ m/s}$ . В случае  $T_1 \neq T_2$ , благодаря разности гиперболических котангенсов, формула (3.54) может описывать ускоряющую силу [4].

Формулы (3.55) и (3.56) при разложении в ряд по степеням  $V$  содержат только четные степени, начиная с  $V^0$ . В частности, при  $V = 0$  формула (3.55), используя стандартное преобразование поворота частотного контура интегрирования в комплексной плоскости, приводится к виду:

$$F_z = -\frac{3}{4\pi} \frac{\hbar}{z^4} \int_0^\infty \alpha_e(i\xi) \Delta(i\xi) d\xi - \frac{3}{2\pi} \frac{\hbar}{z^4} \int_0^\infty d\omega [\alpha_e'(\omega) \Delta''(\omega) \Pi(\omega, T_2) + \alpha_e''(\omega) \Delta'(\omega) \Pi(\omega, T_1)], \quad (3.59)$$

где  $\Pi(\omega, T) = (\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1)^{-1}$ . Первое слагаемое в (3.59) описывает холодную часть силы Ван-дер-Ваальса (Казимира) в незапаздывающем приближении, а второе – неравно-

весные температурные вклады. При тепловом равновесии  $T_1 = T_2 = T$  вся формула (3.59) компактно записывается в виде:

$$F_z = -\frac{3}{2} \frac{k_B T}{z^4} \sum_{n=0}^{\infty} (1 - \delta_{n0}/2) \alpha_e(i\xi_n) \Delta(i\xi_n), \quad \xi_n = (2\pi k_B T / \hbar) n. \quad (3.60)$$

В свою очередь, формула (3.56) при  $V = 0$  описывает теплообмен между модами ближнего поля частицы и поверхности.

Оказывается, что в не запаздывающем пределе все полученные результаты могут быть достаточно легко обобщены на случай нелокальной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$  материала пластины [141]. Решение нелокальной задачи находится с помощью модели зеркального отражения, ранее применявшейся для расчета взаимодействий заряженных частиц с поверхностями (см. [142] и соотв. ссылки). В рамках этой модели уравнение Пуассона для электрического потенциала решается методом Фурье-преобразования по всем декартовым координатам  $(x, y, z)$  и по времени  $t$ . Фурье-компонента электрического потенциала в вакуумном пространстве имеет вид суммы потенциалов движущейся и зеркально отраженной (от плоскости  $z = 0$ ) частицы в совокупности с потенциалом фиктивного заряда  $\rho_s(x, y, t)\delta(z)$  на поверхности пластины. Внутри пластины Фурье-компонента потенциала равна  $\Phi_{\omega\mathbf{k}} = 8\pi^2 \rho_s(\mathbf{q}, \omega) / k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)$ , где  $\mathbf{k} = (\mathbf{q}, k_z)$ ,  $\mathbf{q}$  – двумерный волновой вектор в плоскости пластины. Фиктивная плотность заряда  $\rho_s(\mathbf{q}, \omega)$  выбирается таким образом, чтобы обеспечивались условия непрерывности потенциала и нормальной составляющей электрической индукции при  $z = 0$ . В результате для Фурье-компоненты индуцированного потенциала частицы в точке ее локализации получается формула (3.41) с заменой  $\Delta(\omega)$  на функцию (подробнее см. [141])

$$\Delta(q, \omega) = \frac{\pi - qI_0}{\pi + qI_0}, \quad I_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk_z}{k^2 \varepsilon(\mathbf{k}, \omega)}. \quad (3.61)$$

В случае локальной диэлектрической проницаемости из (3.61) следует  $\Delta(q, \omega) = \frac{\varepsilon(\omega) - 1}{\varepsilon(\omega) + 1}$ , как и должно быть.

В общем случае пространственной дисперсии уравнения Максвелла в приложении к данной задаче превращаются в весьма сложную систему интегро-дифференциальных уравнений, аналитического решения которой, вообще говоря, не существует. Обсуждение других модельных подходов для описания нелокальных эффектов проводилось, например, в работах [143, 84, 144] в случае сил Казимира и в [145] – в случае теплообмена пластин.

### 3.6. Релятивистская частица в равновесном вакуумном фоне электромагнитного излучения

Последовательное релятивистское решение задачи о ФЭВ движущейся нейтральной частицы с равновесным фоновым излучением в длинноволновом приближении  $R \ll \lambda_T$ , где  $\lambda_T = 2\pi \hbar c / k_B T_2$  (см. рис. 3), в соответствии с общим методом, изложенным в п.3.3, требует учета как спонтанных  $\mathbf{d}^{\text{sp}}, \mathbf{m}^{\text{sp}}$ , так и индуцированных равновесным излучением дипольных и магнитных моментов  $\mathbf{d}^{\text{ind}}, \mathbf{m}^{\text{ind}}$  частицы. Это было впервые сделано в наших работах [10, 26]. В системе отсчета  $\Sigma$ , связанной с фоновым излучением, результат имеет вид:

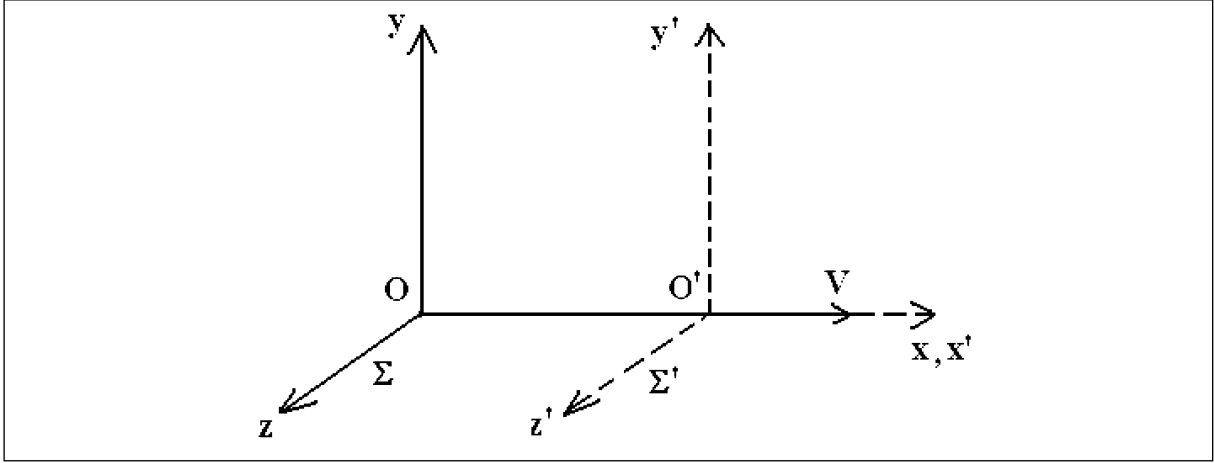


Рис. 3. Декартова система координат  $\Sigma$ , связанная с вакуумным фоном, и система покоя  $\Sigma'$  движущейся частицы

$$F_x(T_1) = \langle \nabla_x (\mathbf{d}^{\text{sp}} \cdot \mathbf{E}^{\text{ind}} + \mathbf{m}^{\text{sp}} \cdot \mathbf{H}^{\text{ind}}) \rangle =$$

$$= \frac{\gamma \hbar}{\pi c^4} \int_0^\infty d\omega \omega^4 \int_{-1}^1 dx x (1 + \beta x)^2 \cdot [\alpha_e''(\gamma \omega(1 + \beta x)) + \alpha_m''(\gamma \omega(1 + \beta x))] \cdot \coth\left(\frac{\gamma \hbar \omega(1 + \beta x)}{2k_B T_1}\right); \quad (3.62)$$

$$F_x(T_2) = \langle \nabla_x (\mathbf{d}^{\text{ind}} \cdot \mathbf{E}^{\text{sp}} + \mathbf{m}^{\text{ind}} \cdot \mathbf{H}^{\text{sp}}) \rangle =$$

$$= -\frac{\gamma \hbar}{\pi c^4} \int_0^\infty d\omega \omega^4 \int_{-1}^1 dx x (1 + \beta x)^2 \cdot [\alpha_e''(\gamma \omega(1 + \beta x)) + \alpha_m''(\gamma \omega(1 + \beta x))] \coth\left[\frac{\hbar \omega}{2k_B T_2}\right]; \quad (3.63)$$

$$F_x = F_x(T_1) + F_x(T_2) = -\frac{\gamma \hbar}{\pi c^4} \int_0^\infty d\omega \omega^4 \int_{-1}^1 dx x (1 + \beta x)^2 \cdot$$

$$\cdot [\alpha_e''(\gamma \omega(1 + \beta x)) + \alpha_m''(\gamma \omega(1 + \beta x))] \cdot \left[ \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T_2}\right) - \coth\left(\frac{\gamma \hbar \omega(1 + \beta x)}{2k_B T_1}\right) \right]. \quad (3.64)$$

Формулы (3.62) и (3.63) описывают, по отдельности, вклады спонтанных  $\mathbf{d}^{\text{sp}}, \mathbf{m}^{\text{sp}}$  и индуцированных  $\mathbf{d}^{\text{ind}}, \mathbf{m}^{\text{ind}}$  моментов частицы ( $\beta = V/c$ ,  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ ).

Для скорости нагрева частицы, совершенно аналогично, получим [10, 26]

$$\dot{Q} = \langle \dot{\mathbf{d}}^{\text{sp}} \cdot \mathbf{E}^{\text{ind}} + \dot{\mathbf{m}}^{\text{sp}} \cdot \mathbf{H}^{\text{ind}} \rangle + \langle \dot{\mathbf{d}}^{\text{ind}} \cdot \mathbf{E}^{\text{sp}} + \dot{\mathbf{m}}^{\text{ind}} \cdot \mathbf{H}^{\text{sp}} \rangle = \dot{Q}(T_1) + \dot{Q}(T_2) =$$

$$= \frac{\gamma \hbar}{\pi c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^4 \int_{-1}^1 dx (1 + \beta x)^3 \cdot [\alpha_e''(\gamma \omega(1 + \beta x)) + \alpha_m''(\gamma \omega(1 + \beta x))] \cdot$$

$$\cdot \left[ \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T_2}\right) - \coth\left(\frac{\gamma \hbar \omega(1 + \beta x)}{2k_B T_1}\right) \right] \quad (3.65)$$

В формулах (3.62), (3.63) слагаемые, содержащие  $T_1$ , описывают вклад спонтанных флуктуационных моментов  $\mathbf{d}^{\text{sp}}, \mathbf{m}^{\text{sp}}$ , а слагаемые, содержащие  $T_2$ , – вклад индуцированных моментов  $\mathbf{d}^{\text{ind}}, \mathbf{m}^{\text{ind}}$ . Как мы уже отмечали в [10, 26], и как следует из (3.62), (3.63), по отдельности эти вклады в системе отсчета  $\Sigma$  оказываются расходящимися, и только их сумма является конечной. Это имеет место как для вкладов в тангенциальную силу, так и для вкладов в скорость теплового нагрева. В «холодном» вакууме при  $T_1 = T_2 = 0$  из (3.64), (3.65) вытекает отсутствие тангенциальной силы и нагрева частицы, в согласии со свойствами симметрии вакуумного электромагнитного поля.

В линейном приближении по скорости частицы формула (3.64) преобразуется к виду:

$$F_x = -\frac{4\hbar V}{3\pi c^5} \int_0^\infty d\omega \omega^5 \cdot \left\{ \begin{array}{l} \frac{\hbar}{4k_B T_1} \cdot \frac{\alpha_e''(\omega) + \alpha_m''(\omega)}{\sinh^2(\hbar \omega / 2k_B T_1)} + 2[\Pi(\omega, T_2) - \Pi(\omega, T_1)] \cdot \\ \left[ \frac{\alpha_e''(\omega) + \alpha_m''(\omega)}{\omega} + \frac{1}{2} \frac{d\alpha_e''(\omega)}{d\omega} + \frac{1}{2} \frac{d\alpha_m''(\omega)}{d\omega} \right] \end{array} \right\}, \quad (3.66)$$

где  $\Pi(\omega, T) = (\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1)^{-1}$ . Мощность нагрева зависит от скорости только во втором порядке разложения. Из (3.66), в частности, вытекает знакопеременность тангенциальной силы  $F_x$  в неравновесном случае  $T_1 \neq T_2$  даже при малой скорости частицы, причем этот важный вывод имеет место и при релятивистских скоростях движения [26]. В изотермическом случае  $T_1 = T_2 = T$  из (3.66) следует более простой результат

$$F_x = -\frac{\hbar^2 V}{3\pi c^5 k_B T} \int_0^\infty d\omega \omega^5 \frac{\alpha_e''(\omega) + \alpha_m''(\omega)}{\sinh^2(\hbar \omega / 2k_B T)}. \quad (3.67)$$

Впервые формула (3.67) была получена авторами [146], проводившими расчет тангенциальной силы в системе покоя частицы  $\Sigma'$  без учета  $\alpha_m(\omega)$ . При этом, что интересно отметить, совершенно не учитывался вклад спонтанных моментов частицы  $\mathbf{d}^{\text{sp}}, \mathbf{m}^{\text{sp}}$ , зависящий от ее температуры. Напомним, что в соответствии с (3.62), вклад этих моментов приводит к появлению вклада в тангенциальную силу, зависящего от температуры частицы  $T_1$ .

Представляет интерес подробное обсуждение причины такого удивительного совпадения формулы (3.67) с общим расчетом, основанным на учете как спонтанных, так и индуцированных моментов частицы [10, 26]. Дело заключается в том, что в системе покоя частицы  $\Sigma'$  величина  $F_x'(T_1)$ , будучи конечной (в то время как в системе  $\Sigma$  она расходится (см. (3.62)), при тепловом равновесии  $T_1 = T_2 = T$  и в случае  $V \ll c$  обращается в ноль. Поэтому другой имеющийся вклад в тангенциальную силу,  $F_x'(T_2)$ , в системе  $\Sigma'$  является единственным. Этот вклад обусловлен индуцированными моментами частицы  $\mathbf{d}^{\text{ind}}, \mathbf{m}^{\text{ind}}$ . Тождественность результирующих выражений для тангенциальной силы в обеих системах отсчета в этом и только в этом случае вытекает из закона релятивистского преобразования для  $x$ -компоненты силы при переходе от  $\Sigma$  к  $\Sigma'$ :

$$F_x = \frac{F_x' + \frac{\beta}{c} (\mathbf{F}' \mathbf{V}')}{1 + \frac{\beta}{c} V'_x}. \quad (3.68)$$

Учитывая, что в системе покоя частицы  $\mathbf{V}' = 0$ , получаем  $F_x = F_x'$ . Таким образом, компонента силы  $F_x'(T_2)$ , вычисленная в системе  $\Sigma'$ , является полной диссипативной силой и в системе отсчета покоящегося фона  $\Sigma$ . В общем же случае, при  $T_1 \neq T_2$  и при релятивистских скоростях движения, подобное совпадение не имеет места, а соотношение  $F_x = F_x'$  может применяться только по отношению к суммарной силе  $F_x' = F_x'(T_1) + F_x'(T_2)$ , которая должна вычисляться с учетом не только спонтанных, но и индуцированных моментов частицы. Поэтому совершенно очевидно, что релятивистское обобщение метода [146], не учитывающего вкладов  $\mathbf{d}^{\text{sp}}, \mathbf{m}^{\text{sp}}$ , не может привести к правильному выражению для тангенциальной силы  $F_x$  в системе  $\Sigma$ .

Именно такая ошибка имеет место в недавней работе [23], авторы которой сначала вычисляют  $F_x(T_2) = \langle \nabla_x (\mathbf{d}^{\text{ind}} \mathbf{E}^{\text{sp}} + \mathbf{m}^{\text{ind}} \mathbf{H}^{\text{sp}}) \rangle$  в системе  $\Sigma'$ , а затем преобразуют получен-

ное выражение в систему  $\Sigma$ , используя неправильное соотношение  $F_x(T_2) = F'_x(T_2)$ . В результате авторы [23] получили формулу для силы вакуумного трения, не зависящую от температуры частицы:

$$F'_x = \frac{\hbar}{\pi c^4} \int_0^\infty d\omega \omega^4 \int_{-1}^1 dx x (\alpha''_e(\omega) + \alpha''_m(\omega)) \coth\left(\frac{\hbar \gamma \omega (1 + \beta x)}{2k_B T_2}\right). \quad (3.69)$$

Сравнение (3.69) с (3.64) показывает, что помимо указанной ошибки, формула (3.69) содержит несколько других принципиальных отличий: отсутствие факторов  $\gamma$  и  $(1 + \beta x)^2$ , наличие  $\omega$ , а не доплеровской частоты  $\gamma \omega (1 + \beta x)$  в аргументах функций  $\alpha''_{e,m}(\omega)$  и, в свою очередь, наличие частоты  $\gamma \omega (1 + \beta x)$  в аргументе гиперболического котангенса вместо «обычной» частоты  $\omega$ . В последнем случае (ср. с (3.63)) доплеровская частота не может появиться, поскольку в системе  $\Sigma$  излучение покоится.

То, что отбрасывание вклада  $\mathbf{d}^{\text{sp}}, \mathbf{m}^{\text{sp}}$  в ФЭВ малой частицы с фоновым излучением приводит к катастрофическим последствиям, еще более явственно следует из рассмотрения скорости теплового нагрева частицы. Для максимальной наглядности рассмотрим случай  $V = 0$ , когда из (3.65) следует

$$\dot{Q} = \frac{2\hbar}{\pi c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^4 [\alpha''_e(\omega) + \alpha''_m(\omega)] \cdot \left[ \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T_2}\right) - \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T_1}\right) \right]. \quad (3.70)$$

В данном случае, очевидно, системы отсчета  $\Sigma$  и  $\Sigma'$  совпадают. Общие формулы (3.64), (3.65), а также (3.70) как частный случай (3.65), получены в рамках единого формализма, в котором совместный учет спонтанных и индуцированных флуктуаций частицы имеет принципиальное значение (см. например, [10]). В противовес этому, применяя к расчету  $\dot{Q}$  методику [146], в которой вклад спонтанных флуктуаций частицы отсутствует, вместо (3.70) будем иметь:

$$\dot{Q} = \frac{2\hbar}{\pi c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^4 [\alpha''_e(\omega) + \alpha''_m(\omega)] \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T_2}\right) \rightarrow \infty \quad (3.71)$$

Даже если, чисто формально, исключить из (3.71) вклад нулевых колебаний электромагнитного поля, заменив гиперболический котангенс на  $2(\exp(\hbar \omega / k_B T) - 1)^{-1}$ , то и тогда данная формула будет противоречить первому и второму началу термодинамики:  $\dot{Q} > 0$  независимо от соотношения между  $T_1$  и  $T_2$ ,  $\int \dot{Q} dt \rightarrow \infty$ ,  $T_1 \rightarrow \infty$ .

Еще раз отметим, что формулы (3.64) и (3.66) предсказывают возможность ускорения частицы тангенциальной силой. Это, однако, не означает, что ускорение вызвано ее тепловым излучением (изотропным в системе покоя частицы): скорость нагрева  $\dot{Q}$  и мощность тангенциальной силы  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{V}$  связаны между собой и с работой флуктуационного электромагнитного поля законом сохранения энергии (3.10), т.е. должны рассматриваться в комплексе. В частности, возможность одновременного нагрева (или охлаждения) и ускорения частицы обусловлена работой флуктуационного поля, в результате совершения которой энергия поля уменьшается.

В заключение этого раздела обратим внимание на принципиальное различие между силой (3.64) и радиационной силой, действующей на частицу с радиусом  $R \gg \lambda_T$ , когда применимо приближение геометрической оптики, а соответствующий расчет, основанный на передаче импульса релятивистской частице «догоняющими» и «встречными» фотонами, приводит к формуле [147]

$$F_x = -\frac{4}{3} \beta \gamma^2 (\pi R^2) \left( \frac{8\pi^5 (k_B T)^4}{15 (2\pi \hbar c)^3} \right). \quad (3.72)$$

Выражение в больших круглых скобках формулы (3.72) представляет плотность энергии черного излучения с температурой  $T$  в системе отсчета  $\Sigma$ .

