АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ ОПЕРАТОРА ШРЕДИНГЕРА В ТОНКИХ БЕСКОНЕЧНЫХ ТРУБКАХ И ТОНКИХ ЗАМКНУТЫХ ТРУБКАХ

В.В. Грушин

Московский институт электроники и математики при НИУ ВШЭ

vvgrushin@mail.ru

Поступила 30.09.2012

В работе получено асимптотическое разложение собственных значений оператора Лапласа с нулевыми условиями Дирихле в бесконечных трубках, т. е. в бесконечных изогнутых цилиндрах с внутренним кручением при равномерном сжатии поперечных сечений, по малому параметру, характеризующему поперечные размеры трубки. Аналогичное разложение получено для оператора Шредингера с учетом магнитного поля для конечных замкнутых трубок. Предложен метод сведения задачи о нахождении собственных значений к решению неявного уравнения.

УДК 517.9

1. Введение

Изучению связанных состояний, возникающих в трубках, т.е. при различных возмущениях бесконечных цилиндров (и бесконечных полосок в двумерном случае), называемых также квантовыми волноводами, посвящено большое количество работ (нужно отметить, что ранее подобные вопросы рассматривались в связи с теорией волноводов и резонаторов). В работах В. П. Маслова [1, 2], В. П. Маслова и Е. М. Воробьёва [3] была построена асимптотика собственных функций и квазистационарных собственных значений уравнения $\Delta u + k^2 u = 0$ с краевыми условиями на эквидистантных кривых. Было показано, что, подбирая нужным образом искривлённость полоски и длину участка, где происходит искривление, можно добиться, чтобы существовало лишь одно собственное значение, т. е. резонатор имел лишь одну поперечную моду. Аналогичные вопросы исследовались для областей, ограниченных эквидистантными поверхностями. В работах В. В. Белова, С. Ю. Доброхотова, С. О. Синицына [4], В. В. Белова, С. Ю. Доброхотова, С. О. Синицына, Т. Я. Тудоровского [5], В. В. Белова, С. Ю. Доброхотова, Т. Я. Тудоровского [6, 7], В. В. Белова, С. Ю. Доброхотова, В. П. Маслова, Т. Я. Тудоровского [8], с помощью канонического оператора В. П. Маслова построены быстроосциллирующие решения уравнения Шредингера и асимптотические собственные значения в тонких трубках. Изучению связанных состояний в трубках посвящены работы П. Дюкло и П. Экснера [9], П. Экснера и П. Шеба [10], П. Экснера [11, 12], В. Булла, Ф. Гезтези, Б. Саймона [13], П. Экснера и С. А. Вугалтера [14], Д. Борисова, П. Экснера, Р. Гадыльшина и Д. Крейсчержика [15], В. В. Грушина [16]–[20], Р. Р. Гадыльшина [23]. В работах [10, 11] было доказано существование собственного значения для слабо изогнутых волноводов, а в [9] была сосчитана его асимптотика по малому параметру. В [9] также рассматривалась асимптотика собственных значений в тонких трубках без внутреннего кручения (подробнее об этих результатах будет сказано в конце п. 2). В [13] в двумерном случае рассматривались локальные деформации бесконечной полоски типа локальных растяжений в поперечных направлениях в некритической ситуации. В двумерном случае в [14] было показано, что в критической ситуации собственное значение может как возникать, так и не возникать. В случае, когда собственное значение всё же возникает, его асимптотика была построена в [15], [23]. В [16] были исследованы вопросы возникновения собственного значения и его асимптотики при возмущении волновода малым локализованным дифференциальным оператором второго порядка. В качестве примера на применение полученных общих формул в [16] рассматривались и деформации типа локальных растяжений в поперечных направлениях в некритическом случае, а в [17] рассматривались возмущения, связанные со слабым изгибанием и внутренним кручением волновода. В [19] изучалось асимптотическое поведение собственных значений оператора Лапласа в тонких бесконечных трубках, а в [20] изучалось асимптотическое поведение собственных значений оператора Шредингера в тонких замкнутых трубках.

В данной статье, имеющей обзорный характер, рассматривается асимптотическое поведение собственных значений оператора Лапласа с условием Дирихле на границе в бесконечной изогнутой трубке с внутренним кручением и оператора Шредингера с учётом магнитного поля в конечной замкнутой трубке при равномерном сжатии поперечных сечений трубки. Основной результат состоит в получении асимптотической формулы для собственных значений по малому параметру, характеризующему поперечные размеры трубки. Для получения асимптотической формулы применяется метод, отличный от метода, применявшегося в [9], состоящий в сведении задачи о нахождении собственных значений к решению некоторого неявного уравнения.

2. Формулировка основного результата в случае бесконечной трубки

Пусть в $\mathbb{R}^3$ имеется гладкая несамопересекающаяся кривая Γ, заданная уравнением $x = X(s)$, где s – длина дуги (со знаком) кривой Γ, отсчитанная от фиксированной точки $x_0 \in \Gamma$. Будем предполагать, что кривая Γ снабжена трехгранником Френе, состоящим из взаимно ортогональных единичных векторов класса $C^\infty(\mathbb{R})$, $\mathbf{v}(s) = \dot{X}(s)$, удовлетворяющих системе уравнений Френе $\dot{\mathbf{v}} = \gamma\mathbf{n}$, $\dot{\mathbf{n}} = -\gamma\mathbf{v} + \varkappa\mathbf{b}$, $\dot{\mathbf{b}} = -\varkappa\mathbf{n}$, где $\gamma(s)$ – кривизна (со знаком), $\varkappa(s)$ – кручение кривой Γ, точка здесь и далее означает производную по s. Будем предполагать, что $\varkappa(s) \in C^\infty(\mathbb{R})$, а $\gamma(s) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (q_1, q_2) имеется связная ограниченная область M с бесконечно гладкой границей ∂M. Обозначим через $\Pi(s)$ нормальную к кривой Γ плоскость, в которой векторы $\mathbf{n}(s)$ и $\mathbf{b}(s)$ образуют базис. Рассмотрим в $\Pi(s)$ базис $(\mathbf{n}_\phi(s), \mathbf{b}_\phi(s))$, образованный поворотом базиса $(\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ на угол $\phi(s) \in C^\infty(\mathbb{R})$. *Трубкой* будем называть область $\widetilde{\Omega}_\varepsilon$ в $\mathbb{R}^3$, которая получается как образ прямой трубки (цилиндра)

$$\Omega = \{(s, q) : -\infty < s < +\infty, q \in M\}, \qquad q = (q_1, q_2)$$

при отображении

$$\begin{gathered} x = X(s) + \varepsilon q_1 \mathbf{n}_\phi(s) + \varepsilon q_2 \mathbf{b}_\phi(s) = \\ = X(s) + \varepsilon(q_1 \cos\phi - q_2 \sin\phi)\mathbf{n} + \varepsilon(q_1 \sin\phi + q_2 \cos\phi)\mathbf{b}. \end{gathered} \tag{1}$$

Здесь малый параметр ε введён для того, чтобы иметь возможность рассматривать "тонкие"трубки.

Будем предполагать, что отображение (2.1) в $\overline{\Omega}$ есть диффеоморфизм, что заведомо выполняется при достаточно малых ε. Таким образом, (s, q_1, q_2) представляют собой криволинейные координаты в $\widetilde{\Omega}_\varepsilon$. Трубку можно наглядно представлять себе как результат скручивания и изгибания бесконечного цилиндра, либо область, которую заметает плоская фигура M при таком движении её плоскости, что одна из точек этой плоскости движется вдоль кривой Γ, а сама эта плоскость остаётся нормальной к кривой Γ. Если носитель γ расположен в отрезке $[-l, l]$, то Γ при $s < -l$ и $s > l$ превращается в прямые линии.

Сформулируем основной результат статьи. Введём углы $\alpha(s)$ и $\theta(s)$, удовлетворяющие соотношениям

$$\dot{\alpha}(s) + \varkappa(s) = 0, \qquad \alpha(s) + \theta(s) = \phi(s). \tag{2}$$

Угол $\theta(s)$, следуя работе [7], будем называть *внутренним кручением трубки.* Будем предполагать, что $\dot{\theta}(s)$ принадлежит $C_0^\infty(\mathbb{R})$.

В трубке $\widetilde{\Omega}_\varepsilon$ рассмотрим оператор Δ_D – расширение по Фридрихсу оператора Лапласа Δ, первоначально определённого на $C_0^\infty(\widetilde{\Omega}_\varepsilon)$, что является математической моделью квантового волновода (см. [4]–[12], [25]). Как показано в [16], областью определения оператора Δ_D является пространство $\mathcal{H}_D^2(\widetilde{\Omega}_\varepsilon)$, состоящее из функций соболевского пространства $\mathcal{H}^2(\widetilde{\Omega}_\varepsilon)$, удовлетворяющих нулевому условию Дирихле (т. е. обращающихся в нуль на границе области $\widetilde{\Omega}_\varepsilon$). Напомним, что $u \in \mathcal{H}^m(\widetilde{\Omega}_\varepsilon)$, если функция u и её обобщенные производные до порядка m включительно принадлежат $L_2(\widetilde{\Omega}_\varepsilon)$ (см., например, [26]). Существенную область определения оператора Δ_D составляют функции из $C_0^\infty(\overline{\widetilde{\Omega}}_\varepsilon)$, обращающиеся в нуль на границе области $\widetilde{\Omega}_\varepsilon$.