### 3.7. Основные результаты релятивистской теории ФЭВ в конфигурации 1

Расчет проекций  $F_{x,z}$  силы ФЭВ и скорости нагрева частицы проводится в полном соответствии с общими формулами (3.13), (3.14) и методом расчета, изложенным в п.3.3. Правая часть формул (3.13), (3.14) должна включать сумму независимых вкладов от взаимодействия частицы с вакуумными модами (фоновым излучением) и с модами поверхности, включающими радиационные и нерадиационные составляющие. В развернутом виде конечные релятивистские формулы при температуре частицы  $T_1$  и пластины и вакуумного фона с температурой  $T_2$  приведены в [24-26,8,10]. В более компактной записи их можно представить в виде [53, 148]:

$$F_x = -\frac{\hbar \gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y k_x \left[ \alpha_e''(\gamma\omega^+) \operatorname{Im} \left( \frac{\exp(-2q_0 z)}{q_0} R_e(\omega, \mathbf{k}) \right) + (e \leftrightarrow m) \right] \cdot \left[ \coth \left( \frac{\hbar\omega}{2k_B T_2} \right) - \coth \left( \frac{\gamma\hbar\omega^+}{2k_B T_1} \right) \right]; \quad (3.73)$$

$$F_z = -\frac{\hbar \gamma}{\pi c^4} \int_0^\infty d\omega \omega^4 \int_{-1}^1 dx (1 + \beta x)^2 [\alpha_e''(\gamma\omega_1) + \alpha_m''(\gamma\omega_1)] \cdot \left[ \coth \left( \frac{\hbar\omega}{2k_B T_2} \right) - \coth \left( \frac{\gamma\hbar\omega_1}{2k_B T_1} \right) \right] \left\{ \begin{aligned} & \alpha_e''(\gamma\omega^+) \operatorname{Re}[\exp(-2q_0 z) R_e(\omega, \mathbf{k})] \coth \left( \frac{\gamma\hbar\omega^+}{2k_B T_1} \right) + \\ & + \alpha_e'(\gamma\omega^+) \operatorname{Im}[\exp(-2q_0 z) R_e(\omega, \mathbf{k})] \coth \left( \frac{\hbar\omega}{2k_B T_2} \right) + (e \leftrightarrow m) \end{aligned} \right\}; \quad (3.74)$$

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\hbar \gamma}{2\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \omega^+ \cdot \left[ \alpha_e''(\gamma\omega^+) \operatorname{Im} \left( \frac{\exp(-2q_0 z)}{q_0} R_e(\omega, \mathbf{k}) \right) + (e \leftrightarrow m) \right] \cdot \left[ \coth \left( \frac{\hbar\omega}{2k_B T_2} \right) - \coth \left( \frac{\gamma\hbar\omega^+}{2k_B T_1} \right) \right] + \frac{\hbar \gamma}{\pi c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^4 \int_{-1}^1 dx (1 + \beta x)^3 [\alpha_e''(\gamma\omega_1) + \alpha_m''(\gamma\omega_1)] \cdot \left[ \coth \left( \frac{\hbar\omega}{2k_B T_2} \right) - \coth \left( \frac{\gamma\hbar\omega_1}{2k_B T_1} \right) \right]$$

где  $\omega^+ = \omega + k_x V$ ,  $\omega_1 = \omega(1 + \beta x)$  и

$$R_e(\omega, \mathbf{k}) = \Delta_e(\omega) [2(k^2 - k_x^2 \beta^2)(1 - \omega^2 / k^2 c^2) + (\omega^+)^2 / c^2] + \Delta_m(\omega) [2k_y^2 \beta^2 (1 - \omega^2 / k^2 c^2) + (\omega^+)^2 / c^2] \quad (3.76)$$

$$R_m(\omega, \mathbf{k}) = \Delta_m(\omega) [2(k^2 - k_x^2 \beta^2)(1 - \omega^2 / k^2 c^2) + (\omega^+)^2 / c^2] + \Delta_e(\omega) [2k_y^2 \beta^2 (1 - \omega^2 / k^2 c^2) + (\omega^+)^2 / c^2] \quad (3.77)$$

Зависящие от расстояния  $z$  интегральные слагаемые в (3.73)-(3.75) записаны таким образом, что они описывают как вклад ближних электромагнитных мод поверхности ( $k > \omega/c$ ), так и вклад поверхностно-волновых мод ( $k < \omega/c$ ). Это обеспечивается аналитическими преобразованиями:

$$\int_{-\infty-\infty}^{+\infty+\infty} d^2k = \int_{k>\omega/c} d^2k + \int_{k<\omega/c} d^2k, q_0 \rightarrow -i\tilde{q}_0, q_0 = (k^2 - \omega^2/c^2)^{1/2}, \tilde{q}_0 = (\omega^2/c^2 - k^2)^{1/2}. \quad (3.78)$$

Вклад в соответствующие величины от взаимодействия частицы с вакуумными модами представлен в (3.73) и (3.75) вторыми интегральными слагаемыми, не зависящими от расстояния  $z$ . Нормальная к пластине сила  $F_z$ , действующая на частицу, в явном виде не содержит теплового вклада вакуумного фона, но неявным образом ее структура определяется наличием в системе термодинамического равновесия между пластиной и вакуумным фоном. При нарушении этого равновесия структура электромагнитного поля вблизи пластины, как следует из п.3.4, изменяется, и это приводит к изменению силы  $F_z$  (см. [9, 68, 71] и п.3.8).

В «холодном» случае  $T_1 = T_2 = 0$  для реальных материалов частицы и пластины, как и в нерелятивистском пределе (3.54), диссипативная сила  $F_x$  отлична от нуля, а при конечных температурах она может быть как замедляющей, так и ускоряющей. Резюмируя результаты пп.3.5 - 3.7 в отношении тангенциальной силы  $F_x$  при  $T_1 = T_2 = 0$ , можно констатировать, что присутствие пластины делает электромагнитный вакуум более «вязким» по отношению к движущейся частице. Более детальный анализ релятивистских формул (3.73)-(3.75) еще предстоит сделать.

### 3.8. Равновесные и неравновесные силы Казимира и Казимира–Полдера

При  $V = 0$  и  $T_1 = T_2 = 0$  формула (3.74) описывает холодную силу Казимира или Казимира–Полдера, если речь идет о взаимодействии атома с поверхностью. В этом случае ее можно привести к более простому виду [51]:

$$F_z = -\frac{\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\xi \int_0^\infty dk k \exp(-2\sqrt{k^2 + \xi^2/c^2}z) [R_e(i\xi, k)\alpha_e(i\xi) + R_m(i\xi, k)\alpha_m(i\xi)]; \quad (3.79)$$

$$R_e(i\xi, k) = (2k^2 + \xi^2/c^2)\Delta_e(i\xi) - (\xi^2/c^2)\Delta_m(i\xi); \quad (3.80)$$

$$R_m(i\xi, k) = (2k^2 + \xi^2/c^2)\Delta_m(i\xi) - (\xi^2/c^2)\Delta_e(i\xi). \quad (3.81)$$

В случае  $\alpha_m(\omega) = 0$  в незапаздывающем пределе  $c \rightarrow \infty$  из (3.79) получается выражение для «холодной» силы Ван-дер-Ваальса (первое слагаемое в (3.59)).

Для идеально проводящих материалов частицы и пластины, когда при  $\xi \rightarrow 0$   $\varepsilon(i\xi) \rightarrow \infty$ ,  $\Delta_e(i\xi) \rightarrow 1$ ,  $\Delta_m(i\xi) \rightarrow -1$ ,  $\alpha_e(i\xi) \rightarrow R^3$ ,  $\alpha_m(i\xi) \rightarrow -R^3/2$ , формула (3.76) кардинально упрощается следующим образом:

$$F_z = -\frac{9}{4\pi} \frac{\hbar c R^3}{z^5}. \quad (3.82)$$

Правильный численный коэффициент в (3.82) получается только при учете магнитной поляризации частицы. Это согласуется с результатом квантового электродинамического расчета [149]. В оригинальной работе Казимира и Полдера [29] магнитная поляризация не учитывалась, поэтому численный коэффициент был в 1,5 раза меньше.

В случае  $T_1 = T_2 = T$  и  $V = 0$ , аналогично преобразованию формулы (3.55), после перехода к интегралу по мнимым частотам формула (3.74) принимает вид [10]:

$$F_z = -2k_B T \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} dk k [R_e(i\xi_n, k) \alpha_e(i\xi_n) + R_m(i\xi_n, k) \alpha_m(i\xi_n)] \exp\left(-2\sqrt{k^2 + \xi_n^2/c^2} z\right), \quad (3.83)$$

где  $a_n = (1 - \delta_{0n}/2)$  и  $\xi_n = 2\pi k_B T n / \hbar$ .

В условиях термодинамического равновесия, используя (3.74) и учитывая связь между силой  $F_z$  и свободной энергией системы «частица – поверхность»,  $F_z = -\frac{\partial \tilde{F}(z, T)}{\partial z}$ , для

$\tilde{F}(z, T)$  получим [150]:

$$\begin{aligned} \tilde{F}(z, T) = E_F(z, 0) - \frac{\hbar}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \left(\frac{\omega}{c}\right)^3 \Pi(\omega, T) \cdot \\ \left\{ \int_0^1 du \operatorname{Re} \left[ \exp\left(\frac{2i\omega z u}{c}\right) (\tilde{f}_e(u, \omega) \alpha_e(\omega) + \tilde{f}_m(u, \omega) \alpha_m(\omega)) \right] + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} du \exp\left(-\frac{2\omega z u}{c}\right) \operatorname{Im}[(f_e(u, \omega) \alpha_e(\omega) + f_m(u, \omega) \alpha_m(\omega))] \right\} \end{aligned} \quad (3.84)$$

$$E_F(z, 0) = -\frac{\hbar}{2\pi} \int_0^{\infty} d\xi \left(\frac{\xi}{c}\right)^3 \int_1^{\infty} du \exp\left(-\frac{2\xi z u}{c}\right) [\tilde{f}_e(u, i\xi) \alpha_e(i\xi) + \tilde{f}_m(u, i\xi) \alpha_m(i\xi)], \quad (3.85)$$

где вспомогательные функции  $f_{e,m}$  и  $\tilde{f}_{e,m}$  определены соотношениями:

$$f_e(u, \omega) = (2u^2 + 1) \Delta_e(u, \omega) + \Delta_m(u, \omega) \quad (3.86)$$

$$f_m(u, \omega) = (2u^2 + 1) \Delta_m(u, \omega) + \Delta_e(u, \omega) \quad (3.87)$$

$$\tilde{f}_e(u, \omega) = (1 - 2u^2) \tilde{\Delta}_e(u, \omega) + \tilde{\Delta}_m(u, \omega) \quad (3.88)$$

$$\tilde{f}_m(u, \omega) = (1 - 2u^2) \tilde{\Delta}_m(u, \omega) + \tilde{\Delta}_e(u, \omega) \quad (3.89)$$

$$\tilde{f}_e(u, i\xi) = (2u^2 - 1) \tilde{\Delta}_e(u, i\xi) - \tilde{\Delta}_m(u, i\xi) \quad (3.90)$$

$$\tilde{f}_m(u, i\xi) = (2u^2 - 1) \tilde{\Delta}_m(u, i\xi) - \tilde{\Delta}_e(u, i\xi) \quad (3.91)$$

$$\Delta_e(u, \omega) = \frac{\varepsilon(\omega)u - \sqrt{u^2 + 1 - \varepsilon(\omega)}}{\varepsilon(\omega)u + \sqrt{u^2 + 1 - \varepsilon(\omega)}}, \quad \Delta_m(u, \omega) = \frac{u - \sqrt{u^2 + 1 - \varepsilon(\omega)}}{u + \sqrt{u^2 + 1 - \varepsilon(\omega)}} \quad (3.92)$$

$$\tilde{\Delta}_e(u, \omega) = \frac{\varepsilon(\omega)u - \sqrt{u^2 + \varepsilon(\omega) - 1}}{\varepsilon(\omega)u + \sqrt{u^2 + \varepsilon(\omega) - 1}}, \quad \tilde{\Delta}_m(u, \omega) = \frac{u - \sqrt{u^2 + \varepsilon(\omega) - 1}}{u + \sqrt{u^2 + \varepsilon(\omega) - 1}} \quad (3.93)$$

Формула (3.84) удобна далее при вычислении энтропии системы  $S = -\frac{\partial \tilde{F}(z, T)}{\partial T}$ .

Представляет интерес также расчет теплового вклада в силу Казимира для идеально проводящих частицы и поверхности при  $T_1 = T_2 = T$ . Подставляя (3.84) в соотношение

$F_z = -\frac{\partial \tilde{F}(z, T)}{\partial z}$ , находим [10]

$$F_z(T) = -\frac{3}{8} \hbar \omega_w \frac{R^3}{z^4} \varphi_1(x, \coth x), \quad x = 2\pi \omega_w z / c, \quad \omega_w = k_B T / \hbar \quad (3.94)$$



$$\begin{aligned} \varphi_1(x, \coth x) = & -3x + 3x \coth^2 x + 3 \coth x - 3x^2 \coth x + 3x^2 \coth^3 x - 12/x + \\ & + x^3 - 4x^3 \coth^2 x + 3x^3 \coth^4 x \end{aligned} \quad (3.95)$$

В пределе высоких температур или больших расстояний частицы от поверхности, когда  $x \gg 1$ , а  $\varphi_1(x, \coth x) \rightarrow 3$ , из (3.94) следует:

$$F_z(T) = -\frac{9}{8} k_B T \frac{R^3}{z^4}. \quad (3.96)$$

Без учета магнитной поляризации частицы численный коэффициент в (3.96) так же, как и в (3.82), оказывается меньше в 1,5 раза [10]. В численном отношении тепловая часть силы Казимира (3.94) превалирует по сравнению с холодной частью (3.82) при  $z > 10 \mu\text{m}$  ( $x > 8$ ). В диапазоне расстояний  $0 < x < 3.3$   $F_z(T) > 0$ , т.е. тепловая сила Казимира является отталкивающей, но суммарная сила все же остается притягивающей [10].

Для холодной частицы ( $T_1 = 0$ ) и нагретой пластины, находящейся в тепловом равновесии с вакуумным фоном ( $T_2 = T_3 = T$ ), результирующая сила  $F_z$  отличается от (3.83) дополнительным вкладом [10, 70, 55, 70, 151]:

$$\Delta F_z = \frac{2\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \Pi(\omega, T) \alpha_e''(\omega) \text{Re} \left\{ \int_0^\infty dk k [\exp(-2q_0 z) R_e(\omega, k)] \right\} + \{ \alpha_e'' \rightarrow \alpha_m'', R_e \rightarrow R_m \}, \quad (3.97)$$

где внеинтегральное слагаемое в фигурных скобках идентично первому слагаемому с необходимыми модификациями. Для атома в основном состоянии формулы (3.83) и (3.97) описывают неравновесную силу Казимира–Полдера. В данном случае поправка (3.97) весьма мала, ввиду малости  $\alpha_{e,m}''(\omega)$  в тепловой области частот, которая вносит основной вклад в интеграл (3.97). Для частиц с заметным поглощением на указанных частотах, вклад (3.97) оказывается существенным. Так, в тепловой конфигурации с нагретой частицей ( $T_1 = T$ ) и холодной пластиной и вакуумным фоном ( $T_2 = T_3 = 0$ ) сила Казимира в области микронных расстояний обнаруживает осциллирующий характер [151].

Другой тип неравновесности рассматривался в работах [67, 68, 73, 74]. Здесь рассчитывалось взаимодействие холодной нейтральной частицы или атома в основном состоянии ( $T_1 = 0$ ) с нагретой пластиной ( $T_2 = T_S$ ), а вакуумный фон предполагался либо холодным ( $T_3 = 0$ ), либо имеющим температуру  $T_3 = T_E$ , отличающуюся от  $T_S$ . Как вытекает из результатов п.3.4, изменение структуры электромагнитного поля над нагретой пластиной при отсутствии теплового равновесия с вакуумным фоном проявляется только в изменении радиационной части поля. Структура ближних мод поля не зависит от теплового состояния вакуумного фона. При тепловом равновесии между ними радиационные моды образуют стоячие волны и, наряду с модами ближнего поля, вносят вклад в силу Казимира. В неравновесном случае радиационные моды излучаются в вакуумное пространство или поглощаются пластиной (вектор Пойнтинга отличен от нуля), а их влияние на частицу может проявляться в процессах поглощения или рассеяния [71]. Если эти процессы пренебрежимо малы, то сила взаимодействия холодной частицы с пластиной может быть представлена в виде [68]:

$$F^{neq}(T_S, T_E, z) = F^{eq}(T_E, z) + F_{th}^{neq}(T_S, 0, z) - F_{th}^{neq}(T_E, 0, z), \quad (3.98)$$

где равновесная сила Казимира  $F^{eq}(T, z)$  определяется формулой (3.83), а неравновесная тепловая часть  $F_{th}^{neq}(T, 0, z)$ , отвечающая конфигурации нагретой пластины и холодного вакуумного фона, равна (здесь и далее в этом разделе предполагается  $\alpha_m(\omega) = 0$ )

$$F_{th}^{neq}(T_S, 0, z) = -\frac{2\sqrt{2}\hbar\alpha_e(0)}{\pi c^4} \int_0^\infty d\omega \Pi(\omega, T) \int_1^\infty dq q \exp\left(-\frac{2\omega z}{c} \sqrt{q^2 - 1}\right) \sqrt{q^2 - 1} \cdot \left[ \frac{1}{\left|\sqrt{\varepsilon(\omega) - q^2} + \sqrt{1 - q^2}\right|^2} + \frac{(2q^2 - 1)(q^2 + |\varepsilon(\omega) - q^2|)}{\left|\sqrt{\varepsilon(\omega) - q^2} + \varepsilon(\omega)\sqrt{1 - q^2}\right|^2} \right] \sqrt{|\varepsilon(\omega) - q^2| + (\varepsilon'(\omega) - q^2)} \quad (3.99)$$

Смысл формулы (3.99) становится более ясным, если в равновесной силе  $F^{eq}(T, z)$  отделить холодный и тепловой вклады друг от друга. Это можно сделать с помощью формулы (3.84), используя соотношение  $F_z = -\frac{\partial \tilde{F}(z, T)}{\partial z}$ . В результате получим [70, 151]:

$$F^{eq}(z, T) = F_0(z) + F_{th}(z, T); \quad (3.100)$$

$$F_{th}(z, T) = -\frac{2\hbar}{\pi} \int_0^\infty d\omega \alpha'_e(\omega) \Pi(\omega, T) \left\{ \int_{\omega/c}^\infty dk k \operatorname{Im} R_e \exp(-2q_0 z) + \int_0^{\omega/c} dk k \operatorname{Im} [R_e \exp(-2q_0 z)] \right\}, \quad (3.101)$$

где  $F_0(z)$  – холодная сила Казимира (3.79), а  $R_e(\omega, k)$  определяется формулой (3.76) при  $V = 0$ . Первое слагаемое в фигурных скобках (3.101) связано с вкладом нерадиационных мод поверхности, а второе – с вкладом радиационных. Аналитический расчет первого из них в точности приводит к (3.99), если в (3.101) вынести из-под знака интеграла величину  $\alpha'_e(\omega) \equiv \alpha_e(0)$  [68]. Это можно сделать благодаря тому, что на тепловых частотах  $\omega \approx k_B T / \hbar$ , наиболее существенных в частотном интеграле (3.101), поляризуемость атома можно заменить статической величиной. Причем, как уже отмечалось ранее, тепловой вклад в силу Казимира, определяемый формулой (3.99), никак не связан с состоянием вакуумного фона.

Итак, переходя к ситуации, когда поверхность нагрета, а вакуумный фон холодный, из формулы (3.101) следует просто исключить второй член в фигурных скобках. Учитывая эти особенности, формулу (3.98) можно переписать в эквивалентном виде:

$$F^{neq}(T_S, T_E, z) = F^{eq}(T_S, z) + F_{th}^{rad}(T_E, z) - F_{th}^{rad}(T_S, z). \quad (3.102)$$

Физический смысл (3.102) более прозрачен, чем в случае (3.98): при отсутствии теплового равновесия между пластиной и вакуумным фоном радиационные моды пластины, отвечающие температуре  $T_S$ , уходят от нее в вакуум, а радиационные моды вакуума, отвечающие температуре  $T_E$ , возвращаются, формируя структуру поля между частицей и пластиной.

В нашей работе [71] был также рассмотрен радиационный вклад в силу взаимодействия, обусловленный рассеянием и поглощением частицей излучения пластины в холодный вакуум ( $T_3 = 0$ ). Соответствующую «ветровую» часть силы взаимодействия  $F_z^{(R)}$  при условии  $R \ll 2\pi c \hbar / k_B T_2$  можно представить в виде [152]:

$$F_z^{(R)} = \frac{1}{c} \int_0^\infty d\omega S_z(\omega) \left\{ \sigma_a(\omega) + \int_0^\pi (1 - \cos \theta) \frac{d\sigma_s}{d\Omega} d\Omega \right\}, \quad (3.103)$$

где  $S_z(\omega)$  – спектральная плотность потока излучения [58],  $\sigma_a(\omega)$  – сечение поглощения, а  $d\sigma_s / d\Omega$  – дифференциальное сечение рассеяния неполяризованного излучения на частице [152].

$$S_z(\omega) = \frac{\hbar\omega}{4\pi^2} \Pi(\omega, T_2) \int_0^{\omega/c} dk k (2 - |\Delta_e|^2 - |\Delta_m|^2);$$

$$\sigma_a(\omega) = \frac{4\pi\omega}{c} \text{Im} \alpha_e(\omega); \quad (3.104)$$

$$\frac{d\sigma_s}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{2c^4} |\alpha_e(\omega)|^2 (1 + \cos^2 \theta). \quad (3.105)$$

С учетом указанных соотношений, после элементарного интегрирования по углам рассеяния в (3.103) находим [71]

$$F_z^{(R)} = \frac{\hbar}{\pi c^2} \int_0^\infty d\omega \omega^2 \Pi(\omega, T_2) \left[ \text{Im} \alpha_e(\omega) + \frac{2}{3} (\omega/c)^3 |\alpha_e(\omega)|^2 \right] \int_0^{\omega/c} dk k (2 - |\Delta_e|^2 - |\Delta_m|^2). \quad (3.106)$$

Величина отталкивающей «ветровой» силы не зависит от расстояния и возрастает с увеличением температуры. Расчеты показывают, что для нейтральных атомов  $^{87}\text{Rb}$  над нагретой пластиной алмаза  $F_z^{(R)}$  превышает неравновесную силу (3.102) на расстояниях 8 мм и 0,6 мм при температурах пластины 300 и 2000К соответственно [71].

### 3.9. Сила вакуумного трения и вакуумный теплообмен при малой скорости движения частицы

В дальнейшем будем считать поверхность немагнитной ( $\mu(\omega) = 1$ ). При нерелятивистском движении  $\beta \ll 1, \gamma = 1$  формула (3.73) упрощается путем разложения подынтегральных функций в ряды по нечетным степеням скорости  $V$ . Для линейного по скорости члена разложения получим:

$$F_x = F_x^{\text{vac}} + F_x^S, \quad (3.107)$$

где вакуумный вклад  $F_x^{\text{vac}}$  определяется из (3.66), а вклад взаимодействия с пластиной имеет вид [8, 10]:

$$\begin{aligned} F_x^S = & -\frac{\hbar V}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega du (\omega/c)^5 (u^2 + 1) \exp\left(-\frac{2\omega z}{c} u\right) \cdot \\ & \left\{ 2[\Pi(\omega, T_2) - \Pi(\omega, T_1)] \cdot \left[ \frac{d\alpha_e''}{d\omega} \text{Im} f_e + \frac{d\alpha_m''}{d\omega} \text{Im} f_m + \frac{2}{\omega} (\alpha_e'' + \alpha_m'') (\Delta_e'' + \Delta_m'') \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\hbar}{2k_B T_1} \sinh^{-2}(\hbar\omega/2k_B T_1) \cdot [\alpha_e'' \cdot \text{Im} f_e + \alpha_m'' \cdot \text{Im} f_m] \right\} - \\ & - \frac{\hbar V}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^1 d\omega du (\omega/c)^5 (1-u^2) \cdot \\ & \left\{ 2[\Pi(\omega, T_2) - \Pi(\omega, T_1)] \cdot \left[ \text{Re} \left( e^{\frac{2i\omega z}{c} u} \tilde{f}_e \right) \frac{d\alpha_e''}{d\omega} + \text{Re} \left( e^{\frac{2i\omega z}{c} u} \tilde{f}_m \right) \frac{d\alpha_m''}{d\omega} + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2}{\omega} \text{Re} \left( e^{\frac{2i\omega z}{c} u} (\Delta_e + \Delta_m) \right) (\alpha_e'' + \alpha_m'') \right] + \right. \\ & \left. + \frac{\hbar}{2k_B T_1} \sinh^{-2}(\hbar\omega/2k_B T_1) \cdot \left[ \text{Re} \left( e^{\frac{2i\omega z}{c} u} \tilde{f}_e \right) \alpha_e'' + \text{Re} \left( e^{\frac{2i\omega z}{c} u} \tilde{f}_m \right) \alpha_m'' \right] \right\} \quad (3.108) \end{aligned}$$

Для упрощения записи аргументы подынтегральных функций в (3.108) опущены. Коэффициенты  $f_{e,m}$  и  $\tilde{f}_{e,m}$  определяются из (3.86)-(3.89). Первый интеграл в (3.108) учитывает взаимодействие с ближними модами поверхности, а второй – взаимодействие с вол-

новыми модами. При  $T_1 \neq T_2$  уже из самой структуры формулы (3.108) явствует возможность ускоряющей тангенциальной силы.

При тепловом равновесии  $T_1 = T_2 = T$  формула (3.108) принимает вид [8,10]:

$$F_x^S = -\frac{\hbar^2 V}{4\pi k_B T c^5} \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega du (1+u^2) \exp\left(-\frac{2\omega z}{c} u\right) \frac{\omega^5}{\sinh^2(\hbar \omega / 2k_B T)} (\alpha_e'' f_e'' + \alpha_m'' f_m'') - \\ - \frac{\hbar^2 V}{4\pi k_B T c^5} \int_0^\infty \int_0^1 d\omega du (1-u^2) \frac{\omega^5}{\sinh^2(\hbar \omega / 2k_B T)} \left[ \operatorname{Re}\left(e^{\frac{2i\omega z}{c} u} \cdot \tilde{f}_e\right) + \operatorname{Re}\left(e^{\frac{2i\omega z}{c} u} \cdot \tilde{f}_m\right) \right], \quad (3.109)$$

а  $F_x^{vac}$  в (3.107) определяется из (3.66). Формула (3.109) обобщает нерелятивистский результат (3.57) с учетом эффекта запаздывания. В пределе  $c \rightarrow \infty$  обе формулы совпадают.

Учитывая, что  $\alpha_e, \alpha_m \propto R^3$ , из (3.67), (3.109) нетрудно получить характерные зависимости сил  $F_x^{vac}$  и  $F_x^S$  от параметров  $z, V, R, \omega_w$  ( $\omega_w = k_B T / \hbar$  - частота Вина).

$$F_x^{vac} \propto \frac{\hbar V \omega_w^2}{c^2} \left(\frac{\omega_w R}{c}\right)^3; \quad (3.110)$$

$$F_x^S \propto \begin{cases} \frac{\hbar V}{z^2} \left(\frac{R}{z}\right)^3, & \frac{\omega_w z}{c} \ll 1 \\ \frac{\hbar V}{z^2} \left(\frac{\omega_w R}{c}\right)^3, & \frac{\omega_w z}{c} \gg 1 \end{cases}. \quad (3.111)$$

С учетом (3.110), (3.111), типичное соотношение между обоими «вязкими» вкладками в диссипативную силу при различных расстояниях  $z$  частицы от поверхности определяется величиной параметра запаздывания  $\omega_w z / c$ , поскольку  $F_x^{vac} / F_x^S \approx \omega_w z / c$ .

При разложении общей формулы (3.75) по степеням скорости  $V$  результат представляется суммой, не зависящей от  $V$  скорости нагрева ( $dQ_0 / dt$ ) и динамических поправок, первая из которых, аналогично разложению силы  $F_z$ , пропорциональна  $V^2$ . Для величины  $dQ_0 / dt$ , в частности, будем иметь [8, 10]:

$$\dot{Q}_0 = -\frac{4\hbar}{\pi c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^4 \left[ \alpha_e''(\omega) + \alpha_m''(\omega) \right] \cdot [\Pi(\omega, T_1) - \Pi(\omega, T_2)] - \\ - \frac{2\hbar}{\pi c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^4 [\Pi(\omega, T_1) - \Pi(\omega, T_2)] \cdot \int_0^\infty du \exp\left(-\frac{2\omega z}{c} u\right) \cdot (\alpha_e'' \operatorname{Im} f_e + \alpha_m'' \operatorname{Im} f_m) - \\ - \frac{2\hbar}{\pi c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^4 [\Pi(\omega, T_1) - \Pi(\omega, T_2)] \cdot \int_0^1 du \left[ \operatorname{Re}\left(e^{\frac{2i\omega z}{c} u} \tilde{f}_e\right) \alpha_e'' + \operatorname{Re}\left(e^{\frac{2i\omega z}{c} u} \tilde{f}_m\right) \alpha_m'' \right] \quad (3.112)$$

Очевидно, что  $\dot{Q}_0 \neq 0$  только при  $T_1 \neq T_2$ . Первое интегральное слагаемое в правой части (3.112), не зависящее от расстояния  $z$ , описывает теплообмен между частицей и вакуумным фоном, второе и третье – теплообмен с ближними и радиационными модами поверхности. Для нейтрального атома в основном состоянии ( $T_1 = 0$ ) формула (3.112) предсказывает «нагрев», который физически можно трактовать как проявление сдвига уровней атома вблизи нагретой поверхности. Следствием неравновесности данной ситуации является также формула (3.97) для поправки к силе Казимира–Полдера.

Вакуумный вклад в скорость теплообмена может быть получен и более простым способом, используя закон Кирхгофа для теплового излучения и сечение поглощения элек-

ромагнитного излучения частицей [137]. В частности, таким путем авторы [153] показали, что в выражении для скорости охлаждения металлической наночастицы в холодном вакууме доминирует вклад магнитной поляризации. В отличие от этого, вклады в скорость нагрева (охлаждения) при взаимодействии частицы с поверхностными электромагнитными модами могут быть получены только при использовании общей теории электромагнитных флуктуаций.

#### 4. Флуктуационно-электромагнитное взаимодействие в конфигурации 2 (пластина - пластина)

##### 4.1. Формула Лифшица–Питаевского для силы Казимира

В условиях теплового равновесия при температуре  $T$  сила Казимира между двумя покоящимися толстыми пластинами, разделенными вакуумным промежутком с шириной  $l$ , отнесенная к единице площади контакта, определяется формулой [154]:

$$P(l, T) = \frac{k_B T}{16\pi l^3} \int_0^\infty dx x^2 \left[ \frac{(\varepsilon_{10} + 1)(\varepsilon_{20} + 1)}{(\varepsilon_{10} - 1)(\varepsilon_{20} - 1)} e^x - 1 \right]^{-1} + \frac{k_B T}{\pi c^3} \sum_{n=1}^\infty \xi_n^3 \int_1^\infty dp p^2 \left\{ \left[ \frac{(s_1 + p)(s_2 + p)}{(s_1 - p)(s_2 - p)} \exp(2p\xi_n/c) - 1 \right]^{-1} + \left[ \frac{(s_1 + p\varepsilon_1)(s_2 + p\varepsilon_2)}{(s_1 - p\varepsilon_1)(s_2 - p\varepsilon_2)} \exp(2p\xi_n/c) - 1 \right]^{-1} \right\}, \quad (4.1)$$

где  $s_{1,2} = (\varepsilon_{1,2} - 1 + p^2)^{1/2}$ ,  $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(i\xi_n)$ ,  $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(i\xi_n)$  – диэлектрические функции пластин 1 и 2, определенные на мнимых частотах  $\omega = i\xi_n$ ,  $\xi_n = 2\pi k_B T n / \hbar$ ;  $\varepsilon_{10}$  и  $\varepsilon_{20}$  – статические диэлектрические проницаемости материалов пластин при  $\omega = 0$ . Форма записи (4.1) отличается от оригинального выражения Лифшица [20] тем, что нулевой член суммы по комплексным частотам выделен в отдельное (первое) слагаемое. В области расстояний  $l > \hbar c / k_B T$  этот член является доминирующим, определяя температурную асимптотику силы Казимира.

При рассмотрении неравновесных ситуаций и низкотемпературной асимптотики силы Казимира используется также иная форма записи (4.1) – в терминах действительной частоты [9]. В обозначениях, использованных в разделе 3, соответствующее выражение имеет вид:

$$P^{eq}(l, T) = -\frac{\hbar}{2\pi^2} \int_0^\infty d\omega \coth(\hbar\omega / 2k_B T) \operatorname{Re} \left[ \int_0^\infty dk k \tilde{q}_0 g(k, \omega) \right]; \quad (4.2)$$

$$g(k, \omega) = \sum_{\mu=e,m} \frac{\Delta_{1\mu} \Delta_{2\mu} \exp(2i\tilde{q}_0 l)}{D_\mu} = \sum_{\mu=e,m} \left[ (\Delta_{1\mu} \Delta_{2\mu})^{-1} \exp(-2i\tilde{q}_0 l) - 1 \right]^{-1}; \quad (4.3)$$

$$D_\mu = 1 - \Delta_{1\mu} \Delta_{2\mu} \exp(2i\tilde{q}_0 l). \quad (4.4)$$

Индексы 1, 2 коэффициентов отражения  $\Delta_{1\mu}$  и  $\Delta_{2\mu}$  нумеруют пластины, а индексы  $\mu = e, m$  соотносят их с формулами (3.31) для  $\Delta_{e,m}$  для волн с  $P$ - и  $S$ -поляризацией. При отделении в (4.2) вкладов холодной и тепловой части и разбиении последней на вклады мод ближнего поля и радиационных мод, получаем [9]:

$$P^{eq}(l, T) = P_0(l) + P^{eq}_{th}(l, T); \quad (4.5)$$

$$P_0(l) = \frac{\hbar}{2\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\xi \xi^3 \int_1^\infty dp p^2 g(p, i\xi); \quad (4.6)$$

$$P^{eq}_{th}(l, T) = -\frac{\hbar}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \Pi(\omega, T) \int_0^{\omega/c} dk k \tilde{q}_0 \sum_{\mu=e,m} \frac{\operatorname{Re}(\Delta_{1\mu} \Delta_{2\mu} \exp(2i\tilde{q}_0 l)) - |\Delta_{1\mu} \Delta_{2\mu}|^2}{|D_\mu|^2} + \quad (4.7)$$

$$+ \frac{\hbar}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \Pi(\omega, T) \int_{\omega/c}^\infty dk k q_0 \exp(-2lq_0) \sum_{\mu=e,m} \frac{\operatorname{Im}(\Delta_{1\mu} \Delta_{2\mu})}{|D_\mu|^2}$$

Более подробное обсуждение формул (4.1)-(4.7) и основных асимптотик, вытекающих из них, можно найти в обзоре [11].

## 4.2. «Термодинамический парадокс» теории Лифшица

Так называемый «термодинамический парадокс» теории Лифшица связан с нарушением термодинамической теоремы Нернста, согласно которой энтропия системы при  $T = 0$  должна обращаться в нуль. Определяя давление Казимира через регуляризованную часть плотности свободной энергии электромагнитного поля между пластинами,  $P = -(\partial \tilde{F}_{reg} / \partial z)_T$  [3], можно связать энтропию системы  $S = -(\partial \tilde{F}_{reg} / \partial z)_T$  с тепловой частью силы Казимира (4.1) или (4.7). Первые затруднения теории, связанные с низкотемпературной асимптотикой этих формул, возникли в работах [79, 80], в которых расчеты сил проводились с помощью различных диэлектрических функций. Оказалось [79], что расчет в рамках теории Лифшица с использованием модели Друде, в которой для нормальных металлов низкочастотная асимптотика диэлектрической проницаемости имеет вид  $\varepsilon(\omega) \sim \omega^{-1}$ , приводит к вдвое меньшей величине теплового давления Казимира в пределе высоких температур по сравнению с известным результатом квантовой электродинамики для идеально проводящих пластин [155]:

$$P = -\frac{k_B T \zeta(3)}{4\pi z^3}, \quad (4.8)$$

где  $\zeta(3) = 1.202$  – дзета-функция Римана. Кроме того, из расчетов [79] вытекают слишком большие тепловые поправки к силам Казимира при малых  $z$ : примерно в 500 раз выше по сравнению со случаем идеально проводящих пластин [6]. С другой стороны, несколько позже было установлено [83], что модель Друде нарушает теорему Нернста, так как предсказывает ненулевую энтропию системы при  $T = 0$ . Драматизм данной ситуации оказался еще заметнее в случае диэлектриков, – материалов, для которых теория Лифшица изначально формулировалась: учет конечной проводимости, которой обладают все диэлектрики при  $T = 0$ , также нарушает теорему Нернста.

Для преодоления возникших затруднений в случае металлических материалов пластин авторы [82, 83] предложили использовать плазменную модель диэлектрической функции, в которой  $\varepsilon(\omega) \sim \omega^{-2}$  при  $\omega \rightarrow 0$ . Плазменная модель согласуется с (4.8) и обеспечивает выполнение теоремы Нернста [156, 157]. В случае диэлектриков трудности с теоремой Нернста преодолеваются использованием диэлектрической функции вида (на мнимых частотах)  $\varepsilon(i\xi) = 1 + \sum_j g_j / (\omega_j^2 + \xi^2)$ , где  $\omega_j$  и  $g_j$  – частоты и силы осцилляторов, но эта модель не учитывает наличия у диэлектриков малой проводимости  $\sigma(T) \sim \exp(-C/k_B T) \rightarrow 0$  при  $T \rightarrow 0$ , что радикально ухудшает ситуацию. В отличие от этого, авторы [79] модернизировали модель Друде введением примесных решеточных

включений, благодаря которым имеется конечная релаксация и остаточная проводимость при  $T = 0$ , поэтому трудности теории тоже удастся преодолеть. В недавней работе [158] было строго показано, что диэлектрическая проницаемость пластины в модели Друде не противоречит термодинамике, если частота релаксации  $\nu$  носителей заряда отлична от нуля при  $T = 0$ . Более того, авторы привели ряд аргументов в пользу коэффициента 8 в знаменателе (4.8). С этим подходом согласуются и результаты нашего расчета энтропии, выполненные в конфигурации 1 [10, 150]. В этом случае энтропия находится дифференцированием формулы (3.84) по температуре. О возможном разрешении термодинамического парадокса благодаря учету пространственной дисперсии диэлектрической проницаемости сообщалось также в работе [84].

В свою очередь, авторами [159, 160] был предложен альтернативный подход, учитывающий влияние эффектов экранирования и диффузионных токов. В рамках этой теории, наряду с макроскопической диэлектрической проницаемостью, материал пластины характеризуется наличием микроскопической плотности свободных носителей заряда. Тем не менее, этот подход, как показано в [85, 86], также нарушает теорему Нернста и, кроме того, не согласуется с измерениями сил Казимира в недавних экспериментах [161, 162].