Основная цель этой статьи состоит в том, чтобы получить асимптотическую формулу для поведения собственных значений оператора $-\Delta_D$ при $\varepsilon \to +0$. Особую роль в этой формуле играет некоторый одномерный оператор Шредингера T_0, который, следуя терминологии из [7], будем называть *редуцированным оператором* (в [25] аналогичный оператор называется эффективным гамильтонианом). Чтобы определить этот оператор, обозначим через

$$\nu_0 < \nu_1 \le \nu_2 \le \dots \le \nu_n \le \dots$$

собственные значения оператора $-\Delta_D^M$, т. е. оператора Лапласа со знаком "минус"в области M, а через $\{\chi_n\}$ – соответствующую полную ортонормированную систему собственных функций оператора $-\Delta_D^M$. Функции χ_n можно выбрать вещественными. Хорошо известно, что основное собственное значение ν_0 невырождено и χ_0 можно выбрать положительной в M (см., например, [27]). Введём оператор момента $L = q_1\partial_{q_2} - q_2\partial_{q_1}$ и обозначим через L_{00} его среднее значение в состоянии χ_0, т. е. $L_{00} = (L\chi_0, \chi_0)_M$, где $(\cdot, \cdot)_M$ – скалярное произведение в $L_2(M)$. Аналогичное обозначение будет использоваться и для других операторов. Положим $a(s) = -\gamma^2(s)/4 - \dot{\theta}^2(s)(L^2)_{00}$ и рассмотрим одномерный оператор Шредингера $T_0 = -\partial_s^2 + a(s)$. Пусть $\mu_k,\ k = 1 \dots r$ – собственные значения оператора T_0 (если таковые имеются), а $\Phi_k(s)$ – соответствующие нормированные собственные функции. Отметим, что все μ_k являются отрицательными и принадлежат дискретному спектру оператора T_0 (более подробно о свойствах собственных значений оператора T_0 будет сказано в п. 4). Спектр оператора T_0 обозначается как $\sigma(T_0)$.

Выкинем из отрицательной вещественной полуоси $\mathbb{R}_-$ интервалы, содержащие собственные значения μ_k оператора T_0, и интервал, содержащий начало координат; оставшееся замкнутое множество отрицательной полуоси обозначим через W. Напомним, что кроме бесконечной дифферецируемости всех величин, входящих в систему Френе, мы предполагаем, что $\gamma(s)$ и $\dot{\theta}(s)$ имеют компактные носители. Пусть l выбрано так, что эти носители содержатся в $[-l, l]$.

Теорема 1 *Для построенного указанным способом множества W существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в $W + \nu_0/\varepsilon^2$ нет собственных значений оператора $-\Delta_D$. Более того, $W + \nu_0/\varepsilon^2$ принадлежит резольвентному множеству оператора $-\Delta_D$.*

Теорема 2 *Пусть μ_k – некоторое собственное значение редуцированного оператора T_0 и W_k – такой отрезок, содержащий μ_k, что W_k не содержит других точек из $\sigma(T_0)$. Тогда при некотором $\varepsilon_0 > 0$ для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ существует единственное собственное значение $\lambda_k(\varepsilon)$ оператора $-\Delta_D$, принадлежащее $W_k + \nu_0/\varepsilon^2$; это собственное значение невырождено и $\mu_k(\varepsilon) = \lambda_k(\varepsilon) - \nu_0/\varepsilon^2$ имеет предел μ_k при $\varepsilon \to +0$. Если положить $\mu_k(0) = \mu_k$, то $\mu_k(\varepsilon) \in C^\infty[0, \varepsilon_0)$.*

Доказательство теорем 1 и 2 будет дано в п. 2 – 7.

Следствие *Для собственного значения $\lambda_k(\varepsilon)$ из теоремы 2 при $\varepsilon \to +0$ имеет место асимптотическое разложение*

$$\lambda_k(\varepsilon) \sim \frac{\nu_0}{\varepsilon^2} + \mu_k + \sum_{n=1}^{\infty} d_{k,n}\varepsilon^n. \tag{3}$$

Действительно, (3) следует из формулы Тейлора, поскольку в силу теоремы 2 функция μ_k бесконечно дифференцируема при $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$. Коэффициент $d_{k,1}$ будет вычислен в конце п. 7.

Отметим, что вопрос о поведении собственных значений оператора $-\Delta_D$ в тонких трубках обсуждался в [9], но там рассматривались только "круглые"трубки без внутреннего кручения (M – круг с центром в начале координат и $\theta(s) \equiv 0$). Вместо формулы (3) в [9] получено разложение

$$\lambda(\varepsilon) = \frac{\mu_0}{\varepsilon^2} + \mu_k + \sum_{n=1}^{\infty} e_n(\varepsilon), \tag{4}$$

причём ряд абсолютно сходится для достаточно малых ε, $e_n(\varepsilon) = \mathcal{O}(\varepsilon^n)$ при $\varepsilon \to +0$, $e_n(s) \in C^\infty[0, \varepsilon_0)$ для некоторого ε_0. Отсюда ещё не вытекает бесконечной дифференцируемости $\lambda_k(\varepsilon)$ при $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$ как и асимптотического разложения (3), поскольку не указана оценка остаточного члена ряда в (4).

3. Оператор Лапласа в координатах, связанных с трубкой

В этом пункте мы получим выражение для оператора Лапласа в координатах (1). Введём углы $\alpha(s)$ и $\theta(s)$, удовлетворяющие соотношениям (2) и пусть

$$h(s) = 1 - \varepsilon\gamma(s)(q_1 \cos\phi(s) - q_2 \sin\phi(s)), \qquad L = (q_1 \partial_{q_2} - q_2 \partial_{q_1}). \tag{5}$$

В координатах (s, q_1, q_2) оператор Лапласа приобретает вид

$$h^{-1}(\partial_s - \dot{\theta} L) h^{-1}(\partial_s - \dot{\theta} L) + \varepsilon^{-2}(h^{-1}\partial_{q_1} h \partial_{q_1} + h^{-1}\partial_{q_2} h \partial_{q_2}). \tag{6}$$

Эту формулу можно получить, используя известное выражение оператора Лапласа в криволинейной системе координат через метрический тензор (ср. [4]-[7], [25]). Но этот путь приводит к довольно громоздким вычислениям, поскольку система координат (s, q_1, q_2) в общем случае нетриортогональная. Несколько более простым способом эта формула была получена в [17]. Приведём краткую схему вывода этой формулы.

Мы используем для вывода формулы (6) специальную промежуточную триортогональную систему координат (s, τ_1, τ_2) (такие координаты использовались в [5]-[8], [9]).

Пусть (τ_1, τ_2) – координаты на плоскости $\Pi(s)$ в базисе $(\mathbf{n}_\alpha(s),\ \mathbf{b}_\alpha(s))$, полученном из $(\mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s))$ поворотом на угол $\alpha(s)$. Система координат (s, τ_1, τ_2) является триортогональной. Подсчёт метрики в этих координатах с учётом соотношений Френе приводит к простому выражению

$$dx^2 = h^2\, ds^2 + \varepsilon^2 d\tau_1^2 + \varepsilon^2 d\tau_2^2, \qquad h = 1 - \varepsilon\gamma(\tau_1 \cos\alpha - \tau_2 \sin\alpha).$$

Поэтому оператор Лапласа в координатах (s, τ_1, τ_2) имеет вид

$$h^{-1}\partial_s h^{-1}\partial_s + \varepsilon^{-2}(h^{-1}\partial_{\tau_1} h \partial_{\tau_1} + h^{-1}\partial_{\tau_2} h \partial_{\tau_2}),$$

причём h является якобианом при переходе к координатам (s, τ_1, τ_2). После поворота базиса $(\mathbf{n}_\alpha(s), \mathbf{b}_\alpha(s))$ на угол $\theta(s)$ получаем базис $(\mathbf{n}_\phi(s), \mathbf{b}_\phi(s))$, и остаётся только перейти из координат (s, τ_1, τ_2) в координаты (s, q_1, q_2), используя простые соотношения $\tau_1 = q_1 \cos\theta - q_2 \sin\theta$, $\tau_2 = q_1 \sin\theta + q_2 \cos\theta$. В результате получим формулу (6), причём h будет якобианом при переходе от координат x к (s, q_1, q_2). Формула (6) использовалась в [17].

Теперь перейдём от оператора $-\Delta_D$ к оператору

$$H_\varepsilon = -h^{1/2}\Delta_D h^{-1/2}, \tag{7}$$

который запишем в координатах $(s, q1, q2)$. Представив H_ε в виде

$$H_\varepsilon = -\Big(\partial_s - \dot\theta L + \frac{(\partial_s - \dot\theta L)h}{2h}\Big)h^{-2}\Big(\partial_s - \dot\theta L - \frac{(\partial_s - \dot\theta L)h}{2h}\Big) - \\ - \varepsilon^{-2}\Big(\partial_{q_1} + \frac{\partial_{q_1}h}{2h}\Big)\Big(\partial_{q_1} - \frac{\partial_{q_1}h}{2h}\Big) - \varepsilon^{-2}\Big(\partial_{q_2} + \frac{\partial_{q_2}h}{2h}\Big)\Big(\partial_{q_2} - \frac{\partial_{q_2}h}{2h}\Big),$$

после несложных вычислений получаем формулу

$$H_\varepsilon = -(\partial_s - \dot\theta L)\frac{1}{h^2}(\partial_s - \dot\theta L) - \frac{1}{\varepsilon^2}(\partial^2_{q_1} + \partial^2_{q_2}) - \frac{\gamma^2}{4h^2} + \frac{(\partial_s - \dot\theta L)^2 h}{2h^3} - \frac{5}{4}\frac{((\partial_s - \dot\theta L)h)^2}{h^4}. \tag{8}$$

Именно эта формула и будет использоваться в дальнейшем. Так как H_ε унитарно эквивалентен исходному оператору $-\Delta_D$, то собственные значения этих операторов совпадают. Ясно, что для достаточно малых ε оператор H_ε можно записать в виде

$$H_\varepsilon = -(\partial_s - \dot\theta L)^2 - \frac{1}{\varepsilon^2}(\partial^2_{q_1} + \partial^2_{q_2}) - \frac{\gamma^2}{4} + \varepsilon b(s, q, \partial_s, \partial_{q_1}, \partial_{q_2}, \varepsilon), \tag{9}$$

где b – дифференциальный оператор с бесконечно дифференцируемыми по (s, q, ε) коэффициентами в $\overline{\Omega} \times [0, \varepsilon_0)$ с некоторым $\varepsilon_0 > 0$, обращающимися в нуль при $|s| \geq l$.