Анализ данной проблемы, выполненный недавно авторами [85, 86], привел их к заключению о том, что нарушение теоремы Нернста является следствием нарушения условий применимости теории Лифшица в том случае, когда модель диэлектрической функции учитывает свободные носители заряда, участвующие в образовании токов проводимости или диффузионных. Как полагают авторы, неизбежная генерация джоулева тепла в пластинах, обусловленная возникновением тока проводимости, вызывает всесторонний отток тепла из области генерации, поэтому условие полного теплового равновесия в теории Лифшица, предполагающее отсутствие каких-либо тепловых потоков, автоматически не имеет места.

В настоящее время проблема продолжает интенсивно дискутироваться, а ее разрешение имеет принципиальное значение, поскольку обоснование корректности применения той или иной модели диэлектрической проницаемости влечет за собой изменение результатов расчета не только тепловой, но и «холодной» части силы Казимира. Соответственно, от этого критически зависит интерпретация недавних и будущих экспериментов по измерениям сил Казимира.

### 4.3. Неравновесная сила Казимира

Неравновесные силы Казимира в статическом случае рассчитывались в работах [9, 67, 69, 73, 74]. Самостоятельная роль вакуума между пластинами конечной толщины (рис. 2) в этих работах не учитывалась, однако в [9] предполагалось, что с внешних сторон прилегающий вакуумный фон имеет температуру соответствующей пластины. Материалы и температуры пластин принимались различными. Общее выражение для тепловой части давления Казимира, полученное авторами [9], имеет вид (как и в (4.3), (4.7), мы используем обозначения коэффициентов отражения, принятые в разделе 3):

$$P_{th}^{neq,PW}(T_1, T_2, l) = \frac{P_{th}^{eq,PW}(T_1, l)}{2} + \frac{P_{th}^{eq,PW}(T_2, l)}{2} - \frac{2\sigma(T_1^4 + T_2^4)}{3c} + \Delta P_{th}^{PW}(T_1, l) - \Delta P_{th}^{PW}(T_2, l) \quad (4.9)$$

$$P_{th}^{neq,EW}(T_1, T_2, l) = \frac{P_{th}^{eq,EW}(T_1, l)}{2} + \frac{P_{th}^{eq,EW}(T_2, l)}{2} + \Delta P_{th}^{EW}(T_1, l) - \Delta P_{th}^{EW}(T_2, l) \quad (4.10)$$

$$\Delta P^{PW}_{th}(T, l) = -\frac{\hbar}{4\pi^2} \int_0^\infty d\omega \Pi(\omega, T) \int_0^{\omega/c} dk k \tilde{q}_0 \sum_{\mu=e, m} \frac{|\Delta_{2\mu}|^2 - |\Delta_{1\mu}|^2}{|D_\mu|^2} \quad (4.11a)$$

$$\Delta P^{EW}_{th}(T, l) = \frac{\hbar}{2\pi^2} \int_0^\infty d\omega \Pi(\omega, T) \int_{\omega/c}^\infty dk k q_0 \exp(-2lq_0) \sum_{\mu=e, m} \frac{\text{Im} \Delta_{1\mu} \text{Re} \Delta_{2\mu} - \text{Im} \Delta_{2\mu} \text{Re} \Delta_{1\mu}}{|D_\mu|^2}. \quad (4.11б)$$

В приведенных формулах  $\Pi(\omega, T) = (\exp(\hbar\omega/k_B T) - 1)^{-1}$ ; индексы “EW” и “PW” обозначают вклады ближних и радиационных мод пластин; равновесные вклады в давление  $P_{th}^{eq, PW}(T, l)$  и  $P_{th}^{eq, EW}(T, l)$  определяются первым и вторым слагаемым формулы (4.7);  $\sigma = \pi^2 k_B^4 / 60c^2 \hbar^3$  – постоянная Стефана–Больцмана. Для одинаковых материалов пластин формулы (4.11) и (4.12) дают нулевые вклады, поэтому, без учета в (4.9) третьего слагаемого, давление Казимира оказывается равным полусумме равновесных давлений в системе пластин, взятых при температурах  $T_1$  и  $T_2$ . В этом случае результаты работ [9] и [72] совпадают. Однако для различных материалов пластин это не так. Авторы [9] считают результаты расчета [72] недостаточно корректными.

В отличие от давления Казимира в равновесном случае (формула (4.1)), вклад радиационных мод (4.9) содержит «ветровые» вклады, не зависящие от расстояния, причем они присутствуют даже при  $T_1 = T_2$ , если материалы пластин различны. Как показано в [9], для устранения этого противоречия при переходе к случаю полного теплового равновесия необходимо учесть дополнительное давление с внешней стороны пластин, учитываемое в теории Лифшица для полупространств при процедуре регуляризации свободной энергии системы, но не учтенное в формулах (4.9)-(4.12).

Возможность применения (4.9)-(4.12) к конфигурации 1 в пределе разреженной среды для вещества одной из пластин (см. далее п.4.5) представляется весьма интересной, но требует специального рассмотрения. К сожалению, авторы [9] ограничились только анализом асимптотики неравновесной силы в случае больших расстояний частицы от поверхности. В этом случае им удалось показать, что асимптотика (3.99) и (4.10) в пределе больших расстояний  $l$  совпадает, если вакуум и частица предполагаются холодными, причем частица не поглощает излучение.

#### 4.4. Теплообмен покоящихся пластин

Теплообмен покоящихся пластин рассматривался многими авторами [59-64]. Тепловой поток между ними, отнесенный к единице площади, выражается через статистически усредненный вектор Пойнтинга и в наших обозначениях имеет вид:

$$S = \frac{\hbar}{4\pi^2} \int_0^\infty d\omega \omega [\Pi(\omega, T_1) - \Pi(\omega, T_2)] \cdot \sum_{\mu=e, s} \left[ \int_0^{\omega/c} dk k \frac{(1 - |\Delta_{1\mu}|^2)(1 - |\Delta_{2\mu}|^2)}{|D_\mu|^2} + 4 \int_{\omega/c}^\infty dk k \frac{\text{Im} \Delta_{1\mu} \text{Im} \Delta_{2\mu} \exp(-2q_0 l)}{|D_\mu|^2} \right] \quad (4.12)$$

Первое слагаемое в (4.12) не зависит от расстояния  $l$  и описывает тепловой поток, переносимый радиационными модами. В пределе черного материала пластин  $\Delta_{1\mu} = \Delta_{2\mu} = 0$  соответствующий вклад определяется разностью тепловых потоков, идущих от одной пластины к другой – результат классической теории излучения в соответствии с законом Стефана–Больцмана. Второе слагаемое в (4.12) описывает поток излуче-



ния, переносимый нерадиационными модами. В незападывающем пределе  $c \rightarrow \infty$  первое слагаемое в (4.12) исчезает, и результирующая формула принимает вид:

$$S = \frac{\hbar}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \omega [\Pi(\omega, T_1) - \Pi(\omega, T_2)] \sum_{\mu=e,s} \left[ \int_0^\infty dk k \frac{\text{Im} \Delta_{1\mu} \text{Im} \Delta_{2\mu} \exp(-2kl)}{|1 - \Delta_{1\mu} \Delta_{2\mu} \exp(-2kl)|^2} \right], \quad (4.13)$$

причем коэффициенты  $\Delta_{1\mu}$  и  $\Delta_{2\mu}$  следует брать в пределе  $c \rightarrow \infty$ .

Формулы (4.12) и (4.13) соответствуют стандартному локальному виду диэлектрических проницаемостей, принятому в теории Лифшица. В последнее время обсуждаются также и возможные модификации амплитуд отражения, учитывающие нелокальный характер диэлектрических проницаемостей [143-145].

В заключение этого раздела заметим, что существенным недостатком формулы (4.12) является полное отсутствие специфики вакуумного фона как между пластинами, так и вне их, если они имеют конечную толщину. Между тем, как следует из п.4.3, учет состояния вакуумного фона является существенным при расчете силы Казимира. По этой причине корректный предельный переход от формулы (4.12) к изолированной пластине, обменивающейся теплом с вакуумным фоном, имеющим произвольную температуру, или к конфигурации малая частица – вакуумный фон, оказывается невозможным. Это еще раз подчеркивает самостоятельное значение конфигурации 1 в теории ФЭВ.

#### 4.5. Предельный переход от конфигурации 2 к конфигурации 1 (предел разреженной среды)

Существование предельного перехода от конфигурации двух параллельных пластин к конфигурации малая частица – пластина (переход «2 → 1») в статическом случае было установлено еще Е.М. Лифшицем [20]. С тех пор в неизменном виде он применялся для расчета эффектов ФЭВ в конфигурации 1 не только в равновесных, но и в неравновесных условиях [7, 22, 23]. Однако адекватность таких обобщений не является очевидной [55]. В частности, из формулы (4.1) можно получить (3.83) [154], но нельзя получить дополнительный вклад (3.97) [70, 71]. Это заключение имеет место и при сравнении результатов [7, 22] для нерелятивистской тангенциальной силы с (3.73) в линейном разложении по скорости частицы [70, 71].

Тем не менее, наличие общего решения в конфигурации 1, полученного независимым образом (п.3), создает предпосылки для модификации рецепта предельного перехода между обеими конфигурациями так, чтобы его можно было адекватно использовать в некоторых случаях даже двусторонним образом: «1 ↔ 2». Это позволяет применить общее решение, полученное в конфигурации 1, для анализа неравновесных конфигураций 2 [53, 148]. Соответствующие результаты для конфигурации 2 могут затем использоваться как реперные при разработке общей релятивистской теории в конфигурации 2.

Обозначая величины, относящиеся к различным конфигурациям, индексами 1, 2, правило вычисления силы Казимира–Полдера  $F_z^{(1)}(z)$ , действующей на частицу (атом), находящийся на расстоянии  $z$  от пластины, гласит [9, 154]

$$F_z^{(1)}(z) = -\frac{1}{n_1 S} \frac{dF_z^{(2)}(l)}{dl} \Big|_{l=z}, \quad (4.21)$$

где  $F_z^{(2)}(l)/S$  сила Казимира в конфигурации 2, отнесенная к площади  $S$  вакуумного контакта между пластинами, разделенными щелью с шириной  $l$ . Аналогично (4.21), со-

отношения между тангенциальными силами  $F_x^{(1,2)}$  и скоростями нагрева  $dQ^{(1,2)}/dt$  в конфигурациях 1 и 2 имеют вид:

$$F_x^{(1)}(z) = -\frac{1}{n_1 S} \frac{dF_x^{(2)}(l)}{dl} \Big|_{l=z}, \quad dQ^{(1)}(z)/dt = -\frac{1}{n_1 S} \frac{d\dot{Q}^{(2)}(l)}{dl} \Big|_{l=z}. \quad (4.22)$$

Соотношения (4.21), (4.22) должны дополняться следующими соотношениями между амплитудами отражения  $\Delta_{e,m}$  и поляризуемостями  $\alpha_{e,m}$  частицы, соответствующими разреженному веществу пластины [53, 148]:

$$\Delta_{1e}(\omega) \rightarrow \frac{\pi n_1}{q_0} [\alpha_e(\omega)(2k^2 - \omega^2/c^2) + \alpha_m(\omega)\omega^2/c^2]; \quad (4.23)$$

$$\Delta_{1m}(\omega) \rightarrow \frac{\pi n_1}{q_0} [\alpha_m(\omega)(2k^2 - \omega^2/c^2) + \alpha_e(\omega)\omega^2/c^2]. \quad (4.24)$$

В отличие от (4.23), (4.24), в работах [7, 22, 23] используются соотношения  $\Delta_{1e}(\omega) \rightarrow 2\pi n_1 \alpha_e(\omega)$ ,  $\Delta_{1m}(\omega) \rightarrow 2\pi n_1 \alpha_m(\omega)$ , справедливые только в случае пренебрежения запаздыванием. Применение «принципа соответствия» конфигураций 1, 2 и соотношений (4.21)-(4.24) впервые позволило получить самосогласованные результаты для обеих конфигураций при нерелятивистском относительном движении пластин в случае теплового равновесия [53, 148].

#### 4.6. Силы ФЭВ и скорость радиационного теплообмена пластин при нерелятивистском относительном движении: незапаздывающее взаимодействие

Будем исходить из нерелятивистских формул (3.54)-(3.56). Используя (3.55), запишем вначале выражение для силы притяжения частицы к пластине при  $V = 0, T_1 = T_2 = T$ :

$$F_z^{(1)}(z) = -\frac{\hbar}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y k^2 \exp(-2kz) \left[ \begin{aligned} &\Delta''(\omega) \alpha'_e(\omega) \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T}\right) + \\ &+ \Delta'(\omega) \alpha''_e(\omega) \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T}\right) \end{aligned} \right] \quad (4.25)$$

Сопоставляя (4.25) с (3.55), можно видеть, что переход к неравновесным динамическим и тепловым состояниям взаимодействующих подсистем для конфигурации 1 осуществляется с помощью преобразований:

$$\begin{aligned} \Delta''(\omega) \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T}\right) &\rightarrow \Delta''(\omega) \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T_2}\right), \\ \alpha''_e(\omega) \coth\left(\frac{\hbar \omega}{2k_B T}\right) &\rightarrow \alpha''_e(\omega^+) \coth\left(\frac{\hbar \omega^+}{2k_B T_1}\right), \\ \alpha'_e(\omega), \alpha''_e(\omega) &\rightarrow \alpha'_e(\omega^+), \alpha''_e(\omega^+) \end{aligned} \quad (4.26)$$

С другой стороны, сравнение (3.55) и (3.54) показывает, что тангенциальная сила  $F_x$  получается из (3.55) с помощью преобразований

$$\begin{aligned} d^2 k k &\rightarrow d^2 k k_x, \quad \Delta''(\omega) \rightarrow \Delta''(\omega), \quad \Delta'(\omega) \rightarrow \Delta''(\omega), \\ \alpha'_e(\omega^+) &\rightarrow \alpha''_e(\omega^+), \quad \alpha''_e(\omega^+) \rightarrow -\alpha''_e(\omega^+) \end{aligned} \quad (4.27)$$

Наконец, из (3.55) и (3.57) следует, что  $dQ/dt$  получается из  $F_x$  преобразованием

$$d^2kk_x \rightarrow -d^2k\omega^+ . \quad (4.28)$$

В соответствии с «принципом соответствия», поскольку формулы (3.54)-(3.56) должны вытекать из аналогичных формул в конфигурации 2 с помощью линейного преобразования (4.21), (4.22) при  $\varepsilon_1(\omega) - 1 = 4\pi n_1 \alpha_1(\omega) \rightarrow 0$ , то величины  $F_x^{(2)}(l)$ ,  $F_z^{(2)}(l)$ ,  $\dot{Q}^{(2)}(l)$  должны быть связаны соотношениями, аналогичными (4.26)-(4.28), путем замены  $\alpha_e(\omega) \rightarrow \Delta_1(\omega)$ .

Теперь запишем выражение для незапаздывающей силы Ван-дер-Ваальса между параллельными пластинами при  $V = 0, T_1 = T_2 = T$ , которое целесообразно представить в виде:

$$F_z^{(2)}(l) = -\frac{\hbar S}{4\pi^3} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y k \frac{\exp(-2kl)}{|1 - \exp(-2kl)\Delta_1(\omega)\Delta_2(\omega)|^2} \cdot [\Delta_1''(\omega)\Delta_2'(\omega) \coth(\hbar\omega/2k_B T) + \Delta_1'(\omega)\Delta_2''(\omega) \coth(\hbar\omega/2k_B T)] \quad (4.29)$$

где  $\Delta_1(\omega) = \frac{\varepsilon_1(\omega) - 1}{\varepsilon_1(\omega) + 1}$  и  $\Delta_2(\omega) = \frac{\varepsilon_2(\omega) - 1}{\varepsilon_2(\omega) + 1}$ ;  $\varepsilon_{1,2}(\omega)$  обозначают диэлектрические проницаемости пластин 1 и 2 соответственно. Нетрудно убедиться в том, что формула (4.2) в пределе  $c \rightarrow \infty$  совпадает с (4.29). Выполняя в (4.29) преобразования

$$\begin{aligned} \Delta_2''(\omega) \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) &\rightarrow \Delta_2''(\omega) \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T_2}\right), \\ \Delta_1''(\omega) \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) &\rightarrow \Delta_1''(\omega^+) \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_B T_1}\right), \\ \Delta_1'(\omega), \Delta_1''(\omega) &\rightarrow \Delta_1'(\omega^+), \Delta_1''(\omega^+), \end{aligned} \quad (4.30)$$

немедленно приходим к выражению для силы притяжения пластин в неравновесной конфигурации 2:

$$F_z^{(2)}(l) = -\frac{\hbar S}{4\pi^3} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y k \frac{\exp(-2kl)}{|1 - \exp(-2kl)\Delta_1(\omega^+)\Delta_2(\omega)|^2} \cdot [\Delta_1''(\omega^+)\Delta_2'(\omega) \coth(\hbar\omega^+/2k_B T_1) + \Delta_1'(\omega^+)\Delta_2''(\omega) \coth(\hbar\omega/2k_B T_2)] \quad (4.31)$$

Аналогично (3.54), (3.55), для того, чтобы найти  $F_x^{(2)}$ , в формуле (4.31) нужно выполнить следующие преобразования:

$$\begin{aligned} d^2kk &\rightarrow d^2kk_x, \Delta_2''(\omega) \rightarrow \Delta_2''(\omega), \Delta_2'(\omega) \rightarrow \Delta_2''(\omega), \\ \Delta_1'(\omega^+) &\rightarrow \Delta_1''(\omega^+), \Delta_1''(\omega^+) \rightarrow -\Delta_1''(\omega^+) \end{aligned}, \quad (4.30a)$$

после чего получаем

$$F_x^{(2)}(l) = -\frac{\hbar S}{4\pi^3} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y k_x \frac{\exp(-2kl)}{|1 - \exp(-2kl)\Delta_1(\omega^+)\Delta_2(\omega)|^2} \Delta_1''(\omega^+)\Delta_2''(\omega) \cdot [\coth(\hbar\omega/2k_B T_2) - \coth(\hbar\omega^+/2k_B T_1)] \quad (4.32)$$

Наконец, выполняя преобразование  $d^2kk_x \rightarrow -d^2k\omega^+$  в (4.32), находим  $\dot{Q}^{(2)}$ :

$$\dot{Q}^{(2)}(l) = \frac{\hbar S}{4\pi^3} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \omega^+ \frac{\exp(-2kl)}{|1 - \exp(-2kl)\Delta_1(\omega^+)\Delta_2(\omega)|^2} \Delta_1''(\omega^+)\Delta_2''(\omega) \cdot \left[ \coth(\hbar\omega/2k_B T_2) - \coth(\hbar\omega^+/2k_B T_1) \right] \quad (4.33)$$

Отметим, что скорости нагрева  $\dot{Q}^{(1,2)}$  (формулы (3.56) и (4.33)) обусловлены не только различием температур тел, но также являются результатом превращения работы латеральных сил  $F_x^{(1,2)}$  в тепло. Используя правила перехода (4.21)-(4.22), нетрудно видеть, что формулы (3.54)-(3.56) непосредственно вытекают из (4.31)-(4.33), а при  $V = 0$  (4.33) совпадает с (4.13).