Отметим, что формула (8) при $\theta(s) \equiv 0$ имеется в [9], т. е. там приведена эта формула в координатах (s, τ_1, τ_2), связанных с репером $(\mathbf{v}, \mathbf{n}_\alpha, \mathbf{b}_\alpha)$; отсюда с помощью преобразования поворота на угол θ также легко получается формула (8).

4. Свойства собственных значений редуцированного оператора T_0

В этом пункте приводятся известные свойства собственных значений оператора T_0, характерные для любых одномерных операторов Шредингера с финитным потенциалом (см. например, [27]). Для полноты изложения для некоторых из них мы приведём доказательства. Часть доказательств основана на том, что вне отрезка $[-l, l]$, содержащего $\operatorname{supp} a(s)$, собственная функция $\Phi_k(s)$ является решением обыкновенного уравнения

$$\ddot\Phi_k(s) + \mu_k\Phi_k(s) = 0, \tag{10}$$

общее решение которого хорошо известно.

1. Собственные значения μ_k оператора T_0 отрицательны.

Пусть $\mu_k \geq 0$. Так как $\Phi_k(s) \in L_2(\mathbb{R})$, то из вида общего решения уравнения (4.1) ясно, что $\Phi_k(s) = 0$ на $(-\infty, -l]$. Теперь из теоремы о единственности решения задачи Коши для обыкновенных уравнений следует, что $\Phi_k(s) \equiv 0$, следовательно, при $\mu_k \geq 0$ собственных значений нет.

2. Собственные значения μ_k невырождены.

Это следует из того, что при $\mu_k < 0$ есть только одно (с точностью до умножения на константу) решение на $(-\infty, -l]$, принадлежащее $L_2(\mathbb{R})$.

3. Оператор T_0 может иметь только конечное число собственных значений.

Из равенства

$$((T_0-\mu)\Phi_k,\Phi_k)=(\dot\Phi_k,\dot\Phi_k)+((a-\mu)\Phi_k,\Phi_k)=0$$

следует, что при $\mu\le a_{\min}=\min a(s)$ собственных значений нет. Так как собственные значения можно находить из уравнения

$$G(\eta)=\dot\Phi(\eta,l)+\eta\Phi(\eta,l)=0,$$

где $\mu=-\eta^2,\eta>0,\Phi(\eta,s)$ – решение задачи Коши $\Phi(\eta,-l)=1,\dot\Phi(\eta,-l)=\eta$ для уравнения $(T_0-\mu)\Phi=0$, а функция $G(\eta)$ аналитична, то на любом конечном отрезке имеется только конечное число собственных значений. В частности, на отрезке $[a_{min},0]$ также имеется только конечное число таких значений.

4. Если $a(s)\ge0$, то собственных значений у оператора T_0 нет.

Действительно, в этом случае оператор T_0 положительно определён и, следовательно, не имеет отрицательных собственных значений.

5. Существенный спектр $\sigma_{ess}(T_0)$ оператора T_0 составляет $\overline{\mathbb{R}}_+=[0,+\infty)$.

Доказательство см., например, в [27]. Это также легко доказать с помощью рассуждений из [17], где было доказано, что для трубок $\sigma_{ess}(-\Delta_D)=[\nu_0/\varepsilon^2,+\infty)$ (см. также [24]).

6. Если $\int_{\mathbb{R}}a(s)\,ds<0$, то у T_0 есть по крайней мере одно собственное значение.

Пусть $\rho(s)$ – такая функция из $C_0^\infty(\mathbb{R})$, что $\rho(0)=1$. Построим последовательность $\rho_n(s)=\rho(s/n)$ и рассмотрим форму $(\dot\rho_n,\dot\rho_n)+(a\rho_n,\rho_n)$. Ясно, что при $n\to\infty$ в пределе получается $\int_{\mathbb{R}}a(s)\,ds$, следовательно, при некотором n эта форма будет принимать отрицательное значение. Из вариационного принципа (см., например, [27] глава 8) отсюда следует, что на отрицательной оси есть точки спектра оператора T_0. Так как спектр на отрицательной полуоси дискретен, то должно существовать собственное значение оператора T_0.

Отметим, что в доказательстве теорем 1 и **??** используются свойства 1–3 и 5. Свойства 4 и 6 показывают, что наличие или отсутствие собственных значений оператора T_0 зависит от соотношения между слагаемыми, составляющими потенциал $a(x)$, причём $(L^2)_{00}\le0$, поскольку

$$(L^2)_{00}=(L^2\chi_0,\chi_0)=-(L\chi_0,L\chi_0)\le0.$$

Как показано в [17], равенство нулю достигается только для областей, представляющих собой круг или кольцо с центром в начале координат, а для остальных областей $(L^2)_{00}<0$. Как отмечено в [25] с физической точки зрения это означает, что частица отталкивается от областей с большими $|\dot\theta^2(s)|$ и притягивается к областям с большой по абсолютной величине кривизной.

5. Доказательство теоремы 1

Для построения резольвенты оператора H_ε запишем уравнение

$$\varepsilon^2(H_\varepsilon-\lambda)u=f,\tag{11}$$

(H_ε определяется формулой (8) или формулой (9)), в матричном виде, используя разложение пространства $L_2(M)$ в прямую сумму

$$L_2(M)=[\chi_0]\oplus[\chi_0]^\perp,$$

где $[\chi_0]$ – подпространство, натянутое на вектор χ_0, а $[\chi_0]^\perp$ – его ортогональное дополнение. Через P_0 и P_1 будем обозначать проекторы на эти подпространства. Так как функции из $C_0^\infty(\overline{\Omega})$ плотны в $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$, то функции для дальнейших оценок можно брать из $C_0^\infty(\overline{\Omega})$, после чего полученные оценки распространять на всё пространство $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$ с помощью операции замыкания. Разложив функцию $u(s,q) \in C_0^\infty(\overline{\Omega})$ при каждом s в ряд Фурье по ортонормированной системе $\{\chi_n\}$, получим

$$u(s,q) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(s)\chi_n(q), \qquad C_n(s) = (u(s,q), \chi_n(q))_M.$$

Пусть $\mathcal{L}_0$ – подпространство в $L_2(\Omega)$, состоящее из функций $v(s)\chi_0(q)$, где $v(s) \in L_2(\mathbb{R})$, а $\mathcal{L}_0^\perp$ – ортогональное дополнение к $\mathcal{L}_0$; соответственно этому функция u раскладывается в сумму $u = u_0 + u_1$. Ясно, что

$$u_0(s,q) = C_0(s)\chi_0(q), \qquad u_1(s,q) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(s)\chi_n(q), \tag{12}$$

причём

$$u_0(s,q) = P_0 u(s,q),\ u_1(s,q) = P_1 u(s,q) = u(s,q) - P_0 u(s,q)$$

при каждом s. Аналогичным образом функция f раскладывается в сумму $f = f_0 + f_1$.

Как показано в [16], оператор Δ_D^Ω осуществляет изоморфизм между $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$, следовательно,

$$\left(\int_\Omega |\Delta u(s,q)|^2\, ds\, dq\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\ddot{C}_n(s) - \nu_n C_n(s)|^2\, ds\right)^{1/2} \tag{13}$$

есть эквивалентная норма в $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$.

Положим

$$\mu = \lambda - \frac{\nu_0}{\varepsilon^2} \tag{14}$$

и введём обозначения

$$b_{00}C_0 = (b(C_0\chi_0), \chi_0)_M,\ b_{01}u_1 = (bu_1, \chi_0)_M,\ b_{10}C_0 = P_1 b(C_0\chi_0),\ b_{11}u_1 = P_1 bu_1,$$

где b определено в (9). Аналогичные обозначения будем использовать и для операторов L и L^2. Подставив разложение $u = u_0 + u_1$ в (11), применив при каждом s проекторы P_0 и P_1 и перейдя от $C_0(s)$ к $v_0(s) = \varepsilon^2 C_0(s)$, получим систему

$$\begin{gathered} -\partial_s^2 v_0 + a v_0 - \mu v_0 + \varepsilon B_{00}(s, \partial_s, \varepsilon) v_0 + \varepsilon B_{01}(s, \varepsilon\partial_s, \varepsilon) u_1 = f_0(s), \\ -\varepsilon^2 \partial_s^2 u_1 - (\partial_{q_1}^2 + \partial_{q_2}^2 + \nu_0 + \mu\varepsilon^2) u_1 + B_{10}^0(s, \partial_s) v_0 + \\ \varepsilon B_{10}(s, \partial_s, \varepsilon) v_0 + \varepsilon B_{11}(s, \varepsilon\partial_s, \varepsilon) u_1 = f_1(s,q), \end{gathered} \tag{15}$$

где

$$\begin{gathered} B_{00} = b_{00},\ B_{01} = \varepsilon^2 b_{01} + \varepsilon\ddot{\theta} L_{01} - \varepsilon\dot{\theta}^2 (L^2)_{01} + 2\varepsilon\dot{\theta} L_{01}\partial_s, \\ B_{10}^0 = \ddot{\theta} L_{10} - \dot{\theta}^2 (L^2)_{10} + 2\dot{\theta} L_{10}\partial_s, \\ B_{10} = b_{10},\ B_{11} = \varepsilon^2 b_{11} + \varepsilon\ddot{\theta} L_{11} - \varepsilon\dot{\theta}^2 (L^2)_{11} + 2\varepsilon\dot{\theta} L_{11}\partial_s - \varepsilon\gamma^2/4. \end{gathered} \tag{16}$$

При выводе системы (15) использовалось соотношение $L_{00} = 0$, которое следует из антисимметричности оператора L.