При учете магнитных свойств пластин в правых частях (4.31)-(4.33) добавляются аналогичные слагаемые, имеющие такую же структуру, с заменой  $\Delta_{1,2}(\omega) = \frac{\varepsilon_{1,2}(\omega) - 1}{\varepsilon_{1,2}(\omega) + 1}$  на

$$\Delta_{1,2}(\omega) = \frac{\mu_{1,2}(\omega) - 1}{\mu_{1,2}(\omega) + 1}.$$

#### 4.7. Силы ФЭВ и скорость радиационного теплообмена пластин при нерелятивистском относительном движении: запаздывающее взаимодействие

Теперь получим более общие выражения для  $F_x^{(2)}(l), F_z^{(2)}(l), Q^{(2)}(l)$  с учетом эффекта запаздывания. Будем также считать, что пластины обладают произвольными магнитоэлектрическими свойствами, однако, в силу сказанного в п.3.2, ограничимся рассмотрением случая теплового равновесия при температуре  $T$  (рис. 2). Тогда, выполняя в (3.73)-(3.75) подстановки  $T_1 = T_2 = T_3 = T$ ,  $\beta = V/c \rightarrow 0$ ,  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2} \rightarrow 1$ , получим:

$$F_x^{(1)}(z) = -\frac{\hbar}{2\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y k_x \cdot \left\{ \alpha_e''(\omega^+) \operatorname{Im} \left[ \frac{\exp(-2q_0 z)}{q_0} R_e(\omega, \mathbf{k}) \right] \cdot \left[ \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_B T}\right) \right] + (e \rightarrow m) \right\} \quad (4.34)$$

$$F_z^{(1)}(z) = -\frac{\hbar}{2\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \cdot \left\{ \alpha_e''(\omega^+) \operatorname{Re}[\exp(-2q_0 z) R_e(\omega, \mathbf{k})] \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_B T}\right) + \alpha_e'(\omega^+) \operatorname{Im}[\exp(-2q_0 z) R_e(\omega, \mathbf{k})] \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) + (e \leftrightarrow m) \right\} \quad (4.35)$$

$$\frac{dQ^{(1)}(z)}{dt} = \frac{\hbar}{2\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \omega^+ \cdot \left\{ \alpha_e''(\omega) \operatorname{Im} \left[ \frac{\exp(-2q_0 z)}{q_0} R_e(\omega, \mathbf{k}) \right] \cdot \left[ \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_B T}\right) \right] + (e \rightarrow m) \right\} \quad (4.36)$$

$$R_e(\omega, \mathbf{k}) = \Delta_{2e}(\omega)(2k^2 - \omega^2/c^2) + \Delta_{2m}(\omega)\omega^2/c^2; \quad (4.37)$$

$$R_m(\omega, \mathbf{k}) = \Delta_{2m}(\omega)(2k^2 - \omega^2/c^2) + \Delta_{2e}(\omega)\omega^2/c^2, \quad (4.38)$$

где слагаемые ( $e \leftrightarrow m$ ) определяются идентичными выражениями с заменой индексов  $e \leftrightarrow m$ , а индекс «2» в (4.37),(4.38) обозначает свойства материала второй пластины. Следует также отметить, что присутствие в (4.34)-(4.36) членов, связанных с магнитной поляризацией пластин, в дальнейшем имеет принципиальное значение.

Для учета вкладов магнитных свойств тел предел разреженной среды  $\epsilon_1(\omega) - 1 = 4\pi n_1 \alpha_e(\omega) \rightarrow 0$  должен дополняться аналогичным пределом  $\mu_1(\omega) - 1 = 4\pi n_1 \alpha_m(\omega) \rightarrow 0$ . Однако из анализа структуры подынтегральных выражений в формулах (4.34)-(4.36) видно, что преобразования  $\Delta_e(\omega) \rightarrow 2\pi n_1 \alpha_e(\omega)$ ,  $\Delta_m(\omega) \rightarrow 2\pi n_1 \alpha_m(\omega)$ , применяющиеся в отсутствие эффекта запаздывания [7,22], нужно модифицировать в соответствии с формулами (4.23), (4.24) [53, 148]. Тогда, с учетом (4.21)-(4.24), величины  $F_x^{(2)}(l), F_z^{(2)}(l), Q^{(2)}(l)$  принимают вид:

$$F_x^{(2)}(l) = -\frac{\hbar S}{4\pi^3} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y k_x \cdot \left[ \frac{\text{Im} \Delta_{1e}(\omega^+) \text{Im}(\exp(-2q_0 l) \Delta_{2e}(\omega))}{|1 - \exp(-2q_0 l) \Delta_{1e}(\omega^+) \Delta_{2e}(\omega)|^2} + \frac{\text{Im} \Delta_{1m}(\omega^+) \text{Im}(\exp(-2q_0 l) \Delta_{2m}(\omega))}{|1 - \exp(-2q_0 l) \Delta_{1m}(\omega^+) \Delta_{2m}(\omega)|^2} \right] \cdot \left[ \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_B T}\right) \right] \quad (4.39)$$

$$F_z^{(2)}(l) = -\frac{\hbar S}{4\pi^3} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \cdot \left[ \left( \frac{\text{Im} \Delta_{1e}(\omega^+) \text{Re}(q_0 \exp(-2q_0 l) \Delta_{2e}(\omega))}{|1 - \exp(-2q_0 l) \Delta_{1e}(\omega^+) \Delta_{2e}(\omega)|^2} \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_B T}\right) + \frac{\text{Im} \Delta_{1m}(\omega^+) \text{Re}(q_0 \exp(-2q_0 l) \Delta_{2m}(\omega))}{|1 - \exp(-2q_0 l) \Delta_{1m}(\omega^+) \Delta_{2m}(\omega)|^2} \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_B T}\right) \right) + \left( \frac{\text{Re} \Delta_{1e}(\omega^+) \text{Im}(q_0 \exp(-2q_0 l) \Delta_{2e}(\omega))}{|1 - \exp(-2q_0 l) \Delta_{1e}(\omega^+) \Delta_{2e}(\omega)|^2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) + \frac{\text{Re} \Delta_{1m}(\omega^+) \text{Im}(q_0 \exp(-2q_0 l) \Delta_{2m}(\omega))}{|1 - \exp(-2q_0 l) \Delta_{1m}(\omega^+) \Delta_{2m}(\omega)|^2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \right) \right] \quad (4.40)$$

$$Q^{(2)}(l) = \frac{\hbar S}{4\pi^3} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \omega^+ \cdot \left[ \frac{\text{Im} \Delta_{1e}(\omega^+) \text{Im}(\exp(-2q_0 l) \Delta_{2e}(\omega))}{|1 - \exp(-2q_0 l) \Delta_{1e}(\omega^+) \Delta_{2e}(\omega)|^2} + \frac{\text{Im} \Delta_{1m}(\omega^+) \text{Im}(\exp(-2q_0 l) \Delta_{2m}(\omega))}{|1 - \exp(-2q_0 l) \Delta_{1m}(\omega^+) \Delta_{2m}(\omega)|^2} \right] \cdot \left[ \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_B T}\right) \right] \quad (4.41)$$

$$\Delta_{ie}(\omega) = \frac{q_0 \varepsilon_i(\omega) - q_i}{q_0 \varepsilon(\omega) + q_i}, \quad \Delta_{im}(\omega) = \frac{q_0 \mu_i(\omega) - q_i}{q_0 \mu_i(\omega) + q_i}, \quad i = 1, 2 \quad (4.42)$$

$$q_0 = (k^2 - \omega^2 / c^2)^{1/2}, \quad k^2 = |\mathbf{k}|^2 = k_x^2 + k_y^2, \quad q_i = (k^2 - (\omega^2 / c^2) \varepsilon_i(\omega) \mu_i(\omega))^{1/2}, \quad (4.43)$$

где индекс  $i = 1, 2$  нумерует пластины,  $\varepsilon_i(\omega)$  и  $\mu_i(\omega)$  – соответствующие им диэлектрические и магнитные проницаемости материалов. Нетрудно видеть, что при  $V = 0$  формула (4.40) совпадает с (4.2), а при  $V > 0$  и  $c \rightarrow \infty$  формулы (4.39)-(4.41) переходят в (4.31)-(4.33).

К сожалению, для релятивистских скоростей  $\beta = V/c \sim 1$ ,  $\gamma \gg 1$  и  $T_1 \neq T_2$  использование «принципа соответствия» « $1 \leftrightarrow 2$ » представляется не столь очевидным. Однако ближнепольные вклады ( $k > \omega/c$ ) в формулах (4.39)-(4.41) остаются в силе и при  $T_1 \neq T_2$  в силу независимости ближних поверхностных мод от состояния вакуумного фона.

#### 4.7. Проблема релятивистского обобщения теории

Как уже отмечалось в п.3.1, постановка общей релятивистской задачи в конфигурации 2, в отличие от конфигурации 1, не является четко определенной, и в этом ее принципиальный недостаток. Даже на примере неравновесной силы Казимира в п.4.3 видно, что учет вакуумного фона с внешней стороны пластин играет существенную роль. Очевидно, что в общем случае вакуум между нагретыми пластинами, вообще говоря, также не должен считаться холодным (п.4.4). С другой стороны, движение одной из пластин выделяет ее по отношению к вакуумному фону, который не может считаться покоящимся относительно обеих пластин одновременно. Именно по этим причинам при получении релятивистских формул (4.39)-(4.41) для конфигурации 2 в п.4.6 мы ограничились случаем полного теплового равновесия и нерелятивистской скоростью движущейся пластины. В работах других авторов, относящихся к релятивистской конфигурации 2 [43-45, 7, 22, 23, 27], этот аспект проблемы ФЭВ вообще не обсуждается. В контексте данной статьи наибольший интерес представляет обсуждение работ [23, 27], появившихся в самое последнее время, которым мы и ограничимся.

Так, авторами [23] предложен релятивистский вариант теории ФЭВ для полубесконечных пластин с температурами  $T_1$  и  $T_2$ , движущихся с произвольной относительной скоростью  $V$ . Силы взаимодействия пластин находились с помощью максвелловского тензора натяжений электромагнитного поля, а скорость теплообмена – путем вычисления вектора Пойнтинга. Обе величины подвергались статистическому усреднению. Результирующие формулы для сил  $F_x, F_z$  и теплового потока  $S_1$ , получаемого покоящейся пластиной, (в обозначениях [23] движется вторая пластина), имеют вид (все величины отнесены к единице площади вакуумного контакта):

$$\begin{aligned} F_x = & \frac{\hbar}{8\pi^3} \int_0^\infty d\omega \int_{q < k} d^2 q \frac{q_x}{|\Delta|^2} \left[ (k^2 - \beta k q_x)^2 - \beta^2 q_0^2 q_y^2 \right] \cdot \\ & \cdot \left[ (k^2 - \beta k q_x)^2 (1 - |R_{1e}|^2)(1 - |R'_{2e}|^2) |D_{mm}|^2 - \right. \\ & \left. - \beta^2 q_0^2 q_y^2 (1 - |R_{1e}|^2)(1 - |R'_{2m}|^2) |D_{me}|^2 + (e \leftrightarrow m) \right] \cdot (\Pi(\omega', T_2) - \Pi(\omega, T_1)) + \\ & + \frac{\hbar}{2\pi^3} \int_0^\infty d\omega \int_{q > k} d^2 q \frac{q_x}{|\Delta|^2} \left[ (k^2 - \beta k q_x)^2 - \beta^2 q_0^2 q_y^2 \right] \exp(-2q_0 l) \cdot \\ & \cdot \left[ (k^2 - \beta k q_x)^2 \operatorname{Im} R_{1e} \operatorname{Im} R'_{2e} |D_{mm}|^2 + \beta^2 q_0^2 q_y^2 \operatorname{Im} R_{1e} \operatorname{Im} R'_{2m} |D_{me}|^2 + (e \leftrightarrow m) \right] \cdot \\ & \cdot (\Pi(\omega', T_2) - \Pi(\omega, T_1)) \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$F_z = -\frac{\hbar}{4\pi^3} \operatorname{Re} \int_0^\infty d\omega \int d^2q \frac{\tilde{q}_0}{\Delta} \exp(2i\tilde{q}_0 l) \left\{ (k^2 - \beta k q_x)^2 [R_{1e} R'_{2e} D_{mm} + R_{1m} R'_{2m} D_{ee}] + \right. \\ \left. + \beta^2 q_0^2 q_y^2 [R_{1e} R'_{2m} D_{me} + R_{1m} R'_{2e} D_{es}] \right\} \cdot (4.45) \\ \cdot [1 + \Pi(\omega, T_1) + \Pi(\omega', T_2)]$$

$$S_1 = \frac{\hbar}{8\pi^3} \int_0^\infty d\omega \int_{q < k} d^2q \frac{\omega}{|\Delta|^2} \left[ (k^2 - \beta k q_x)^2 - \beta^2 q_0^2 q_y^2 \right] \cdot \\ \cdot \left[ (k^2 - \beta k q_x)^2 (1 - |R_{1e}|^2) (1 - |R'_{2e}|^2) |D_{mm}|^2 - \right. \\ \left. - \beta^2 q_0^2 q_y^2 (1 - |R_{1e}|^2) (1 - |R'_{2m}|^2) |D_{me}|^2 + (e \leftrightarrow m) \right] (\Pi(\omega', T_2) - \Pi(\omega, T_1)) + \\ + \frac{\hbar}{2\pi^3} \int_0^\infty d\omega \int_{q > k} d^2q \frac{\omega}{|\Delta|^2} \left[ (k^2 - \beta k q_x)^2 - \beta^2 q_0^2 q_y^2 \right] \exp(-2q_0 l) \cdot (4.46) \\ \cdot \left[ (k^2 - \beta k q_x)^2 \operatorname{Im} R_{1e} \operatorname{Im} R'_{2e} |D_{mm}|^2 + \beta^2 q_0^2 q_y^2 \operatorname{Im} R_{1e} \operatorname{Im} R'_{2m} |D_{me}|^2 + (e \leftrightarrow m) \right] \cdot \\ \cdot (\Pi(\omega', T_2) - \Pi(\omega, T_1))$$

$$\Delta = (k^2 - \beta k q_x)^2 D_{mm} D_{ee} - \beta^2 q_0^2 q_y^2 D_{em} D_{me} (4.47)$$

$$D_{ee} = 1 - R_{1e} R'_{2e} \exp(2i\tilde{q}_0 l), \quad D_{mm} = 1 - R_{1m} R'_{2m} \exp(2i\tilde{q}_0 l) \\ D_{me} = 1 + R_{1m} R'_{2e} \exp(2i\tilde{q}_0 l), \quad D_{em} = 1 + R_{1e} R'_{2m} \exp(2i\tilde{q}_0 l) (4.48)$$

При записи формул (4.44)-(4.46) мы почти сохранили исходные обозначения авторов, заменив  $k_z$  (в обозначениях [23]) на  $\tilde{q}_0$ ,  $k_z^2$  на  $-q_0^2$  ( $q_0$  и  $\tilde{q}_0$  определяются в (3.78)), и произведя замену нижних индексов " $p \rightarrow e, s \rightarrow m$ " в амплитудах отражения  $R_{i\mu}, i = 1, 2; \mu = p, s$ , и идентичных амплитудам  $\Delta_{i\mu}$  в формулах п.4.6. Заметим еще, что штрихованные величины в (4.44)-(4.48) учитывают доплеровские сдвиги частоты и проекции волнового вектора  $q_x$  в соответствии с соотношениями  $\omega' = \gamma(\omega - Vq_x)$ ,  $q'_x = \gamma(q_x - \beta k)$ ,  $k = \omega/c$ ,  $\beta = V/c$ ,  $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$ . Используя (4.44)-(4.46) и предел разреженной среды в форме  $\varepsilon_2(\omega) - 1 = 4\pi n_2 \alpha_e(\omega) \rightarrow 0$ ,  $\mu_2(\omega) - 1 = 4\pi n_2 \alpha_m(\omega) \rightarrow 0$ , в [23] были получены выражения для сил и скорости нагрева малой частицы в конфигурации 1:

$$F_x = \frac{2\hbar}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int d^2q \frac{q_x q \exp(-2qz)}{q^2 - \beta^2 q_y^2} \left[ q^2 (\operatorname{Im} R_e \operatorname{Im} \alpha'_e + \operatorname{Im} R_m \operatorname{Im} \alpha'_m) + \right. \\ \left. + \beta^2 q_y^2 (\operatorname{Im} R_e \operatorname{Im} \alpha'_m + \operatorname{Im} R_m \operatorname{Im} \alpha'_e) \right] \cdot (4.49) \\ \cdot (\Pi(\omega', T_2) - \Pi(\omega, T_1))$$

$$F_z = \frac{\hbar}{\pi^2} \operatorname{Im} \int_0^\infty d\omega \int d^2q \frac{q_0^2 \exp(2i\tilde{q}_0 z)}{(q^2 - \beta k q_x)^2 - \beta^2 q_0^2 q_y^2} \left\{ (q^2 - \beta k q_x)^2 (R_e \alpha'_e + R_m \alpha'_m) + \right. \\ \left. + \beta^2 q_0^2 q_y^2 (R_e \alpha'_m + R_m \alpha'_e) \right\} \cdot (4.50) \\ \cdot (1 + \Pi(\omega, T_1) + \Pi(\omega', T_2))$$

$$\dot{Q} = \frac{2\hbar}{\pi^2} \int_0^\infty d\omega \int d^2q \frac{\omega q \exp(-2qz)}{q^2 - \beta^2 q_y^2} \left[ q^2 (\text{Im } R_e \text{Im } \alpha'_e + \text{Im } R_m \text{Im } \alpha'_m) + \right. \\ \left. + \beta^2 q_y^2 (\text{Im } R_e \text{Im } \alpha'_m + \text{Im } R_m \text{Im } \alpha'_e) \right] \cdot (\Pi(\omega', T_2) - \Pi(\omega, T_1)) \quad (4.51)$$

Как поясняют авторы [23], формула (4.51) справедлива в области ближнего поля при  $z \ll \lambda_T$ . Относительно (4.49) по этому поводу ничего не сказано, но из вида экспоненциального множителя можно предположить, что имеется в виду такой же случай. Для того чтобы максимально облегчить сравнение результатов, изложенных пп.3, 4, с формулами (4.44)-(4.51), обсудим простейший случай нерелятивистского движения частицы с учетом запаздывания.