Левые части системы (15) определяют непрерывный оператор

$$A : \mathcal{H}^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^2_D(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp \to L_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}_0^\perp$$

и для доказательства существования резольвенты оператора H_ε при заданных ε и λ достаточно установить, что A является изоморфизмом. Оператор A представляется в виде суммы $A = A_0 + \varepsilon B$, где A_0 определяется из (15), если все B_{ij} положить равными нулю, а B определяется матричными элементами $B_{i,j}$. Если $\mu \notin \sigma(T_0)$ ($\sigma(T_0)$ – спектр оператора T_0), то решение системы (15) без операторов B_{ij} можно получить в явном виде с помощью разложения (12) и преобразования Фурье. В результате получим, что оператор A_0^{-1} определяется формулами

$$v_0 = (T_0 - \mu)^{-1} f_0,\ u_1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n(s)\chi_n(q),\ C_n(s) = F^{-1}_{\xi\to s}\left(\frac{F_{s\to\xi}(f_1 - B^0_{10}v_0, \chi_n)_M}{\varepsilon^2\xi^2 + \nu_n - \nu_0 - \mu\varepsilon^2}\right), \quad (17)$$

где $F_{s\to\xi}$ – прямое, а $F^{-1}_{\xi\to s}$ – обратное преобразования Фурье. Учитывая, что $\mu \in W$, для v_0 получаем оценки

$$\|v_0\| \le c\|f_0\|, \quad \|v_0\|_2 - \mu\|v_0\| \le c\|f_0\|, \quad (18)$$

где $\|\cdot\|_2$ – норма в $\mathcal{H}^2(\mathbb{R})$, а константа c не зависит от $f_0 \in L_2(\mathbb{R})$. Неравенство (5.8) следует из известного равенства $\|(T_0 - \mu)^{-1}\| = \operatorname{dist}(\mu, \sigma(T_0))$, справедливого для любых самосопряжённых операторов (см., например, [28] глава 6 п. 1 пример 2), поскольку $\partial_s^2 v_0$ из уравнения $\partial_s^2 v_0 + a(s)v_0 = f_0$ выражается через f_0 и v_0. Кроме того, оценка (18) получается также из общих оценок статьи [29]. Из (17), (18) и того, что (13) является эквивалентной нормой в $\mathcal{H}^2_D(\Omega)$, получаем, что оператор A_0 при $\mu \in W$ и $\varepsilon > 0$ является изоморфизмом.

При $\mu \in W$, где W определено в формулировке теоремы 1, будем рассматривать εB как возмущение и пытаться строить A^{-1} в виде ряда Неймана

$$A^{-1} = A_0^{-1} + A_0^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}(-\varepsilon B A_0^{-1})^n. \quad (19)$$

Ясно, что теорема 1 будет доказана, если мы установим следующее утверждение.

Лемма 1 *Найдётся такое $\varepsilon_0 > 0$, что норма оператора BA_0^{-1} равномерно ограничена при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $\mu \in W$.*

Доказательство. В дальнейшем используются только некоторые свойства операторов B^0_{10}, $B_{i,j}$, а не их конкретный вид. Так B_{00}, B^0_{10}, B_{10} – это дифференциальные операторы второго порядка, т. е. суммы $1, \partial_s, \partial_s^2$, умноженных на некоторые коэффициенты. Коэффициенты B_{00} являются обычными функциями от (s, μ, ε), коэффициенты B^0_{10} и B_{10} – функциями со значениями в $\mathcal{H}^2_D(M) \cap [\chi_0]^\perp$. А B_{01} и B_{11} – это ε-дифференциальные операторы, т. е. суммы $1, \varepsilon\partial_s, \varepsilon^2\partial_s^2$, умноженных на коэффициенты, но эти коэффициенты представляют собой функции со значениями в пространстве линейных непрерывных функционалов на $\mathcal{H}^2_D(M) \cap [\chi_0]^\perp$ или в пространстве линейных непрерывных операторов в $\mathcal{H}^2_D(M) \cap [\chi_0]^\perp$ соответственно. При некотором $\varepsilon_0 > 0$ все эти коэффициенты бесконечно дифференцируемым образом зависят от (s, μ, ε) при всех $s \in \mathbb{R}$, $\mu \in \mathbb{R}$, $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$ и обращаются в нуль при $|s| \ge l$.

Ввиду указанной структуры операторов B_{ij} естественно воспользоваться нормами с параметром, аналогичным использовавшимся в [29]. Введём в $\mathcal{H}^2_D(\Omega)$ норму, зависящую от параметра ε:

$$\|u\|_{2,\varepsilon} = \|\varepsilon^2 \partial_s^2 u\| + \sum_{j=1}^{2} (\|\varepsilon \partial_s \partial_{q_j} u\| + \|\partial_{q_j} u\|) + \sum_{1 \le i,j \le 2} \|\partial_{q_i} \partial_{q_j} u\| + \|\varepsilon \partial_s u\| + \|u\|,$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(\Omega)$. Если сделать замену $s = \varepsilon s'$, то

$$\|u(s,q)\|_{2,\varepsilon} = \varepsilon^{1/2} \|u(\varepsilon s', q)\|_{2,1},$$

а $\|\cdot\|_{2,1}$ – это обычная норма в $\mathcal{H}^2(\Omega)$. Так как (13) является эквивалентной нормой в $\mathcal{H}^2_D(\Omega)$, то для всех $u_1 \in \mathcal{H}^2_D(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^{\perp}$ эквивалентной нормой будет

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\ddot{C}_n(s) - (\nu_n - \nu_0) C_n(s)|^2 \, ds \right)^{1/2},$$

что нетрудно получить с помощью перехода к преобразованию Фурье и равенства Парсеваля. С помощью указанной замены легко получается, что с некоторой константой c (другой, чем в (18)) выполняется оценка

$$c^{-1} \|u_1(s,q)\|_{2,\varepsilon} \le \|(\varepsilon^2 \partial_s^2 u_1 + \partial_{q_1}^2 + \partial_{q_2}^2 + \nu_0) u_1\| =$$
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |\varepsilon^2 \ddot{C}_n(s) - (\nu_n - \nu_0) C_n|^2 \, ds \right)^{1/2} \le c \|u_1(s,q)\|_{2,\varepsilon} \quad (20)$$

для всех $u_1 \in \mathcal{H}^2_D(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^{\perp}$. С помощью разложения (12) и преобразования Фурье получается также неравенство

$$\|(\varepsilon^2 \partial_s^2 + \partial_{q_1}^2 + \partial_{q_2}^2 + \nu_0) u_1\| \le \|(\varepsilon^2 \partial_s^2 + \partial_{q_1}^2 + \partial_{q_2}^2 + \nu_0 + \mu \varepsilon^2) u_1)\| \quad (21)$$

для всех $\mu \le 0$. Из (17) и оценок (18), (20), (21) ясно, что для решений системы $A_0(v_0, u_1) = (f_0, f_1)$ с некоторой константой c_1 выполняется оценка

$$\|v_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon} \le c_1 (\|f_0\| + \|f_1\|) \quad (22)$$

для всех $v_0 \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R}),\ u_1 \in \mathcal{H}^2_D(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^{\perp},\ \mu \in W,\ \varepsilon > 0$.

В силу отмеченных выше свойств операторов $B_{ij},\ i,j = 1,2$, при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ с некоторым $\varepsilon_0 > 0$ выполняется оценка

$$\|B(v_0, u_1)\| \le c_2 (\|v_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon}). \quad (23)$$

Так как $(v_0, u_1) = A_0^{-1}(f_0, f_1)$, то из (22) и (23) теперь получаем, что

$$\|B A_0^{-1}(f_0, f_1)\| \le c_3 (\|f_0\| + \|f_1\|),$$

где $c_3 = c_1 c_2$. Тем самым утверждение леммы доказано.

6. Сведение задачи о нахождении собственных значений оператора H_ε к неявному уравнению

Пусть μ_k и W_k выбраны так, как указано в формулировке теоремы 2. Рассмотрим задачу: по заданным (f_0, f_1, d) найти решение (v_0, u_1, g) системы

$$
\begin{gathered}
-\partial_s^2 v_0 + a v_0 - \mu v_0 + g\Phi_k + \varepsilon B_{00}(s,\partial_s,\varepsilon)v_0 + \varepsilon B_{01}(s,\varepsilon\partial_s,\varepsilon)u_1 = f_0(s),\\
-\varepsilon^2\partial_s^2 u_1 - (\partial_{q_1}^2 + \partial_{q_2}^2 + \nu_0 + \mu\varepsilon^2)u_1 + B_{10}^0(s,\partial_s)v_0 +\\
\varepsilon B_{10}(s,\partial_s,\varepsilon)v_0 + \varepsilon B_{11}(s,\varepsilon\partial_s,\varepsilon)u_1 = f_1(s,q),\\
(v_0,\Phi_k) = d,
\end{gathered}
\tag{24}
$$

где $B_{i,j},\ i,j=1,2$ определяются формулами (16), $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R})$, а d и g – числа. Подобные задачи рассматривались в [22] в связи с исследованием гипоэллиптичности некоторых операторов и в [21]. Через A теперь обозначим соответствующий оператор

$$A : \mathcal{H}^2(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_D^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp \times \mathbb{C} \to L_2(\mathbb{R}) \times \mathcal{L}_0^\perp \times \mathbb{C}.$$

Предложение 1 *Для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ оператор A при всех $\mu \in W_k,\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ является изоморфизмом и с некоторой константой c выполняется оценка*

$$\|v_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon} + |g| \le c(\|f_0\| + \|f_1\| + |d|). \tag{25}$$

Доказательство. Запишем A в виде $A = A_0 + \varepsilon B$, где A_0 – оператор, отвечающий системе (24) без слагаемых с $B_{i,j}$. Обратный оператор к A_0 задаётся явными формулами. Если $T_0 - \mu$ рассматривать как оператор из $\mathcal{H}^2(\mathbb{R}) \cap [\chi_0]^\perp$, в $[\chi_0]^\perp$, то для $\mu \in W_k$ он имеет обратный оператор, который будем называть редуцированной резольвентой и обозначать как $\widehat{R}_k(\mu)$. Формулы для обращения оператора A_0 имеют вид

$$v_0 = \widehat{R}_k(\mu)(f_0 - (f_0,\Phi_k)\Phi_k) + d\Phi_k,\ \ g = (\mu - \mu_k)d + (f_0,\Phi_k), \tag{26}$$

а u_1 определяется формулой из (17). Как и в п. 5, отсюда получаем, что A_0 при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon$ является изоморфизмом и для решений системы $A_0(v_0,u_1,g) = (f_0,f_1,d)$ с некоторой константой $_1$ выполняется оценка

$$\|v_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon} + |g| \le c_1(\|f_0\| + \|f_1\| + |d|), \tag{27}$$

аналогичная оценке (22). Вместо (23) теперь получаем

$$\|B_{00}v_0 + B_{01}u_1\| + \|B_{10}v_0 + B_{11}u_1\| \le c_2(\|v_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon}) \tag{28}$$

при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ с некоторым ε_0. Отсюда получаем, что для решений системы (24) при $\mu \in W_k$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ с некоторым $\varepsilon_0 > 0$ выполняется оценка (25).

Будем обозначать g из системы (24) как $g(\mu,\varepsilon,f_0,f_1,d)$.

Предложение 2 *Число λ, принадлежащее $W_k + \nu_0/\varepsilon^2$, при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, где W_k и ε_0 указаны в предложении 1, тогда и только тогда является собственным значением оператора H_ε, когда*

$$G(\mu,\varepsilon) = 0, \tag{29}$$

где μ связано с λ формулой (14), $G(\mu,\varepsilon) = g(\mu,\varepsilon,0,0,1)$.

Доказательство. Ясно, что λ является собственным значением оператора H_ε тогда и только тогда, когда система (24) при $f_0 = 0,\ f_1 = 0$ имеет такое решение, что

$$\|u_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon} \ne 0 \qquad \text{и} \qquad g(\mu,\varepsilon,0,0,d) = 0.$$

При этом число d должно быть отличным от нуля, поскольку из $f_0 = 0,\ f_1 = 0,\ d = 0$ в силу изоморфности оператора A должно следовать, что $u_0 = 0,\ u_1 = 0$. В силу линейности задачи $g(\mu,\varepsilon,0,0,d) = g(\mu,\varepsilon,0,0,1)d$ и мы получаем, что собственные значения оператора H_ε определяются уравнением (29). Тем самым предложение 2 доказано.

Нам понадобится также утверждение о гладкости решений системы (24). Введём пространство $\mathcal{H}_D^{(2,m)}(\Omega)$, состоящее из функций, для которых $\partial_s^j u \in \mathcal{H}_D^2(\Omega)$, $j = 0 \dots m$, и при $\varepsilon > 0$ определим норму, зависящую от ε, в этом пространстве:

$$\|u\|_{(2,m),\varepsilon} = \sum_{j=0}^{m} \|\partial_s^j u\|_{2,\varepsilon}.$$

При $\varepsilon = 1$ получаем обычную норму. Аналогичным образом определим пространство $\mathcal{H}^{(0,m)}(\Omega)$, состоящее из функций с конечной нормой

$$\|f\|_{(0,m)} = \sum_{j=0}^{m} \|\partial_s^j f\|,$$

так что $\mathcal{H}^{(0,0)}(\Omega) = L_2(\Omega)$. Оператор A можно рассматривать как отображение

$$A : \mathcal{H}^{2+m}(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_D^{(2,m)}(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp \times \mathbb{C} \to \mathcal{H}^m(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}^{(0,m)}(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp \times \mathbb{C}. \qquad (30)$$

Предложение 3 *Для любого целого $m \geq 0$ найдутся такие $\varepsilon_m > 0$ и c_m, что при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_m$ оператор A в* (30) *является изоморфизмом, а если имеется решение системы* (24) $v_0 \in \mathcal{H}^2(\mathbb{R})$, $u_1 \in \mathcal{H}_D^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp$, $f_0 \in \mathcal{H}^m(\mathbb{R})$, $f_1 \in \mathcal{H}^{(0,m)}(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp$, *то*

$$v_0 \in \mathcal{H}^{2+m}(\mathbb{R}),\ u_1 \in \mathcal{H}_D^{(2,m)}(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^\perp \qquad (31)$$

и выполняется оценка

$$\|v_0\|_{m+2} + \|u_1\|_{(2,m),\varepsilon} + |g| \leq c_m(\|f_0\|_m + \|f_1\|_{(0,m)} + |d|). \qquad (32)$$

Доказательство. Как при доказательстве предложения 1, из явных формул обращения оператора A_0 для решений системы $A_0(v_0, u_1, g) = (f_0, f_1, d)$ получается оценка

$$\|v_0\|_{m+2} + \|u_1\|_{(2,m),\varepsilon} + |g| \leq c_1(\|f_0\|_m + \|f_1\|_{(0,m)} + |d|), \qquad (33)$$

аналогичная (27), а вместо (28) получаем

$$\|B_{00}v_0 + B_{01}u_1\|_m + \|B_{10}v_0 + B_{11}u_1\|_{(0,m)} \leq c_2(\|v_0\|_{m+2} + \|u_1\|_{(2,m),\varepsilon}) \qquad (34)$$

с другими константами c_1 и c_2, зависящими от m. Отсюда получаем, что ряд Неймана (19) для наших операторов A_0 и B при $\mu \in W_k$ и $0 < \varepsilon < \varepsilon_m$ с некоторым $\varepsilon_m > 0$ будет сходиться, если BA_0^{-1} рассматривать как оператор в $\mathcal{H}^m(\mathbb{R}) \times \mathcal{H}_D^{(0,m)} \cap \mathcal{L}_0^\perp$. В результате мы получаем включения (31), а оценка (32) непосредственно вытекает из неравенств (33) и (34); тем самым предложение 3 доказано.

7. Доказательство теоремы 2

Докажем, что функция $g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)$ для $\mu \in W_k$ имеет предел при $\varepsilon \to +0$ и, если доопределить её при $\varepsilon = 0$ этим пределом, то эта функция принадлежит $C^\infty(W_k \times [0, \varepsilon_0))$. А для этого достаточно показать, что она имеет ограниченные частные производные в $W_k \times (0, \varepsilon_0')$, где ε_0' – любое $0 < \varepsilon_0' < \varepsilon_0$.

При $\mu \in W_k,\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ для некоторого ε_0 оператор A аналитически зависит от параметров μ и ε и, в силу предложения 1, обратим, следовательно, $v_0,\ u_1$ (как функции со значениями в пространствах $\mathcal{H}^2(\mathbb{R})$ и $\mathcal{H}^2_D(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^{\perp}$)) и g также аналитически зависят от этих параметров. Аналогичным образом, в силу предложения 3 они, как элементы пространств из левой части (30), аналитически зависят от μ и ε (при $\mu \in W_k,\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_m$). Обозначим $v_0^{(n_1,n_2)} = \partial_\mu^{n_1}\partial_\varepsilon^{n_2} v_0,\ u_1^{(n_1,n_2)} = \partial_\mu^{n_1}\partial_\varepsilon^{n_2} u_1$, $g^{(n_1,n_2)} = \partial_\mu^{n_1}\partial_\varepsilon^{n_2} g$.

Предложение 4 *Для любых целых $n \geq 0,\ m \geq 0$ найдутся такие $\varepsilon_{n,m} \geq 0$ и константы $c_{n,m}$, что при $\mu \in W_k,\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_{n,m}$ и конечных $\|f\|_{m+n}$ и $\|f_1\|_{(0,m+n)}$ для решений системы* (24) *выполняются оценки*

$$\|v_0^{(0,n)}\|_{2+m} + \|u_1^{(0,n)}\|_{(2,m),\varepsilon} + |g^{(0,n)}| \leq c_{m,n}(\|f_0\|_{m+n} + \|f_1\|_{(0,m+n)} + |d|). \qquad (35)$$

Доказательство. Будем доказывать (35) по индукции. В силу предложения 3 неравенство (35) выполнено при $n = 0$. Предположим, что (35) выполнено при всех m для $n \leq j-1$ и докажем, что (35) будет выполнено при всех m для $n = j$. Дифференцируя (24) по ε, получим

$$\begin{gathered}(-\partial_s^2 + a - \mu)v_0^{(0,j)} + g^{(0,j)}\Phi_k + \varepsilon B_{00}(s,\partial_s,\varepsilon)v_0^{(0,j)} + \varepsilon B_{01}(s,\varepsilon\partial_s,\varepsilon)u_1^{(0,j)} = F_0(s),\\ (-\varepsilon^2\partial_s^2 - \partial_{q_1}^2 - \partial_{q_2}^2 - \nu_0 - \mu\varepsilon^2)u_1^{(0,j)} + B_{10}^0(s,\partial_s)v_0^{(0,j)} +\\ \varepsilon B_{10}(s,\partial_s,\varepsilon)v_0^{(0,j)} + \varepsilon B_{11}(s,\varepsilon\partial_s,\varepsilon)u_1^{(0,j)} = F_1(s,q)\\ (v_0^{(0,j)},\Phi_k) = 0. \qquad (36)\end{gathered}$$

Здесь F_0 состоит из суммы слагаемых $-C_j^i(\partial_\varepsilon^{j-i}(\varepsilon B_{00}))v_0^{(0,i)}$ и $-C_j^i(\partial_\varepsilon^{j-i}(\varepsilon B_{01}))u_1^{(0,i)}$, где $i \leq j-1$. Используя структуру операторов $B_{ij},\ i,j = 1,2$ и предположение индукции, получаем

$$\|F_0\|_m \leq c\sum_{i=0}^{j-1}(\|v_0^{(0,i)}\|_{2+m} + \|u_1^{(0,i)}\|_{(2,m+j-i),\varepsilon}) \leq c(\|f_0\|_{m+j} + \|f_1\|_{(0,m+j)} + |d|).$$

А F_1 состоит из слагаемых, которые оцениваются аналогичным образом, и ещё двух слагаемых $2C_j^1\varepsilon\partial_s^2 u_1^{(0,j-1)}$ и $2C_j^2\partial_s^2 u_1^{(0,j-2)}$, которые оцениваются так:

$$\begin{gathered}\|\varepsilon\partial_s^2 u_1^{(0,j-1)}\|_{(0,m)} + \|\partial_s^2 u_1^{(0,j-2)}\|_{(0,m)} \leq \|\varepsilon\partial u_1^{(0,j-1)}\|_{(0,m+1)} + \|u_1^{(0,j-2)}\|_{(0,2+m)} \leq\\ \|u_1^{(0,j-1)}\|_{(2,m+1),\varepsilon} + \|u_1^{(0,j-2)}\|_{(2,m+2),\varepsilon} \leq c(\|f_0\|_{m+j} + \|f_1\|_{(0,m+j)} + |d|).\end{gathered}$$

В результате получаем

$$\|F_0\|_m + \|F_1\|_{(0,m)} \leq c(\|f_0\|_{m+j} + \|f_1\|_{(0,m+j)} + |d|).$$

Теперь (35) следует из предложения 3, примененного к системе (36), и предложение 4 доказано.