Так, формула (4.50), переписанная в наших обозначениях, при  $\beta \rightarrow 0$  принимает вид:

$$F_z(z) = -\frac{\hbar}{2\pi^2} \text{Im} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \cdot \exp(-2q_0 z) (k^2 - \omega^2 / c^2) \cdot \\ \cdot [\alpha_e(\omega^+) \Delta_e(\omega) + \alpha_m(\omega^+) \Delta_m(\omega)] \cdot \left[ \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_B T_1}\right) + \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T_2}\right) \right] \quad (4.52)$$

Весьма показательное сравнение (4.52) с формулой (3.74), взятой при  $\beta \rightarrow 0$ . Во-первых, формула (4.52), как и (4.45) для конфигурации 2, имеет неправильную зависимость температурного фактора. Структура этого фактора в (4.52) и (4.45) аналогична работе [72] и, как показано авторами [9], ошибочна. Во-вторых, рассмотрим простейший случай  $\alpha_m(\omega) = 0, V = 0, T_1 = T_2 = T$ . Тогда (4.52) и (3.74) принимают вид:

$$F_z(z) = -\frac{\hbar}{\pi^2} \text{Im} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \exp(-2q_0 z) (k^2 - \omega^2 / c^2) \alpha_e(\omega) \Delta_e(\omega) \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right); \quad (4.53)$$

$$F_z(z) = -\frac{\hbar}{2\pi^2} \text{Im} \int_0^\infty d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \cdot \exp(-2q_0 z) \alpha_e(\omega) \cdot \\ \cdot [\Delta_e(\omega)(2k^2 - \omega^2 / c^2) + \Delta_m(\omega)\omega^2 / c^2] \cdot \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) \quad (4.54)$$

Из (4.53) следует, что эта формула не содержит френелевской амплитуды отражения S-волн  $\Delta_m(\omega) \equiv R_s(\omega)$ , а фактор  $(k^2 - \omega^2 / c^2)$  отличается от  $(2k^2 - \omega^2 / c^2)$  в (4.54). При наличии запаздывания независимость силы вандерваальсова притяжения немагнитной частицы к поверхности (4.53) от поверхностных S-волн является физически абсурдной. Кроме того, это противоречит структуре формулы для силы Казимира-Полдера (3.79)-(3.81), которая считается надежно установленной [3,9]. Формула (4.54) напротив, полностью согласуется с соответствующим выражением и непосредственно получается из (4.40) в пределе разреженной среды. Похожие по форме ошибки имеются также в других работах этих авторов [7, 22, 64], в которых фигурирует неправильный фактор  $2k^2$  вместо  $(2k^2 - \omega^2 / c^2)$  в формулах для  $F_x$  и  $\dot{Q}$  малой частицы в нерелятивистском запаздывающем приближении, а также в работе [163], где в формуле для  $F_x$  аналогичный фактор равен  $2(2k^2 + \omega^2 / c^2)$ . Эти ошибки существенно изменяют результаты, получаемые авторами [23] для конфигурации 1. Далее, сравним (4.39) с формулой (4.44), которая при  $\beta \rightarrow 0, T_1 = T_2 = T$  в наших обозначениях имеет вид:



$$\begin{aligned}
F_x(l) = & -\frac{\hbar S}{16\pi^3} \int_0^\infty d\omega \int_{k < \omega/c} d^2k \cdot k_x \cdot \\
& \cdot \left[ \frac{\left(1 - |\Delta_{1e}(\omega^+)|^2\right) \left(1 - |\Delta_{2e}(\omega)|^2\right)}{\left|1 - \exp(2i|q_0|l)\Delta_{1e}(\omega^+)\Delta_{2e}(\omega)\right|^2} + (e \leftrightarrow m) \right] \cdot \left[ \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_B T}\right) \right] - \\
& - \frac{\hbar S}{4\pi^3} \int_0^\infty d\omega \int_{k > \omega/c} d^2k \cdot k_x \exp(-2q_0 l) \cdot \\
& \cdot \left[ \frac{\text{Im}\Delta_{1e}(\omega^+) \text{Im}(\Delta_{2e}(\omega))}{\left|1 - \exp(-2|q_0|l)\Delta_{1e}(\omega^+)\Delta_{2e}(\omega)\right|^2} + (e \leftrightarrow m) \right] \cdot \left[ \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2k_B T}\right) - \coth\left(\frac{\hbar\omega^+}{2k_B T}\right) \right]
\end{aligned} \tag{4.55}$$

При записи (4.55), в соответствии с рис. 2, движущейся считается первая пластина. Из (4.39) и (4.55) видно, что слагаемые, отвечающие нерадиационным модам ( $k > \omega/c$ ) полностью согласуются друг с другом, однако слагаемые, связанные с радиационными модами, существенно отличаются. Формула (4.39) не содержит коэффициентов поглощения излучения  $\left(1 - |\Delta_{1e}(\omega^+)|^2\right)$ ,  $\left(1 - |\Delta_{2e}(\omega)|^2\right)$ , поскольку предполагается случай полного термодинамического равновесия  $T_1 = T_2 = T_3 = T$ , когда структура радиационного поля в щели между пластинами имеет вид стоячей волны. Наличие относительного движения первой пластины не изменяет эту структуру в ее системе покоя, поскольку изменяется лишь частота излучения, приобретающая доплеровский сдвиг, а амплитуды коэффициентов отражения покоящейся пластины  $\Delta_{e,m}(\omega)$  заменяются на  $\Delta_{e,m}(\omega^+)$ . Поэтому при корректной постановке проблемы в конфигурации 2 в случае  $T_1 = T_2 = T_3 = T$  радиационно-ветровые вклады в силу взаимодействия, связанные с поглощением энергии электромагнитного излучения одной из пластин, не должны появиться. Как было показано в п.4.4, такие вклады возникают в неравновесном случае. Более того, если ветровые радиационные вклады появляются в выражении для тангенциальной силы  $F_x$ , то они тем более должны присутствовать и в выражении для нормальной силы  $F_z$ . В случае  $V = 0$  это имеет место в формулах (4.9), (4.10), однако в (4.45) такие вклады отсутствуют, в то время как в тангенциальной силе они имеются даже при тепловом равновесии пластин. Это противоречие, по всей видимости, связано с тем, что авторы [23], начиная с первых своих работ по диссипативным силам ФЭВ [47], исходили из равновесной теории Лифшица, а также из теории теплообмена Полдера и Ван Хова в конфигурации 2 [59], стараясь модифицировать их на случай динамически и термически неравновесных систем.

К числу не менее значительных погрешностей обсуждаемых результатов работы [23] относятся неправильные частотные факторы  $\omega$  в (4.46) и (4.51), в то время как в формуле (3.75) в соответствующем пределе и в (4.36) фигурирует доплеровская частота  $\omega^+ = \omega + k_x V$ . Как показано в [53], эта, на первый взгляд незначительная, ошибка приводит к нарушению второго начала термодинамики.

Все сказанное ставит под сомнение не только корректность релятивистских результатов, выражаемых формулами (4.44)-(4.51), но также и более ранних результатов авторов [7, 22, 47].

Драматизм ситуации с поиском релятивистского решения для конфигурации 2 еще более усилился с появлением работ [27], авторы которых пришли к выводу об отсутствии диссипативной силы в случае холодных пластин и вакуумного фона. Результаты, полученные авторами работы [27] для  $F_x$ ,  $F_z$ ,  $Q$  в случае двух пластин, весьма похожи на результаты [23], но принципиально отличаются тем, что доплеровская частота в аргументе гиперболического котангенса берется по модулю. Именно это обстоятельство и приводит к тому, что в работах [27] при  $T_1 = T_2 = 0$   $F_x = 0$  в любом порядке по скорости, в противоречии с устоявшимися результатами всех других авторов [4, 7, 8, 10, 22-25, 46, 47, 53]. В этой связи еще раз заметим, что поверхностные моды пластин при  $T_1 = T_2 = 0$  не обладают релятивистской инвариантностью вакуумных мод при  $T_3 = 0$  (см. рис. 2), поэтому весомых физических оснований для обращения в ноль латеральной силы в случае двух абсолютно холодных пластин (в любом порядке по скорости) не существует.

### 5. Аддитивное приближение и локально-плоское приближение Дерягина для конфигурации «линза - пластина»

Обсуждение других геометрических конфигураций не входит в нашу задачу, за исключением конфигурации «линза – пластина», которую можно рассматривать как частный случай конфигураций 1 и 2.

Приближенный расчет силы Казимира между сферической частицей большого радиуса  $R$  и толстой пластиной при малой ширине зазора  $z$  вакуумного контакта между ними ( $R/z \gg 1$ ) в условиях теплового равновесия обычно выполняется [3] с помощью локально-плоского приближения Дерягина (ЛППД) [87]

$$F_z = 2\pi R \tilde{F}_{reg}(z, T), \quad (5.1)$$

где  $\tilde{F}_{reg}(z, T)$  – зависящая от расстояния между пластинами и температуры регуляризованная часть свободной энергии электромагнитного поля в конфигурации 2, отнесенная к единице площади пластин. Общее выражение для  $\tilde{F}_{reg}(z, T)$  было получено Лифшицем [20]. Как было показано в работе [164], ЛППД эквивалентно методу аддитивного суммирования межатомных потенциалов взаимодействия Ван-дер-Ваальса (Казимира) с учетом дополнительной перенормировки константы парного взаимодействия. В случае  $R/z \gg 1$  относительная ошибка данного метода может составлять менее 0.01% [164]. В [3] также делается предположение, что ЛППД в равной степени эффективно и при вычислении тепловых сил Казимира. Однако в последнее время адекватность ЛППД в конфигурации «линза – пластина» продолжает активно дискутироваться [88-93, 165, 166], поскольку есть некоторые указания на недооценку допускаемой при этом погрешности. При расчете скорости теплообмена в рамках ЛППД нужно проинтегрировать (4.12) по поверхности «линзы», при этом ширина щели  $l$  представляет локальное расстояние между элементом ее поверхности и второй пластиной.

Результаты, полученные для конфигурации 1, позволяют подойти к этой проблеме с другой точки зрения. Как альтернативу ЛППД и другим приближенным методам, основанным на переходе от конфигурации 2 к конфигурации «линза – пластина», мы предлагаем противоположную схему: переход от конфигурации «малая частица – пластина» к конфигурации «линза – пластина».

Рассматривая (3.73) – (3.75) как локальные соотношения для малой частицы с объемом  $d^3r$ , проведем интегрирование по объему меньшего тела («линзы»), аналогично про-

цедуре расчета консервативных сил ФЭВ между двумя протяженными телами с помощью суммирования парных межатомных потенциалов. Тогда результирующая сила, действующая на сферическое тело, находящееся вблизи пластины, равна

$$F_{x,z}(z) = \int_V F_{x,z}(\mathbf{r}) d^3 r = \pi z_0^3 \int_1^{1+2R/z_0} F(z_0 t) \left[ \frac{2R}{z_0} (t-1) - (t-1)^2 \right] dt, \quad t = z/z_0, \quad (5.2)$$

где  $F(z)$  определяется формулами (3.73), (3.74) или (3.83), (3.84), в которых поляризуемости  $\alpha_{e,m}(\omega)$  нормируются на единицу объема материала сферы;  $V$  – ее объем;  $z_0$  – расстояние апекса от поверхности. При расчете скорости теплообмена вместо  $F(\mathbf{r})$  в формулу (5.2) надо подставить  $\dot{Q}(\mathbf{r}, T_1, T_2)$ .

Этот вариант аддитивного приближения, в отличие от метода суммирования парных потенциалов [3], позволяет учесть и температурную, и материальную зависимости силы Казимира. В случае идеально проводящих сферы и пластины подстановка (3.84) в (5.2) дает ( $R$  – радиус сферы,  $z$  – кратчайшее расстояние апекса сферы от поверхности,  $x = 2\pi k_B T z / \hbar c$ )

$$F_0(z) = -\frac{9\hbar c}{4\pi} \frac{(R+z)}{z^3} \left( \frac{R}{2R+z} \right)^3; \quad (5.3)$$

$$F_T(z, T) = -\frac{9}{32} \frac{k_B T R}{z^2} \left[ \begin{aligned} &\varphi_2(x) - \frac{z}{R} \varphi_3(x) - \frac{z^2}{R(z+2R)} \varphi_3(x(1+2R/z)) - \\ &-\frac{1}{2} \left( \frac{z}{z+2R} \right)^2 \varphi_2(x(1+2R/z)) \end{aligned} \right]; \quad (5.4)$$

$$\varphi_2(x) = \coth x + x \coth^2 x - x - 2/x; \quad (5.5)$$

$$\varphi_3(x) = \coth(x) - 1/x. \quad (5.6)$$

В предельном случае  $R/z \gg 1$  из (5.3) получим

$$F_0(z) = -\frac{9}{32\pi} \frac{\hbar c R}{z^3}, \quad (5.7)$$

а в случае  $R/z \ll 1$ , возвращаемся к (3.82). Формула (5.7) лишь незначительно отличается от «канонического» результата [3]

$$F_0(z) = -\frac{\pi^3}{360} \frac{\hbar c R}{z^3}, \quad (5.8)$$

поскольку отношение численных коэффициентов в (5.7) и (5.8) равно 1,039. Формула (5.8) получается при подстановке в (5.1) выражения для  $\tilde{F}_{reg}(z, 0)$  в случае идеально проводящих пластин [3]

$$\tilde{F}_{reg}(z, 0) = -\frac{\pi^2}{720} \frac{\hbar c}{z^3}. \quad (5.9)$$

Для высокотемпературного вклада в силу Казимира при  $R/z \gg 1$  и  $2\pi\omega_W z/c \gg 1$  из (5.4) получим:

$$F^{(T)} = -\frac{9}{32} \frac{k_B T R}{z^2}. \quad (5.10)$$

Численный коэффициент в (5.10) составляет 0.936 от аналогичной величины, получаемой при подстановке высокотемпературной асимптотики  $\tilde{F}_{reg}(z, T) = -k_B T \zeta(3)/8\pi z^2$ , соответствующей (4.8), в (5.1). Различие коэффициентов 1.039 и 0.936 указывает на раз-

личную погрешность ЛППД в случае «холодной» и «тепловой» сил Казимира. В целом же можно заключить, что формула для силы Казимира в конфигурации 1, полученная в дипольном пределе  $R/z \ll 1$ , в комбинации с аддитивным приближением (5.2) применима и к конфигурации «линза – пластина». Погрешность (5.2) при вычислении диссипативных сил и скорости теплообмена пока трудно оценить ввиду отсутствия точных решений для конфигурации «линза – пластина».

## 6. Обсуждение экспериментальных результатов

### 6.1. Равновесные и неравновесные силы Казимира

В последние 10 лет техника измерений малых сил и, в частности, сил Казимира и Ван-дер-Ваальса в равновесных условиях интенсивно совершенствовалась благодаря достижениям в точности позиционирования взаимодействующих тел, в результате чего точность измерений в области микронных расстояний между ними достигла 1% [6, 86, 113-117]. Наиболее перспективными конфигурациями для таких измерений считаются конфигурация «линза – пластина», использующаяся как в случае макроскопических тел [113], так и микроскопических [114-117], а также «сфера – плоскость». В первом случае применяется крутильный маятниковый подвес, аналогичный классическим работам Г. Кавендиша, с макроскопическим сферическим пробным телом (радиус сферы около 12.5 см), а во втором – атомно-силовой микроскоп. Пробным телом здесь служит металлизированная сфера диаметром около  $200 \mu\text{m}$ , прикрепленная к балке атомно-силового микроскопа. Подробный статус теории и эксперимента изложен в работах [6, 86, 113] (см. также [10]). Сравнение теории и эксперимента проводилось с учетом влияния вида диэлектрических функций материалов, шероховатости поверхностей, температурных и геометрических факторов. Наибольший успех в теоретической интерпретации результатов достигнут авторами [3, 6, 86, 114-118]. В частности, на основании статистики данных наиболее точных экспериментов по измерению сил Казимира в [161, 162] делается вывод в пользу плазменной модели диэлектрической проницаемости [86], а не модели Друде. Тем не менее, вопрос этот еще не закрыт, поскольку существуют альтернативные мнения [113]. Недостаточно ясен, например, вопрос об интерпретации сил Казимира в пленочных структурах [119, 120].

В работе [75] были впервые измерены тепловые зависимости силы Казимира–Полдера в эксперименте с бозе-эйнштейновским конденсатом атомов  $^{87}\text{Rb}$ , находящимся в магнитной ловушке вблизи пластины диэлектрика. Расстояние от пластины варьировало в диапазоне  $6 - 11 \mu\text{m}$ . Тепловая часть силы взаимодействия определялась по сдвигу частоты колебаний конденсата под действием внешней вынуждающей силы. Применялись неравновесные тепловые конфигурации с различной комбинацией температур пластины и внешнего окружения (вакуумного фона). Было показано, что результаты измерений согласуются с формулой (3.98) (см. также обсуждение в [167]).

### 6.2. Силы вакуумного трения в АСМ-экспериментах

В отличие от сил Ван-дер-Ваальса и Казимира, идентификация которых практически не вызывает сомнений, в измерениях бесконтактных диссипативных сил при демпфировании колебаний нанозондов [125-127] ситуация далека от ясности, хотя и делалось несколько попыток интерпретации результатов [4, 7, 10, 22, 49, 168, 169]. Отчасти это вы-

звано тем, что сила вязкого трения, пропорциональная скорости, может быть обусловлена совокупным действием различных механизмов (здесь мы не затрагиваем не имеющие отношения к проблеме ФЭВ силы демпфирования при более близких контактах [170]). Принципиальное затруднение связано с тем, что в бесконтактном вакуумном динамическом режиме АСМ с компенсацией контактной разности потенциалов консервативное взаимодействие зонда с образцом определяется силой Ван-дер-Ваальса, поэтому вполне естественно было бы ожидать, что силы вакуумного трения должны иметь ту же природу. Однако теоретические оценки показали, что для контакта кремний – слюда измеренные значения сил демпфирования больше рассчитанных на два - три порядка величины [4, 7], а для контакта металлов – на 5-11 порядков величины [4, 7, 22].

Эксперименты дают различные зависимости сил демпфирования и от расстояния до поверхности: от  $z^{-3}$  в [126], до  $z^{-1.1}$  и  $z^{-1.5}$  в работе [127], а также обнаруживают сильное влияние температуры и типа контактирующих материалов [127]. Заметим, что в [125, 126] исследовалось демпфирование зонда, совершающего колебания перпендикулярно поверхности, а в [127] – демпфирование при параллельном к поверхности движении, причем радиус зонда в последнем случае был в 30 -50 раз больше ( $1\mu m$ ). Сильно отличающаяся степенная зависимость силы демпфирования, наблюдавшаяся в [127], по-видимому, была связана с наличием электростатического взаимодействия пятен заряда, а не ван-дер-ваальсового (диссипативного), для которого характерна зависимость  $z^{-3}$  [126]. Интерпретация результатов измерений [127] затрудняется еще тем, что в этом случае сила притяжения зонда к поверхности не измерялась. В работе [126], напротив, характер силы притяжения (Ван-дер-Ваальса) не вызывает сомнений [169], но проблемой остается большое различие теоретических и экспериментальных значений сил демпфирования.

Нами в [52] было показано, что близкие к экспериментальным значениям [126] силы демпфирования в АСМ (с зависимостью от расстояния  $z^{-3}$ ) можно получить в рамках механизма ФЭВ в соответствии с формулой (3.109), если частица и поверхность имеют совпадающие полосы поглощения на частотах  $\omega = 10^9 Hz$ . Такие частоты характерны для ротационных возбуждений молекулярных комплексов и фононных возбуждений. Кроме того, тот же порядок величины имеет обратное время затухания осцилляторов в экспериментах с кварцевым микробалансом [123, 124]. Для объяснения экспериментов [126, 127] предлагались и другие механизмы [7, 22], но достигнутая точность измерений диссипативных сил пока не позволяет сделать критический выбор теоретической модели. Сейчас даже нет полной уверенности в том, что в работах [125-127] измерялись именно силы вакуумного трения, обусловленные ФЭВ, а не силы иной природы. Необходимы новые измерения сил демпфирования с различающимся типом контактов, при различной температуре, геометрических и механических характеристиках зондов.

### 6.3. Вакуумный теплообмен

Измерение вакуумного теплообмена, в отличие от измерений сил ФЭВ, легче всего осуществимо при больших расстояниях между телами [128, 129]. Но поскольку перенос тепла в этом случае осуществляется радиационными модами, то общие теоретические результаты (3.112) или (4.12) трудно проверить. Поэтому долгое время наличие теплообмена, обусловленного модами ближнего поля, не удавалось заметить. По-видимому, впервые это было сделано в работе [171], где измерялся тепловой поток между вольфрамо-

вым зондом с радиусом кривизны около  $100 \text{ nm}$  и поверхностью никеля в атмосферных условиях. И лишь относительно недавно ближнепольный теплообмен был измерен в вакуумных условиях при расстояниях зонда от поверхности в диапазоне  $1-100 \text{ nm}$ <sup>1</sup> [130]. В этой работе измерялась теплоотдача  $Pt - Ir$  иглы сканирующего туннельного микроскопа при радиационном теплообмене с поверхностями  $Au$  и  $GaN$ . В зонд была вмонтирована термопара, чувствительный элемент которой имел контакт с крайней оконечностью иглы. Принцип измерения теплоотдачи был основан на термоэлектрическом эффекте Зеебека, при котором генерируемая термоэдс равна  $V_{th} = S\Delta T$ , где  $S$  – коэффициент Зеебека, а  $\Delta T$  – разность температур между контактами термопары. Скорость охлаждения оконечности иглы  $dQ/dt$  определяется разностью температур иглы и образца  $\Delta T$ , а также тепловым сопротивлением  $R_{th}$  контакта:  $dQ/dt = \Delta T / R_{th}$ . Из приведенных соотношений следует  $dQ/dt = V_{th} / SR_{th}$ . Так как константы  $S$  и  $R_{th}$  находятся с помощью предварительных калибровок, то измерение напряжения  $V_{th}$  при контролируемом расстоянии зонда от поверхности позволяет найти скорость теплоотдачи. В эксперименте [130] температура зонда поддерживалась равной  $300 \text{ K}$ , а температура поверхности, соответственно,  $-200 \text{ K}$ . Для обоих исследованных образцов измеренная величина  $dQ/dt$  характеризовалась начальным плато в диапазоне расстояний  $1-10 \text{ nm}$  с максимальным значением скорости охлаждения около  $10^{-5} \text{ W}$ , переходившим далее в степенную зависимость  $dQ/dt \sim z^{-3}$  при больших расстояниях зонда от поверхности.