С помощью индукции по n_1 аналогичным образом устанавливается оценка производных, содержащих дифференцирования по μ, при этом оценка (35) является началом индукции.

Предложение 5 *Для любых целых $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq 0$, $m \geq 0$ найдутся такие константы $c_{n_1,n_2,m}$, что при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_{n_2,m}$ и конечных $\|f\|_{m+n_2}$ и $\|f_1\|_{(0,m+n_2)}$ для решений системы (24) выполняются оценки*

$$\|v_0^{(n_1,n_2)}\|_{2+m} + \|u_1^{(n_1,n_2)}\|_{(2,m),\varepsilon} + |g^{(n_1,n_2)}| \leq c_{n_1,n_1,m}(\|f_0\|_{m+n_2} + \|f_1\|_{(0,m+n_2)} + |d|). \quad (37)$$

Теперь мы можем доказать бесконечную дифференцируемость функции $g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)$ на $W_k \times [0, \varepsilon_0)$. Как уже отмечалось выше, для этого достаточно установить ограниченность производных от $g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)$ на $[0, \varepsilon_0')$, где $0 < \varepsilon_0' < \varepsilon_0$. Но это следует из установленной ранее аналитичности функции $g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)$ при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и оценок (37).

Аналогичным образом устанавливается, что v_0 и u_1 (как функции со значениями в $\mathcal{H}^{2+m}(\mathbb{R})$ и $\mathcal{H}_D^{(2,m)}(\Omega)$) для $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $d = 1$ имеют пределы при $\varepsilon \to +0$. Доопределив их этими пределами при $\varepsilon = 0$, получим функции из $C^\infty(W_k \times [0, \varepsilon_m))$. Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, в первом и третьем уравнениях системы (24), получим

$$(T_0 - \mu)v_0 + G(\mu, 0)\Phi_k = 0, \qquad (v_0, \Phi_k) = 1,$$

следовательно, $v_0 = \Phi_k$ и $G(\mu, 0) = \mu - \mu_k$. Поэтому $\partial_\mu G(\mu, 0) = 1 \neq 0$ и утверждение теоремы 2 теперь вытекает из предложения 2 и теоремы о неявной функции.

В заключение этого пункта вычислим коэффициент $d_{k,1}$ из асимптотического разложения (3). Опять взяв $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $d = 1$, и переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$ в первом уравнении системы (36) при $j = 1$, получим

$$(T_0 - \mu_k)v_0^{(0,1)} + G^{(0,1)}(\mu_k, 0)\Phi_k + b_{00}(s, \partial_s, 0)v_0 = 0,$$

где b определяется из (9). Как только что было показано, $v_0 = \Phi_k$, поэтому, умножая скалярно на Φ_k это уравнение, получим, что

$$G^{(0,1)}(\mu_k, 0) = -(b_{00}(s, \partial_s, 0)\Phi_k, \Phi_k),$$

следовательно,

$$d_{k,1} = -\frac{G^{(0,1)}(\mu_k, 0)}{G^{(1,0)}(\mu_k, 0)} = (b_{00}(s, \partial_s, 0)\Phi_k, \Phi_k).$$

8. Формулировка основного результата в случае конечной замкнутой трубки

Пусть в $\mathbb{R}^3$ имеется гладкая несамопересекающаяся замкнутая кривая Γ, заданная уравнением $x = X(s)$, $x = (x_1, x_2, x_3)$, где s – длина дуги (со знаком) кривой Γ, отсчитанная от фиксированной точки $x_0 \in \Gamma$, $X(s)$ – периодическая функция с периодом l (т.е. длина кривой равна l). В дальнейшем будет удобно считать, что $s \in S_l^1$, где S_l^1 – окружность длины l. Через $\mathbf{e}_1(s)$ будем обозначать единичный касательный вектор $\mathbf{e}_1 = \dot{X}(s)$ (точка здесь и далее означает производную по s). Как и в [4], будем предполагать, что в точках кривой Γ заданы векторы $\mathbf{e}_2(s), \mathbf{e}_3(s)$ класса C^∞, причем $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ образуют правый ортонормированный репер.

Пусть на плоскости $\mathbb{R}^2$ с координатами (q_2, q_3) имеется связная ограниченная область M с бесконечно гладкой границей ∂M. Введем в окрестности кривой Γ систему координат (s, q_2, q_3), так что

$$x = X(s) + \varepsilon\, q_2\mathbf{e}_2 + \varepsilon\, q_3\mathbf{e}_3. \tag{38}$$

Трубкой будем называть область $\widetilde{\Omega}_\varepsilon$ в $\mathbb{R}^3$, которая получается как образ тора $\Omega = S_l^1 \times M$ при отображении (38). Здесь малый параметр ε введён для того, чтобы иметь возможность рассматривать "тонкие"трубки.

Будем предполагать, что отображение (38) в $\overline{\Omega}$ есть диффеоморфизм, что заведомо выполняется при достаточно малых ε. Таким образом, (s, q_2, q_3) представляют собой криволинейные координаты в $\widetilde{\Omega}_\varepsilon$.

Сформулируем основной результат статьи. В трубке $\widetilde{\Omega}_\varepsilon$ рассмотрим оператор Шредингера

$$H = (-i\partial_x - \mathbf{A})^2 + V + V_{int} = (-i\partial_{x_1} - A_1)^2 + (-i\partial_{x_2} - A_2)^2 + (-i\partial_{x_3} - A_3)^2 + V + V_{int}. \tag{39}$$

Потенциал $V(x,\varepsilon)$ и компоненты $A_j(x,\varepsilon)$ вектор-потенциала $\mathbf{A}(x,\varepsilon)$ будем считать гладкими (класса C^∞) вещественными функциями, когда x находится в окрестности кривой Γ и $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$ с некоторым $\varepsilon_0 > 0$, вещественный потенциал V_{int} имеет вид $w(q_2, q_3)/\varepsilon^2,\ w \in C^\infty(\overline{M})$, а H будем рассматривать как самосопряженный оператор с существенной областью определения, состоящей из гладких (класса C^∞) функций ψ в $\overline{\widetilde{\Omega}}_\varepsilon$, удовлетворяющих нулевому условию Дирихле. Из общей теории эллиптических краевых задач следует, что областью определения оператора H является пространство $\mathcal{H}^2_D(\widetilde{\Omega}_\varepsilon)$, состоящее из функций соболевского пространства $\mathcal{H}^2(\widetilde{\Omega}_\varepsilon)$, удовлетворяющих нулевому условию Дирихле, т. е. обращающихся в нуль на границе области $\widetilde{\Omega}_\varepsilon$ (соответствующее рассуждение приведено в [16], см. также [30] глава 2 п. 8.4). Напомним, что $u \in \mathcal{H}^2(\widetilde{\Omega}_\varepsilon)$, если функция u и её обобщенные производные до второго порядка включительно принадлежат $L_2(\widetilde{\Omega}_\varepsilon)$ (см., например, [26]).

Основная цель этой статьи состоит в том, чтобы получить асимптотическую формулу для поведения собственных значений оператора H при $\varepsilon \to +0$. Особую роль в этой формуле играет некоторый одномерный оператор Шредингера T_0, который, следуя терминологии из [7], будем называть *редуцированным оператором* (в [25] аналогичный оператор называется эффективным гамильтонианом). Чтобы определить этот оператор, обозначим через

$$\nu_0 < \nu_1 \le \nu_2 \le \dots \le \nu_n \le \dots$$

собственные значения оператора $-\Delta_D^M + w$, ($-\Delta_D^M$ – оператор Лапласа в области M), а через $\{\chi_n\}_0^\infty$ – соответствующую полную ортонормированную систему собственных функций оператора $-\Delta_D^M + w$. Функции χ_n можно выбрать вещественными. Хорошо известно, что основное собственное значение ν_0 невырождено и χ_0 можно выбрать положительной в M (см., например, [27]). Введём оператор проекции момента на первую ось $L = -i(q_2\partial_{q_3} - q_3\partial_{q_2})$ и обозначим через $(L^2)_{00}$ среднее значение L^2 в состоянии χ_0, т. е. $(L^2)_{00} = (L^2\chi_0, \chi_0)_M$, где $(\,\cdot\,,\cdot\,)_M$ –скалярное произведение в $L_2(M)$. Аналогичное обозначение будет использоваться и для других операторов.

Положим $\mathcal{A}_1^0(s) = \mathbf{A}(X(s),0)\cdot\mathbf{e}_1(s),\ \mathcal{V}^0(s) = V(X(s),0),\ \zeta = \dot{\mathbf{e}}_2\cdot\mathbf{e}_3,\ \gamma(s)$ – кривизна кривой Γ и рассмотрим одномерный оператор Шредингера

$$T_0 = (-i\partial_s - \mathcal{A}_1^0(s))^2 - \frac{\gamma^2(s)}{4} + \zeta^2(s)(L^2)_{00} + \mathcal{V}^0(s) \tag{40}$$

с областью определения $\mathcal{H}^2_{per}(\mathbb{R})$ (пространство l-периодических функций, локально принадлежащих $\mathcal{H}^2(\mathbb{R})$). Пространство $\mathcal{H}^2_{per}(\mathbb{R})$ будем обозначать также как $\mathcal{H}^2(S^1_l)$.

Пусть μ_k, $k = 1, \dots,$ – собственные значения оператора T_0, а $\Phi_k(s)$ – соответствующие нормированные собственные функции. Спектр оператора T_0 дискретный с собственными значениями не более, чем второй кратности, он обозначается как $\sigma(T_0)$.

Теорема 3 *Если $W \subset \mathbb{C}$ – ограниченная область на комплексной плоскости и $\overline{W}$ не содержит точек из $\sigma(T_0)$, то существует такое $\varepsilon_0 > 0$, что для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ в $W + \nu_0/\varepsilon^2$ нет собственных значений оператора H.*

Теорема 4 *Пусть μ_k – некоторое простое собственное значение редуцированного оператора T_0 и W_k – такая ограниченная область, содержащая μ_k, что $\overline{W}_k$ не содержит других точек из $\sigma(T_0)$. Тогда при некотором $\varepsilon_0 > 0$ для всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ существует единственное собственное значение $\lambda_k(\varepsilon)$ оператора H, принадлежащее $W_k + \nu_0/\varepsilon^2$. Это собственное значение невырождено и $\mu_k(\varepsilon) = \lambda_k(\varepsilon) - \nu_0/\varepsilon^2$ имеет предел μ_k при $\varepsilon \to +0$. Если положить $\mu_k(0) = \mu_k$, то $\mu_k(\varepsilon) \in C^\infty[0, \varepsilon_0)$.*

Доказательство теорем 3 и 4 будет дано в п. 8 – 12.

Следствие *Для собственного значения $\lambda_k(\varepsilon)$ из теоремы 4 при $\varepsilon \to +0$ имеет место асимптотическое разложение*

$$\lambda_k(\varepsilon) \sim \frac{\nu_0}{\varepsilon^2} + \mu_k + \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} d_{k,n}\varepsilon^n. \tag{41}$$

Действительно, (41) следует из формулы Тейлора, поскольку в силу теоремы 4 функция $\mu_k(\varepsilon)$ бесконечно дифференцируема при $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$. Коэффициент $d_{k,1}$ будет вычислен в конце п. 13.

Замечание 1 *В доказательстве теорем 3 и 4 используется не конкретный вид операторов b и b' из (46), а только их свойства: это симметрические операторы второго порядка, причем b не содержит производной ∂_s^2 и $b_{00} = 0$. Явный вид этих операторов нужен лишь при вычислении конкретных значений коэффициентов в разложении (41).*

Замечание 2 *Случай кратного собственного значения оператора T_0 обсуждается в п.14.*

В заключение этого пункта приведем пример, в котором все собственные значения оператора T_0 простые.

Пример 1. Рассмотрим оператор $H = -\Delta + x_1$, а в качестве кривой Γ – окружность радиуса R на координатной плоскости (x_1, x_2) с центром в начале координат. В таком случае $X(s) = (R\cos(s/R), R\sin(s/R), 0))$, трубка $\widetilde{\Omega}_\varepsilon$ представляет собой внутренность тора, а редуцированный оператор (40) имеет вид $T_0 = -\partial_s^2 - 1/(4R^2) + R\cos(s/R)$.

Собственные функции этого оператора являются периодическими решениями уравнения Матье с периодом $2\pi R$, а решения уравнения Матье с заданным периодом могут образовывать не более, чем одномерное пространство (см. [27] глава 13 пример 1 к теореме 13.90), следовательно, все собственные значения оператора T_0 простые.

9. Оператор H в координатах, связанных с трубкой

В этом пункте мы получим выражение для оператора H в координатах (38). Сначала перейдем от x к координатам $y = (y_1, y_2, y_3)$, так что $x = X(y_1) + y_2\mathbf{e}_2 + y_3\mathbf{e}_3$, причем $y_1 = s$. Положим

$$h = 1 + y_2(\dot{\mathbf{e}}_2, \mathbf{e}_1) + y_3(\dot{\mathbf{e}}_3, \mathbf{e}_1), \qquad L = -i(y_2\partial_{y_3} - y_3\partial_{y_2}), \qquad \zeta = \dot{\mathbf{e}}_2 \cdot \mathbf{e}_3. \tag{42}$$

В координатах (y_1, y_2, y_3) оператор H приобретает вид

$$\begin{aligned} H = h^{-1}((-i\partial_{y_1} - \zeta L - \mathcal{A}_1 + \zeta\mathcal{M}_1)h^{-1}(-i\partial_{y_1} - \zeta L - \mathcal{A}_1 + \zeta\mathcal{M}_1)+ \\ (-i\partial_{y_2} - \mathcal{A}_2)h(-i\partial_{y_2} - \mathcal{A}_2) + (-i\partial_{y_3} - \mathcal{A}_3)h(-i\partial_{y_3} - \mathcal{A}_3)) + \mathcal{V} + \frac{1}{\varepsilon^2}w(\frac{y_2}{\varepsilon}, \frac{y_3}{\varepsilon}), \end{aligned} \tag{43}$$

где $\mathcal{M}_1 = y_2\mathcal{A}_3 - y_3\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A} = J^*(y)A(x(y), \varepsilon)$, J^* – транспонированная матрица Якоби, $dx = Jdy, \mathcal{V} = V(x(y), \varepsilon)$. Эта формула аналогична известному выражению оператора Лапласа в криволинейной системе координат через метрический тензор (ср. [4]–[7], [25]). Подсчёт метрики в координатах (y_1, y_2, y_3) приводит к простому выражению для компонент соответствующих метрических тензоров

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} g_{11} & -\zeta y_3 & +\zeta y_2 \\ -\zeta y_3 & 1 & 0 \\ +\zeta y_2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (g^{ij}) = \frac{1}{g}\begin{pmatrix} 1 & -g_{12} & -g_{13} \\ -g_{12} & g + g_{12}^2 & g_{12}\, g_{13} \\ -g_{13} & g_{12}\, g_{13} & g + g_{13}^2 \end{pmatrix},$$

где $g = h^2$, $g_{11} = g + g_{12}^2 + g_{13}^2$. причем $g = \det(g_{ij})$ и h является якобианом при переходе к координатам (y_1, y_2, y_3). С учетом равенства $\partial_y \cdot (hJ^{-1}) = 0$, которое проверяется непосредственным дифференцированием, получаем

$$\begin{aligned} (-i\partial_x - A) \cdot (-i\partial_x - A) = J^{*-1}(-i\partial_y - J^*A) \cdot J^{*-1}(-i\partial_y - J^*A) = \\ \frac{1}{h}(-i\partial_y - J^*A) \cdot hJ^{-1}J^{*-1}(-i\partial_y - J^*A) = \frac{1}{h}\sum_{i,j=1}^{3}(-i\partial_{y_i} - \mathcal{A}_i)h\, g^{ij}(-i\partial_{y_j} - \mathcal{A}_j), \end{aligned}$$

откуда после несложных преобразований и получается формула (43).

Если $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ – репер Френэ, то $\zeta = \kappa$, где κ – кручение кривой Γ, а в общем случае $\zeta = \kappa + \dot{\phi}$, где ϕ — угол поворота базиса $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ относительно репера Френэ. Величину $\zeta(s)$ будем называть *внутренним кручением трубки.* Формула (43) при $A \equiv 0$ использовалась в [17],[19].

Теперь перейдём от H к оператору $\widetilde{H} = h^{1/2}Hh^{-1/2}$, который запишем в координатах (y_1, y_2, y_3). Представив $\widetilde{H}$ в виде

$$\begin{aligned} \widetilde{H} = \Big(- i\partial_{y_1} - \zeta L - \mathcal{A}_1 + \zeta\mathcal{M}_1 + \frac{((-i\partial_{y_1} - \zeta L)h)}{2h}\Big)h^{-2}\Big(- i\partial_{y_1} - \zeta L - \mathcal{A}_1 + \zeta\mathcal{M}_1 - \\ \frac{((-i\partial_{y_1} - \zeta L)h)}{2h}\Big) + \Big(- i\partial_{y_2} - \mathcal{A}_2 - \frac{(i\partial_{y_2}h)}{2h}\Big)\Big(- i\partial_{y_2} - \mathcal{A}_2 + \frac{(i\partial_{y_2}h)}{2h}\Big) + \\ \Big(- i\partial_{y_3} - \mathcal{A}_3 - \frac{(i\partial_{y_3}h)}{2h}\Big)\Big(- i\partial_{y_3} - \mathcal{A}_3 + \frac{(i\partial_{y_3}h)}{2h}\Big) + \mathcal{V} + \frac{1}{\varepsilon^2}w(\frac{y_2}{\varepsilon}, \frac{y_3}{\varepsilon}). \end{aligned}$$

Используя соотношение $(\dot{\mathbf{e}}_2, \mathbf{e}_1)^2 + (\dot{\mathbf{e}}_3, \mathbf{e}_1)^2 = (\dot{\mathbf{e}}_1, \dot{\mathbf{e}}_1)^2 = \gamma^2$, где $\gamma(s)$ – кривизна кривой Γ, после несложных вычислений получаем формулу

$$\widetilde{H}=(-i\partial_{y_1}-\zeta L-\mathcal{A}_1+\zeta\mathcal{M}_1)\frac{1}{h^2}(-i\partial_{y_1}-\zeta L-\mathcal{A}_1+\zeta\mathcal{M}_1)+(-i\partial_{y_2}-\mathcal{A}_2)^2+$$
$$(-i\partial_{y_3}-\mathcal{A}_3)^2-\frac{\gamma^2}{4h^2}-\frac{((i\partial_{y_1}+\zeta L)^2h)}{2h^3}+\frac{5}{4}\frac{((i\partial_{y_1}+\zeta L)h)^2}{h^4}+\mathcal{V}+\frac{1}{\varepsilon^2}w(\frac{y_2}{\varepsilon},\frac{y_3}{\varepsilon}). \quad (44)$$