Интерпретация результатов измерений авторами [130] была основана на упрощенном варианте формулы (3.112), в которой использовалось второе интегральное слагаемое без учета магнитной поляризации частицы [65]. Для того чтобы получить согласие расчетных зависимостей с экспериментальными, авторам пришлось ввести подгоночный параметр для диэлектрической функции, обрезающий вклад электромагнитных мод с большими значениями волновых чисел. Поскольку, однако, «ресурс» общей формулы (3.112) с учетом всех компонент поляризуемости значительно шире, чем был использован авторами [130], то, очевидно, необходим более тщательный расчет на ее основе, без введения дополнительных феноменологических параметров. Надежду на успех этого подхода дают численные расчеты [49, 52], из которых вытекает правильный порядок величины и характерный вид зависимостей  $dQ/dt$  от расстояния (по крайней мере, для контакта  $Pt - Au$  в [130]), хотя в [49, 52] рассматривался контакт медной наночастицы с поверхностью меди. Как и при измерении диссипативных сил ФЭВ, в данном случае чрезвычайно важно определить температурную зависимость скорости теплоотдачи, а также соответствующую зависимость от радиуса кривизны оконечности иглы.

#### 6.4. Другие эксперименты

В заключение обратим внимание на другие эксперименты, которые могли раньше или могут в будущем иметь отношение к измерению сил ФЭВ и радиационного теплообмена. Исследование консервативных сил Ван-дер-Ваальса при взаимодействии атомарных пучков с поверхностями проводилось еще 30 лет назад (см. например, [4, 11] и соотв. ссылки). В последние годы был выполнен ряд экспериментов по измерению этих сил при дополнительном лазерном возбуждении нейтральных атомов [172, 173] и прохождении нейтрального пучка атомов натрия в микрощели [174]. Возможность зондирования резонансных дис-

<sup>1</sup> Совсем недавно был проведен еще один эксперимент [176].

сипативных сил ФЭВ при скользящем взаимодействии атомарных частиц с поверхностями обсуждалась в работах [100]. Диссипативные силы ФЭВ, вероятно, играют роль в демпфировании кварцевых осцилляторов в экспериментах с кварцевым микробалансом [123, 124] (см. также [4]) Кроме того, следует упомянуть об экспериментальных исследованиях когерентного теплового излучения оптических дифракционных решеток [175] (подробнее см. обзор [5] и соотв. ссылки). Авторами [175], в частности, наблюдалось значительное (на четыре порядка величины) возрастание интенсивности и наличие пространственной когерентности теплового излучения дифракционной решетки из карбида кремния с периодом  $11.4 \mu m$  на расстояниях  $10 - 100 nm$  от нее, т.е. в зоне ближнего поля поверхности.

## 7. Заключение

В рамках флуктуационной электродинамики развита замкнутая релятивистская теория ФЭВ для конфигурации малая частица – пластина, позволяющая единым образом вычислять консервативно – диссипативные силы и теплообмен между движущейся частицей и поверхностью конденсированной среды. Получены наиболее общие выражения для сил ФЭВ и скорости нагрева (охлаждения) частицы при взаимодействии с вакуумными и поверхностными модами флуктуационного электромагнитного поля, учитывающие произвольную скорость движения частицы, материальные свойства (частицы и среды) и различие их температур (при тепловом равновесии пластины и вакуумного фона). Как частный случай, теория включает все ранее известные нерелятивистские и релятивистские результаты для сил вакуумного трения, радиационного теплообмена и консервативных сил Ван-дер-Ваальса и Казимира.

Основываясь на точном решении релятивистской проблемы ФЭВ в конфигурации 1, и используя «принцип соответствия» между конфигурациями 1 и 2 (две параллельных пластины в относительном движении), получены согласованные релятивистские формулы для консервативно – диссипативных сил и скорости теплового нагрева в конфигурации 2 при относительном движении пластин с нерелятивистской скоростью. Уточняются правила перехода от одной конфигурации к другой, позволяющие получать формулы для конфигурации 1 в пределе разреженной среды из формул для конфигурации 2 (и наоборот). Эти результаты, как и результаты релятивистской теории ФЭВ для конфигурации 1, могут рассматриваться как эталонные при построении релятивистской теории в конфигурации 2, для которой, как вытекает из анализа существующей литературы, адекватного решения проблемы ФЭВ в настоящее время еще не получено.

Детально обсуждается сходство и различие в постановках флуктуационных электродинамических задач в конфигурациях 1, 2 и констатируется необходимость дальнейшей детализации специфики вакуумного фона в конфигурации 2. Показано, что характеристики ФЭВ малой частицы с поверхностью не всегда удастся получить предельным переходом к разреженной среде на основе решений соответствующих задач для конфигурации двух толстых пластин (полубесконечных сред с плоской вакуумной щелью). Именно по этой причине конфигурация 1 должна рассматриваться как самостоятельная, занимающая особое место в теории ФЭВ.

Констатируется, что экспериментальный уровень измерений эффектов, связанных с ФЭВ, за исключением сил Ван-дер-Ваальса и Казимира в статических условиях, пока не позволяет использовать получаемые результаты для критического тестирования теоретических моделей с необходимым уровнем точности.

## Литература

1. *Лебедев П.Н.* Избранные сочинения (под ред. А.К. Тимирязева) // ГИТТЛ, М., 1949.
2. *Kardar M., Golestanian R.* The friction of vacuum and the fluctuation induced forces // *Rev. Mod. Phys.* 1999, **71**, 1233.
3. *Bordag M., Mohideen U. and Mostepanenko V.M.* The development of the Casimir effect // *Phys. Rep.*, 2001, **1**, 353.
4. *Дедков Г.В., Кясов А.А.* Электромагнитные и флуктуационно-электромагнитные силы взаимодействия движущихся частиц и нанозондов с поверхностями. Нерелятивистское рассмотрение // *ФТТ*, 2002, **44** (10), 1729; *Phys. Low-Dimens. Struct.*, 2003, **1/2**, 1.
5. *Joullain K., Mulet J.-P., Marquier F., Carminati R., Greffet J.-J.* Surface electromagnetic waves thermally excited: radiative heat transfer, coherent properties, and Casimir forces revisited in the near field // *Surf. Sci. Rep.* 2005, **57**, 59.
6. *Klimchitskaya G.L. and Mostepanenko V.M.* Experiment and theory in the Casimir effect // *Contemp. Phys.* 2006, **47**, 131.
7. *Volokitin A.I., Persson B.N.J.* Near-field radiative heat transfer and non contact friction // *Rev. Mod. Phys.* 2007, **79**, 1291.
8. *Dedkov G.V., Kyasov A.A.* Vacuum attraction, friction and heating of nanoparticles moving nearby a heated surface // *J. Phys.: Condens. Matter*, 2008, **20**, 354006.
9. *Antezza M., Pitaevskii L.P., Stringari S. and Svetovoy V.* Casimir–Lifshitz force out of thermal equilibrium // *Phys. Rev.*, 2008, **A77**, 022901.
10. *Дедков Г.В., Кясов А.А.* Флуктуационно-электромагнитное взаимодействие нейтральной движущейся частицы с поверхностью конденсированной среды: релятивистское рассмотрение // *ФТТ*, 2009, **51** (1), 1.
11. *Виноградов Е.А., Дорофеев И.А.* Термостимулированные электромагнитные поля твердых тел // *УФН*, 2009, **179** (5), 449.
12. *Бараи Ю.С.* Силы Ван-дер-Ваальса // *Наука*, М., 1988.
13. *Peebles P.J.E.* Principles of Physical Cosmology // Princeton Univ. Press, Princeton, NY, 1993.
14. *Weinberg S.* The cosmological constant problem // *Rev. Mod. Phys.*, 1989, **61**, 1.
15. *Poppe T., Blum J., Henning T.* New experiments on collisions of solid grains related to the preplanetary dust aggregations // *Adv. Space Res.*, 1999, **23**, 1197.
16. *Decca R.S., Fischbach E., Klimchitskaya G.L. et. al.* Improved tests of extra-dimensional physics and thermal quantum field theory from new Casimir force measurements // *Phys.Rev.*, 2003, **D68**, 116003.
17. *Chan H.B., Aksyuk V.A., Kleiman R.N. et.al.* Quantum mechanical actuation of microelectromechanical systems by the Casimir force Science // *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **87**, 211801.
18. *Batra R.C., Porfiri M. and Spinello D.* Review of modeling electrostatically actuated microelectromechanical systems // *Smart Mater. Struct.*, 2007, **16**, R23.
19. *Рытов С.М.* Теория электрических флуктуаций и теплового излучения // Изд.-во АН СССР, М., 1953.
20. *Лифшиц Е.М.* Теория молекулярных сил притяжения между твердыми телами // *ЖЭТФ*, 1955, **29**, 94.
21. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Часть 2 // *Физматлит*, М., 2002.
22. *Волокитин А.И., Перссон Б.Н.Дж.* Радиационная передача тепла и бесконтактное трение между наноструктурами // *УФН*, 2007, **177** (9), 921.
23. *Volokitin A.I., Persson B.N.J.* Theory of the interaction forces and heat transfer between moving bodies // *Phys. Rev.*, 2008, **B78**, 155437.
24. *Kyasov A.A., Dedkov G.V.* Relativistic theory of fluctuating electromagnetic slowing down of neutral spherical particles moving in close vicinity to a flat surface // *Nucl. Instr. Meth.*, 2002, **B195**, 247.
25. *Дедков Г.В., Кясов А.А.* Релятивистская теория флуктуационно-электромагнитного взаимодействия движущихся нейтральных частиц с плоской поверхностью // *ФТТ*, 2003, **45** (10), 1729.
26. *Dedkov G.V., Kyasov A.A.* Fluctuation electromagnetic slowing down and heating of a small neutral particle moving in the field of equilibrium background radiation // *Phys. Lett.*, 2005, **A339**, 212; *Nucl. Instr. Meth.* <http://dx.doi.org/10.1016/j.nimb.2009.12.011>
27. *Philbin T.G., Leonhardt U.* No quantum friction between uniformly moving bodies // arXiv:0810.3750v3 [quant-ph], 26 Mar. 2009; Casimir–Lifshitz force between moving plates at different temperatures // arXiv: 0904.2148v2 [quant-ph] 26 Apr 2009.
28. *Casimir H.B.G.* On the attraction of perfectly conducting plates // *Proc.K.Ned.Akad.Wet.*, 1948, **51**, 793.
29. *Casimir H.B.G., Polder D.* The influence of retardation on the London –Van-der-Waals forces // *Phys.Rev.*, 1948, **73**, 360.



30. *Леонтович М.А., Рытов С.М.* Тепловые флуктуации электромагнитного поля в телах // ЖЭТФ, 1952, **23**, 246.
31. *Дзялошинский И.Е., Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Общая теория Ван-дер-Ваальсовых сил // УФН, 1961, **123** (3), 381.
32. *Mahanty J., Ninham* Dispersion Forces // Acad. Press, London, 1976.
33. *Parsegian V.E.* Van der Waals Forces: A Handbook for Biologists, Chemists, Engineers and Physicists // Cambridge Univ. Press, N.Y., 2005.
34. *D'Agliano E.G., Schaich W.L., Kumar P., Suhl H.* Brownian motion model of the interaction between chemical species and metallic electrons // Lundqvist B.I. and Lundqvist S. (eds), Nobel Symp., Acad. Press, N.Y., 1974, 24.
35. *D'Agliano E.G., Kumar P., Schaich W.L. and Suhl H.* Friction coefficient of atoms near a metal surface // J.Phys. France, 1977, **38**, 479.
36. *Schaich W.L.* Brownian motion model of surface chemical reactions. Derivation in the large mass limit // J.Chem.Phys., 1974, **60**, 1087; Solid State Commun., 1975, **15**, 357; Surf. Sci., 1975, **49**, 221.
37. *Теодорович Е.В.* Вклад взаимодействия Ван-дер-Ваальса в силу трения гладких поверхностей // Доклады Всесоюзной конференции по трению, смазке и износу, Ташкент, 1975.
38. *Teodorovich E.V.* On the contribution of macroscopic van-der-Waals interactions to frictional force // Proc. Roy. Soc., 1978, **A362**, 71.
39. *Mahanty J.* Velocity dependence of the van der Waals force between molecules // J.Phys. B:Atom. Molec. Phys., 1980, **13**, 4391.
40. *Schaich W.L., Harris J.* Dynamic corrections to van der Waals potentials // J. Phys. F: Metal. Phys. 1981, **11**, 65.
41. *Tomassone M.S., Widom A.* Electronic friction forces on molecules moving near metals // Phys. Rev., 1997, **B56**, 493.
42. *Dedkov G.V., Kyasov A.A.* Electromagnetic friction forces on the scanning probe asperity moving near surface // Phys.Lett., 1999, **A259**, 38; Письма ЖТФ, 1999, **25** (12), 10; Surf. Sci., 2000, **463**, 11.
43. *Levitov L.S.* Van der Waals friction // Eur. Phys. Lett., 1989, **8**, 488.
44. *Полевой В.Г.* Теплообмен флуктуационным электромагнитным полем // ЖЭТФ, 1990, **98**, 190.
45. *Mkrtchian V.E.* Interaction between moving macroscopic bodies: viscosity of the electromagnetic vacuum // Phys. Lett., 1995, **A207**, 299.
46. *Pendry J.B.* Shearing the vacuum-quantum friction // J.Phys.: Cond.Matter, 1997, **9**, 10301.
47. *Volokitin A.I., Persson B.N.J.* Theory of friction: the contribution from a fluctuating electromagnetic field // J. Phys.: Cond. Matter, 1999, **11**, 345.
48. *Dorofeyev I., Fuchs H., Gotsmann B., Jersch J.* Damping of moving particle near a wall – a relativistic approach // Phys. Rev., 2001, **B64**, 035403.
49. *Дедков Г.В., Кясов А.А.* Вакуумное трение и теплообмен нано- и микрочастицы с поверхностью твердого тела // ЖТФ, 2008, **78** (4), 1.
50. *Дедков Г.В., Кясов А.А.* Флуктуационно-электромагнитное взаимодействие релятивистской частицы с плоской поверхностью // Письма ЖТФ, 2003, **29** (1), 36.
51. *Dedkov G.V. Kyasov A.A.* Features of the fluctuation-electromagnetic interaction between a small conducting particle and polarizable medium // Eur. Phys. Lett., 2007, **74**, 44005; Письма ЖТФ, 2007, **33** (9), 61.
52. *Дедков Г.В., Кясов А.А.* Тепловое излучение наночастиц в вакууме и вблизи нагретой поверхности // Письма ЖТФ, 2007, **33** (7), 71.
53. *Dedkov G.V. Kyasov A.A.* Conservative–dissipative forces and heating mediated by fluctuation electromagnetic field: two plates in relative nonrelativistic motion // arXiv: 0904.0124 [cond-mat.other] 1Apr 2009; arXiv: 0904.0236 [cond-mat.other] 1Apr 2009.
54. *Pendry J.B.* Radiative heat exchange between nanostructures // J.Phys.: Cond. Matter, 1999, **11**, 6621.
55. *Дедков Г.В., Кясов А.А.* Особенности конфигураций «малая частица – пластина» и «пластина – пластина» в теории флуктуационно-электромагнитного взаимодействия // Письма в ЖТФ, 2009, **35** (13), 18.
56. *Barton G.* The quantum radiation from mirrors moving sideways // Ann. Phys., 1996, **245**, 361.
57. *Рытов С.М.* Введение в статистическую радиофизику // Наука, М., 1966.
58. *Левин М.Л., Рытов С.М.* Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике // Наука, М., 1967; *Рытов С.М., Кравцов Ю.А., Татарский В.И.* Введение в статистическую радиофизику. Ч.2 // Наука, М., 1978.
59. *Polder D., Van Hove M.* Theory of radiative heat transfer between closely spaced bodies // Phys. Rev., 1971, **B4**, 3303.

60. Левин М.Л., Полевой В.Г., Рытов С.М. Теория теплообмена, обусловленного флуктуационным электромагнитным полем // ЖЭТФ, 1980, **79**, 2087.
61. Bezerra V.B., Bimonte G., Klimchitskaya G.L. et al. Thermal correction to the Casimir force, radiative heat transfer and an experiment // Eur. Phys. J., 2007, **C52** (3), 701.
62. Loomis J.J., Maris H.J. Theory of heat transfer by evanescent electromagnetic waves // Phys. Rev. , 1994, **B50**, 18517.
63. Janovicz M., Reddig D., Holthaus M. Quantum approach to the electromagnetic energy transfer between two dielectric bodies // Phys. Rev., 2003, **A68**, 043823.
64. Volokitin A.I., Persson B.N.J. Radiative heat transfer between nanostructures // Phys. Rev., 2001, **B63**, 205404.
65. Mulet J.-P., Joulain K., Carminati R., Greffet J.-J. Nanoscale radiative heat transfer between a small particle and a plane surface // Appl. Phys. Lett., 2001, **78** (19), 2931.
66. Дедков Г.В., Кясов А.А. Об эффекте теплообмена между пробной наночастицей и поверхностью через ближнепольные моды флуктуационного электромагнитного поля // Письма ЖТФ, 2002, **28** (23), 50.
67. Henkel C., Joulain K., Mulet J.-P. and Greffet J.-J. Radiation forces on small particles in thermal near fields // J.Opt.A: Pure Appl. Opt., 2002, **4**, S109.
68. Antezza M., Pitaevskii L.P. and Stringari S. New asymptotic behavior of the surface-atom force out of thermal equilibrium // Phys. Rev. Lett., 2005, **95**, 113202.
69. Buhmann S.Y., Scheel S. Thermal Casimir versus Casimir–Polder forces: equilibrium and non equilibrium forces // Phys. Rev. Lett., 2008, **100** (25), 253201.
70. Дедков Г.В., Кясов А.А. «О холодной» и тепловой силах Казимира–Полдера при взаимодействии атома с поверхностью нагретой пластины // Письма ЖТФ, 2008, **34** (22), 1.
71. Дедков Г.В., Кясов А.А. Неравновесная сила Казимира: частица в холодном вакуумном фоне вблизи нагретой поверхности // Письма ЖТФ, 2009, **35** (6), 80.
72. Antezza M. Surface-atom force out of thermal equilibrium and its effect on ultra cold atoms // J.Phys. A: Math. Gen., 2006, **39**, 6117.
73. Antezza M., Pitaevskii L.P., Stringari S. and Svetovoy V.B. Casimir–Lifshitz force out of thermal equilibrium and asymptotic non –additivity // Phys. Rev. Lett., 2006, **97**, 223203.
74. Dorofeyev I.A. The force of attraction between two solids with different temperatures // J.Phys.A: Math. Gen., 1998, **31**, 4369.
75. Obrecht J.M., Wild R.J., Antezza M. et. al. Measurement of the temperature dependence of the Casimir–Polder force // Phys. Rev. Lett., 2007, **98**, 063201.
76. Marrocco M. et.al. Quantum electrodynamics shifts of Rydberg energy levels between parallel metal plates // Phys. Rev. Lett., 1998, **81**, 5784.
77. Arnoldus H.F. Atomic line widths and line shifts near a dielectric layer, and the limit of a semi-infinite medium // Surf. Sci., 2000, **444**, 221.
78. Lambrecht A., Maia Neto P.A., Reynaud S. The Casimir effect within scattering theory // New. J. Phys., 2006, **8**, 237.
79. Bostrom M., Sernelius B.E. Thermal effects on the Casimir force in the range // Phys. Rev. Lett., 2000, **84**, 4757.
80. Genet C., Lambrecht A., Reynaud S. Temperature dependence of the Casimir effect between metallic mirrors // Phys. Rev., 2000, **A62**, 012110.
81. Bordag M., Geyer B., Klimchitskaya G.L., Mostepanenko V.M. Casimir force at both non-zero temperature and finite conductivity // Phys. Rev. Lett., 2000, **85**, 503.
82. Hoyer J.S., Brevik I., Ellingsen S.A., Aarseth J.B. Analytical and numerical verification of the Nernst theorem for metals // Phys. Rev., 2008, **E78**, 023102
83. Bezerra V.B., Klimchitskaya G.L., Mostepanenko V.M., Romero C. Violation of the Nernst heat theorem in the theory of thermal Casimir force between Drude metals // Phys. Rev., 2004, **A69**, 022119.
84. Sernelius B.E. Finite – temperature Casimir force between metal plates: full inclusion of spatial dispersion resolves a long-standing controversy // J. Phys. A: Math. Gen., 2006, **39**, 6741.
85. Klimchitskaya G.L., Mostepanenko V.M. Conductivity of dielectric and thermal atom – wall interaction // J. Phys.A: Math. Theor. 2008, **41**, 312002(F); arXiv: 0801.1978v2 [quant-ph]15 Jan 2008; arXiv: 0802.3729v1 [quant-ph] 26 Feb 2008; arXiv: 0811.4398v1 [quant-ph] 26 Nov. 2008; Int. J. Mod. Phys. 2009, **A24** (8), 1721.
86. Klimchitskaya G.L., Mohideen U., Mostepanenko V.M. The Casimir force between real materials: experiment and theory // Rev. Mod. Phys., 2009, **81** (4), 1827

87. Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М. Поверхностные силы // Наука, М., 1985.
88. Maia Neto P.A., Lambrecht A., Reynaud S. Roughness correction to the Casimir force: beyond the proximity force approximation // Eur. Phys. Lett., 2005, **69**, 924; Phys. Rev., 2005, **A72**, 0605005.
89. Gies H., Klingmuller K. Casimir effect for curved geometries: proximity-force approximation validity limits // Phys. Rev. Lett., 2006, **96**, 220401.
90. Bulgac A., Magierski P., Wirzba A. Scalar Casimir effect between Dirichlet spheres and a plate and a sphere // Phys.Rev., 2006, **D73**, 025007; Phys.Rev., 2006, **A39**, 6815.
91. Noguez C., Roman-Velazquez C.E. Casimir effect between dissimilar materials: a test for the proximity theorem //arXiv: quant-ph/0312009v1, 1 Dec 2003.
92. Bordag M., Nikolaev V. Casimir force for a sphere in front of a plane beyond proximity force approximation // J.Phys. A: Math. Teor., 2008, **41**, 164002.
93. Roman-Velazquez C.E. and Sernelius B.E. Beyond the simple proximity force approximation: geometrical effects on the non-retarded Casimir interaction // arXiv: 0805/1547v1 [quant-ph] 11 May 2008; arXiv: 0807/1626v1 [quant-ph] 10 Jul 2008.
94. Dorofeyev I., Fuchs H., Jersch J. Spectral properties of fluctuating electromagnetic fields // Phys. Rev., 2002, **E65**, 026610.
95. Joulain K., Carminati R., Mulet J.-P., Greffet J.-J. Definition and measurement of the local density electromagnetic states close to an interface // Phys. Rev., 2003, **B68**, 245405.
96. Дедков Г.В., Кясов А.А. О структуре ближнего и дальнего равновесного электромагнитного поля вблизи плоской границы полупространства, заполненного однородной диэлектрической (магнитной) средой // Письма ЖТФ, 2006, **32** (5), 78.
97. Hinds E.A. et. al. Deflection of an atomic beam by the Casimir force // In: J.C. Zorn and R.R. Lewis (eds.), Atomic Physics 12, Amer. Inst. of Physics, N.Y., 1991, 283.
98. Mohapatra A.K., Unnikrishnan A. Measurement of the van der Waals force using reflection of cold atoms from magnetic thin-film mirrors // Europhys. Lett., 2006, **73**, 839.
99. Dedkov G.V. Fullerene nanotubes can be used when transporting gamma-quanta, neutrons, ion beams and radiation from relativistic particles // Nucl. Instr. Meth., 1998, **B143**, 584; Surf. Coat. Technol., 2002, **158**, 75.
100. Dedkov G.V., Kysov A.A. Nucl. Long-range non conservative interaction of moving neutral atoms with surface plasmons: a possibility of experimental verification // Nucl. Instr. Meth., 2001, **B183**, 241; ibid.: 2005, **B237**, 507.
101. Kien F.L., Balykin V.I., Hakuta K. Atom trap and wave-guide using a two color evanescent light field around a sub-wavelength-diameter optical fiber // Phys. Rev., 2004, **A70**, 063403.
102. Oberst H., Morinaga M., Shimizu K. et. al. One-dimensional focusing of an atomic beam by a flat reflector // Appl. Phys., 2003, **B76**, 801.
103. Balykin V.I., Letokhov V.S., Ovchinnikov Y.B., Sidorov A.I. Quantum-state-selective mirror reflection of atoms by laser light // Phys. Rev. Lett., 1988, **60**, 2137.
104. Scott R.G., Martin A.M., Fromhold T.M., Sheard F.W. Anomalous quantum reflection of Bose-Einstein condensates from a silicon surface // Phys. Rev. Lett. 2005, **95**, 073201.
105. Daul J.-M., Grangier P. Vacuum field atom trapping in wide aperture spherical resonator // Eur. Phys. J., 2005, **D32**, 195.
106. Horing N.J.M., Chen L.I. Magneto image effects in the van der Waals interaction of an atom and a bounded, dynamic, non local plasma like medium // Phys. Rev., 2002, **A66**, 042905.
107. Farina C., Santos F.C., Tort A.C. On the force between an electrically polarizable atom and a magnetically polarizable one // J. Phys. A: Math. Gen., 2002, **35**, 2477.
108. Tomas M.S. Vacuum force on an atom in a magnetodielectric cavity // Phys. Rev. 2005, **A72**, 034104; note erratum Phys. Rev. 2006, **A73**, 039904(E); Phys. Lett., 2005, **A342**, 381.
109. Buhmann S.Y. et. al. Casimir-Polder interaction of atoms with magnetodielectric bodies // Eur. Phys. J., 2005, **D35**, 15.
110. Buhmann S.Y., Scheel S., Safari H., Welsch D.-G. Dispersion forces and duality //arXiv: 0811.4298v1 [quant-ph] 26 Nov 2008.
111. Buhmann S.Y., Welsch D.-G. Dispersion forces in macroscopic quantum electrodynamics // Prog. Quant. Electr., 2007, **31**, 51 ; arXiv: 0608118v2 [quant-ph] 12 Jun 2007.
112. Дерягин Б.В., Абрикосова А.А. Исследование сил молекулярного притяжения между твердыми телами //ЖЭТФ, 1951, **21**, 495; ДАН СССР, 1953, **90**, 1055; Discussion Faraday Soc., 1954, **18**, 12.
113. Lamoreaux S.K. Demonstration of the Casimir effect in the 0.6 to 6 mm // Phys. Rev. Lett., 1997, **78**, 5; Phys.Rev., 1999, **A59**, R3149; Rep. Progr. Phys., 2005, **68**, 201.

114. *Mohideen U., Roy A.* Precision measurements of the Casimir force from 0.1 to 0.9 mm // *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **81**, 4549.
115. *Roy A., Mohideen U.* Demonstration of the nontrivial boundary dependence of the Casimir force // *Phys. Rev. Lett.*, 1999, **82**, 4380.
116. *Harris B.W., Chen F., Mohideen U.* Precision measurements of the Casimir force using gold surfaces // *Phys. Rev.*, 2000, **A62**, 052109.
117. *Chen F., Mohideen U., Klimchitskaya G.L., Mostepanenko V.M.* Investigation of the Casimir force between metal and semiconductor test bodies // *Phys. Rev. Lett.*, 2002, **88**, 101801; *Phys. Rev.*, 2005, **A72**, 020101.
118. *Chen F., Mohideen U.* Recent experimental advances in precision Casimir force measurements with the atomic force microscope // *J.Phys.A: Math. Gen.*, 2006, **39**, 6223.
119. *Petrov V., Petrov M., Bryksin V. et al.* Casimir force between thin films of real metals // *Opt.Lett.*, 2006, **31**, 3167.
120. *Петров В.М., Петров М.П., Брыксин В.В. и др.* Исследование сил Казимира методами динамической голографии // *ЖЭТФ*, 2007, **131**, 798.
121. *Yaminsky V.V., Stewart A.M.* Interaction of glass surfaces in air: dispersion forces // *Langmuir*, 2003, **19**, 4037.
122. *Harber D.M., Obrecht J.M., McGuirk, Cornell E.A.* Measurement of the Casimir–Polder force through center-of-mass oscillation of the Bose-Einstein condensate // *Phys. Rev.*, 2005, **A72**, 033610.
123. *Krim A., Widom A.* Damping of a crystal oscillator by an adsorbed monolayer and its relation to interfacial viscosity // *Phys. Rev.*, 1988, **B38**, 12184.
124. *Tomassone M.S., Sokoloff J.B., Widom A., Krim J.* Dominance of phonon friction for a Xe film on a silver (111) surface // *Phys. Rev. Lett.*, 1997, **79** (24), 4798.
125. *Gotsmann B., Seidel C., Anczykowski B., Fuchs H.* Conservative and dissipative interaction forces probed with dynamic AFM // *Phys. Rev.*, 1999, **B60**, 11051.
126. *Gotsmann B., Fuchs H.* Dynamic force microscopy of conservative and dissipative forces in an Al-Au(111) tip-sample system // *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **86**, 2597.
127. *Stipe B.C., Mamin H.J., Stowe T.D. et al.* Noncontact friction and force fluctuations between closely spaced bodies // *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **87**, 096801.
128. *Dransfeld K., Xu J.* The heat transfer between a heated tip and a substrate // *J.Microsc.*, 1988, **152**, 35.
129. *Xu J.-B. et al.* Heat transfer between two metallic surfaces at small distances // *J. Appl. Phys.*, 1994, **76**, 7209.
130. *Kittel A., Muller-Hirsch W., Parisi J. et al.* Near-field heat transfer in a scanning thermal microscope // *Phys.Rev.Lett.*, 2005, **95**, 224301.
131. *Majumdar A.* Scanning thermal microscopy // *Annu. Rev. Mater. Sci.*, 1999, **29**, 505.
132. *Cappella B., Dietler G.* Force –distance curves by atomic force microscopy // *Surf. Sci.Rep.*, 1999, **34**, 1.
133. *Butt H.J., Cappella B., Kappl M.* // *Surf. Sci. Rep.*, 2005, **59**, 1.
134. *Carpick R.E., Salmeron M.* Scratching the surface: fundamental investigations of tribology with atomic force microscopy // *Chem. Rev.*, 1997, **97**, 1163.
135. *Дедков Г.В.* Нанотрибология: экспериментальные факты и теоретические модели // *УФН*, 2000, **43** (6), 519; *Phys. Stat. Sol.*, 2000, **A179** (1), 3.
136. *Verdaguer A., Sacha G.M., Bluhm H. and Salmeron M.* Induced water condensation and bridge formation by electric fields in atomic force microscopy // *Chem. Rev.*, 2006, **110**, 14870.
137. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред // Наука, М., 1982.
138. *Базаров И.П.* Термодинамика // Высшая школа, М., 1991.
139. *Виноградова М.В., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн // Наука, М., 1982.
140. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. Часть 1 // Физматлит, М., 2001.
141. *Дедков Г.В., Кясов А.А.* Флуктуационно-диссипативное взаимодействие движущихся нейтральных атомов с плоской поверхностью: учет эффектов пространственной дисперсии // *Письма ЖТФ*, 2001, **27** (8), 68.
142. *Heinrichs L.* Response of metal surface to static and moving point charges and to polarizable charge distribution // *Physical Review*, 1973, **B8** (4), 1346.
143. *Svetovoy V.B., Esquivel R.* Effect of spatial dispersion in near-field radiative heat transfer between two parallel metallic surfaces // *Phys. Rev.*, 2005, **E72**, 036113.
144. *Esquivel–Sirvent R., Villarreal C., Mochan W.L. et al.* Spatial dispersion in Casimir forces: a brief review // *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2006, **39**, 6323.

145. *Chapuis P.-O., Volz S., Henkel C. et al.* Effect of spatial dispersion in near-field radiative heat transfer between two parallel metallic surfaces // arXiv: 802.1899v1 [physics.optics] 13 Feb 2008.
146. *Mkrтчian V., Parsegian V.A., Podgornik R. and Saslow W.M.* Universal thermal radiation drag on neutral objects // Phys. Rev. Lett., 2003, **91**, 220801.
147. *Henry G.R., Feduniak R.B., Silver J.E., Peterson M.A.* Distribution of a cavity blackbody radiation in a moving frame of reference // Phys. Rev., 1968, **176**, 1451.
148. *Дедков Г.В., Кясов А.А.* Консервативно – диссипативные силы взаимодействия и нагрев, обусловленные флуктуационным электромагнитным полем : две пластины при нерелятивистском относительном движении // ФТТ, 2010, **52** (2), 382; Письма ЖТФ, 2009, **35** (20), 89; Surface Sci., <http://dx.doi.org/10.1016/j.susc.2009.12.026>.
149. *Datta T., Ford L.H.* Retarded van der Waals potential between a conducting plane and a polarizable medium // Phys. Lett., 1981, **A83**, 314.
150. *Дедков Г.В., Кясов А.А.* О тепловой силе Казимира и теореме Нернста при взаимодействии малой частицы с поверхностью // Письма ЖТФ, 2008, **34** (21), 33.
151. *Dedkov G.V. Kyasov A.A.* Casimir–Polder force out of thermal equilibrium // arXiv: 0902.2461 [cond-mat.other] 14 Feb. 2009
152. *Батыгин В.В., Топтыгин И.Н.* Сборник задач по классической электродинамике // Наука, М., 1970.
153. *Мартыненко Ю.В., Огнев Л.И.* Тепловое излучение наночастиц // ЖТФ, 2005, **75** (11), 130.
154. *Antezza M., Pitaevskii L.P., Stringari S.* Effect of the Casimir–Polder force on the oscillation frequency of a trapped Bose–Einstein condensate // Phys. Rev., 2004, **A70**, 053619.
155. *Brown L.S., Maclay G.J.* Vacuum stress between conducting plates: an image solution // Phys. Rev., 1969, **184**, 1272.
156. *Klimchitskaya G.L., Mohideen U., Mostepanenko V.M.* Pulsating Casimir force // J. Phys. A: Math. Theor., 2007, **40**, F841.
157. *Mostepanenko V.M., Geyer B.* New approach to the thermal Casimir force between real metals // J. Phys. A: Math. Theor., 2008, **41**, 164014.
158. *Brevik I., Ellingsen S.A., Høye J.S. et al.* Analytical and numerical demonstration of how Drude dispersive model satisfies Nernst’s theorem for the Casimir entropy // J. Phys. A: Math. Theor., 2008, **41**, 164017.
159. *Pitaevskii L.P.* Thermal Lifshitz force between atom and conductor with small density carriers // Phys. Rev. Lett., 2008, **101**, 163202.
160. *Dalvit D.A.R., Lamoreaux S.K.* Contributions of drifting carriers to the Casimir–Lifshitz and Casimir–Polder interaction with semiconductor materials // Phys. Rev Lett., 2008, **101**, 163203.
161. *Decca R.S., Lopez E., Fischbach E. et al.* Tests of new physics from precise measurements of the Casimir pressure between two gold-coated surfaces // Phys. Rev., 2007, **D75**, 077101
162. *Decca R.S., Lopez E., Fischbach E. et al.* Novel constraints on light elementary particles and extra dimensional physics from the Casimir effect // Eur. Phys. J., 2007, **C51**, 963.
163. *Volokitin A.I., Persson B.N.J.* Adsorbate vibrational mode enhancement of radiative heat transfer and van der Waals friction // Surf. Sci., 2005, **587**, 88.
164. *Bordag M., Klimchitskaya G.L., Mostepanenko V.M.* The Casimir force between plates with small deviations from plane parallel geometry // Int. J. Mod. Phys., 1995, **A10**, 2661.
165. *Noguez C., Roman–Velazquez C.E.* Dispersive force between dissimilar materials: geometrical effects arXiv: cond-mat/0406132v1 [cond-mat.other] 5 Jun 2004.
166. *Golestanian R.* Lifshitz interaction between dielectric bodies of arbitrary geometry // Phys. Rev. Lett., 2005, **95**, 230601.
167. *Klimchitskaya G.L.* Problems and paradoxes of Lifshitz theory // arXiv: 0811.4398v1 [quant –ph] 26 Nov 2008.
168. *Zurita–Sanchez J.R., Greffet J.J., Novotny L.* Friction forces arising from fluctuating electromagnetic field // Phys. Rev., 2004, **A69**, 022902.
169. *Дедков Г.В.* О диссипации механической энергии в бесконтактном динамическом режиме сканирующего зондового микроскопа в вакууме // ФТТ, 2006, **48** (4), 700.
170. *Giessibl F.G.* Advances in atomic force microscopy // Rev. Mod. Phys., 2003, **75**, 949.
171. *Wickramasinghe H.K., Weaver J.M.R., Williams C.C.* // In book: S. Hunklinger, W. Ludwig and G. Weiss (eds), Phonons 89, World Scientific, Singapore, 1990, 1345.

172. *Failache H., Saltiel S., Fichet M., Bloch D., Ducloy M.* Resonant van der Waals repulsion between excited Cs atoms and sapphire surface // *Phys. Rev. Lett.*, 1999, **83**, 5467.
173. *Fichet M., Dutier G., Yarovitsky A.P. et. al.* Exploring the van der Waals atom-surface attraction in the nanometric range // *Eur. Phys. Lett.*, 2007, **77**, 54001.
174. *Sukenik C.I., Boshier M.S., Cho D. et. al.* Measurement of the Casimir–Polder force // *Phys. Rev. Lett.*, 1993, **70**, №5, 560.
175. *Greffét J.-J., Carminati R., Joulain K. et. al.* Coherent emission of light by thermal sources // *Nature*, 2002, **416**, 61.
176. *Narayanaswami A., Sheng Shen, Gang Chen.* Near-field radiative heat transfer between a sphere and a substrate // *Phys. Rev.* 2008, **B78**, 115303; *Nano Lett.*, 2009, **9** (8), 2009.

## FLUCTUATION - ELECTROMAGNETIC INTERACTION OF MOVING BODIES

G.V. Dedkov, A.A. Kyasov

*Kabardino -Balkarian State University, Nalchik*  
gv\_dedkov@mail.ru

Received 01.06.09

A relativistic theory of the fluctuation - electromagnetic interaction of relatively moving bodies is presented with emphasis on configurations "small particle - thick plate" and "plate - plate". Fundamental expressions are derived for conservative-dissipative forces and heating power of the moving body in the rest frame of another (resting) body. Equilibrium and out of equilibrium thermal configurations are considered. A critical analysis of theoretical results obtained by other authors is given. Some recent experimental results are briefly discussed, too.