Отметим, что формула (44) при $\zeta(s)\equiv 0$ и $A\equiv 0$ имеется в [9], а при $A\equiv 0$ – в [19]. Перейдем от (y_1,y_2,y_3) к координатам $(q_1,q_2,q_3)=(y_1,\varepsilon^{-1}y_2,\varepsilon^{-1}y_3)$. Представим $\mathcal{A}_j(y_1,y_2,y_3,\varepsilon)$ и $\mathcal{V}(y_1,y_2,y_3,\varepsilon)$ в виде

$$\mathcal{V}=\mathcal{V}^0(q_1)+\varepsilon V^1(q_1,q_2,q_3,\varepsilon),$$
$$\mathcal{A}_j=\mathcal{A}_j^0(q_1)+\varepsilon\mathcal{A}_j^1(q_1)+\varepsilon\mathcal{A}_j^2(q_1)q_2+\varepsilon\mathcal{A}_j^3(q_1)q_3+\varepsilon^2\mathcal{A}_j^4(q_1,q_2,q_3,\varepsilon),\ j=1,2,3.$$

Здесь $\mathcal{V}^0(q_1)=V(X(q_1),0)$, $\mathcal{A}_j^0(q_1)=A(X(q_1),0)\cdot\mathbf{e}_j$. Действительно, обозначив через $\mathbf{e}'_j$ координатные орты в системе координат (y_1,y_2,y_3), получаем

$$\mathcal{A}_j^0(y_1)=\mathcal{A}(y_1,0,0,0)\cdot\mathbf{e}'_j=J^*A(X(y_1,0))\cdot\mathbf{e}'_j=A(X(y_1,0))\cdot\mathbf{e}_j.$$

Ясно, что для достаточно малых ε оператор $\widetilde{H}$ можно записать в виде

$$\widetilde{H}_\varepsilon=(-i\partial_{q_1}-\mathcal{A}_1^0(q_1)-\zeta L)^2+\mathcal{V}^0(q_1)+\frac{1}{\varepsilon^2}w(q_2,q_3)-\frac{\gamma^2(q_1)}{4}+$$
$$\sum_{j=2}^{3}(-i\varepsilon^{-1}\partial_{q_j}-\mathcal{A}_j^0(q_1)-\varepsilon\mathcal{A}_j^1(q_1)-\varepsilon\mathcal{A}_j^2(q_1)q_2-\varepsilon\mathcal{A}_j^3(q_1)q_3)^2+\varepsilon\,\widetilde{b}(q,-i\partial_q,\varepsilon),$$

где $\widetilde{b}$ – дифференциальный оператор с бесконечно дифференцируемыми по (q,ε) коэффициентами в $\overline{\Omega}\times[0,\varepsilon_0)$ с некоторым $\varepsilon_0>0$. Чтобы еще упростить $\widetilde{H}_\varepsilon$, перейдем к оператору $H'=\tilde{h}^{-1}\widetilde{H}_\varepsilon\tilde{h}$, где

$$\tilde{h}=\exp(i\varepsilon((\mathcal{A}_2^0(q_1)+\varepsilon\mathcal{A}_2^1(q_1))q_2+\varepsilon\mathcal{A}_2^2(q_1)\frac{q_2^2}{2}+(\mathcal{A}_3^0(q_1)+\varepsilon\mathcal{A}_3^1(q_1))q_3+\varepsilon\mathcal{A}_3^3(q_1)\frac{q_3^2}{2})).$$

В результате получим оператор

$$H'_\varepsilon=(-i\partial_{q_1}-\mathcal{A}_1^0(q_1))^2-\varepsilon^{-2}(\partial_{q_2}^2+\partial_{q_3}^2-w(q_2,q_3))-$$
$$2\{-i\partial_{q_1}-\mathcal{A}_1^0(q_1),\zeta\}L+\zeta^2L^2+L_1+\mathcal{V}^0(q_1)-\frac{1}{4}\gamma^2(q_1)+\varepsilon b'(q,-i\partial_q,\varepsilon), \quad (45)$$

где $L_1=2i(\mathcal{A}_2^3(q_1)q_3\partial_{q_2}+\mathcal{A}_3^2(q_1)q_2\partial_{q_3})$, $\{C,D\}=(CD+DC)/2$ – симметризация операторов. Заменив q_1 на s и обозначив $b=L_1-2\{-i\partial_s-\mathcal{A}_1^0(s),\zeta\}L$, запишем оператор H'_ε в виде

$$H'_\varepsilon=T_0-\varepsilon^{-2}(\partial_{q_2}^2+\partial_{q_3}^2-w(q_2,q_3))+b+\varepsilon\,b'(s,q_2,q_3,-i\partial_s,-i\partial_{q_2},-i\partial_{q_3},\varepsilon). \quad (46)$$

Именно эта формула и будет использоваться в дальнейшем. Отметим. что $b_{00}=0$ в силу антисимметричности операторов $q_3\partial_{q_2}$ и $q_2\partial q_3$ относительно скалярного произведения $(\,\cdot\,,\cdot\,)_M$.

Так как H'_ε унитарно эквивалентен исходному оператору H, то собственные значения этих операторов совпадают. Переход от оператора H к H'_ε равносилен переходу от координат x к координатам (s,q_2,q_3) и замене функции ψ в уравнении $H\psi=\lambda\psi$ на $h^{-1/2}\tilde{h}u$.

10. Доказательство теоремы 3

Для построения резольвенты оператора H'_ε запишем уравнение

$$\varepsilon^2(H'_\varepsilon - \lambda)u = f, \tag{47}$$

(H'_ε определяется формулой (45) или формулой (46)) в матричном виде, используя разложение пространства $L_2(M)$ в прямую сумму $L_2(M) = [\chi_0] \oplus [\chi_0]^\perp$, где $[\chi_0]$ – подпространство, натянутое на вектор χ_0, а $[\chi_0]^\perp$ – его ортогональное дополнение. Через P_0 и P_1 будем обозначать проекторы на эти подпространства. Так как функции из $C^\infty(\overline{\Omega})$, обращающиеся в нуль на $\partial\Omega$, плотны в $\mathcal{H}^2_D(\Omega)$, то функции для дальнейших оценок можно брать из $C^\infty(\overline{\Omega})$, после чего полученные оценки распространять на всё пространство $\mathcal{H}^2_D(\Omega)$ с помощью операции замыкания. Разложив функцию $u(s,q') \in C^\infty(\overline{\Omega})$ ($u(s,q') = 0$ на $\partial\Omega$)при каждом s в ряд по ортонормированной системе $\{\chi_n\}$, получим

$$u(s,q') = \sum_{n=0}^{\infty} C_n(s)\chi_n(q'), \qquad C_n(s) = (u(s,q'), \chi_n(q'))_M.$$

Здесь и далее $q' = (q_2, q_3)$. Пусть $\mathcal{L}_0$ – подпространство в $L_2(\Omega)$, состоящее из функций $v(s)\chi_0(q')$, где $v(s) \in L_2(S^1_l)$, а $\mathcal{L}_0^\perp$ – ортогональное дополнение к $\mathcal{L}_0$; соответственно этому функция u раскладывается в сумму $u = u_0 + u_1$. Ясно, что

$$u_0(s,q') = C_0(s)\chi_0(q'), \qquad u_1(s,q') = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} C_n(s)\chi_n(q'), \tag{48}$$

причём

$$u_0(s,q') = P_0u(s,q'),\ u_1(s,q') = P_1u(s,q') = u(s,q') - P_0u(s,q')$$

при каждом s. Аналогичным образом функция f раскладывается в сумму $f = f_0+f_1$.

Как это следует из теории эллиптических краевых задач (см.,например, [26],[30]), оператор $-\Delta^\Omega_D + w(q') - \nu_0 + 1$ осуществляет изоморфизм между $\mathcal{H}^2_D(\Omega)$ и $L_2(\Omega)$, следовательно,

$$\left(\int_\Omega |(\Delta - w(q') + \nu_0 - 1)u|^2\, ds\, dq'\right)^{1/2} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^l |\ddot{C}_n(s) - (\nu_n - \nu_0 + 1)C_n(s)|^2\, ds\right)^{1/2} \tag{49}$$

есть эквивалентная норма в $\mathcal{H}^2_D(\Omega)$.

Положим

$$\mu = \lambda - \frac{\nu_0}{\varepsilon^2} \tag{50}$$

и введём обозначения

$$b_{00}C_0 = (b(C_0\chi_0), \chi_0)_M,\ b_{01}u_1 = (bu_1, \chi_0)_M,\ b_{10}C_0 = P_1b(C_0\chi_0),\ b_{11}u_1 = P_1bu_1,$$

где b определено в (46). Аналогичные обозначения будем использовать и для других операторов. Подставив разложение $u = u_0 + u_1$ в (47), применив при каждом s проекторы P_0 и P_1 и перейдя от $C_0(s)$ к $v_0(s) = \varepsilon^2 C_0(s)$, получим систему

$$\begin{gathered}(T_0 - \mu)v_0 + \varepsilon B_{00}(s,\partial_s,\varepsilon)v_0 + \varepsilon B_{01}(s,\varepsilon\partial_s,\varepsilon)u_1 = f_0(s),\\ -\varepsilon^2\partial_s^2 u_1 - (\partial^2_{q_2} + \partial^2_{q_3} - w + \nu_0)u_1 + B^0_{10}(s,\partial_s)v_0 +\\ \varepsilon B_{10}(s,\partial_s,\varepsilon)v_0 + \varepsilon B_{11}(s,\varepsilon\partial_s,\varepsilon)u_1 = f_1(s,q'),\end{gathered} \tag{51}$$

где

$$B_{00} = b'_{00},\ B_{01} = \varepsilon b_{01} + \varepsilon^2 b'_{01},\ B^0_{10} = b_{10},\ B_{10} = b'_{10}, \qquad B_{11} = \varepsilon(2\{i\partial_s, \mathcal{A}^0_1\} + (\mathcal{A}^0_1(s))^2 - \frac{\gamma^2(s)}{4} + \zeta^2(s)(L^2)_{00} + \mathcal{V}^0(s)) - \varepsilon\mu + \varepsilon b_{11} + \varepsilon^2 b'_{11}. \quad (52)$$

При выводе системы (51) использовалось соотношение $b_{00} = 0$.

Левые части системы (51) определяют непрерывный оператор

$$A : \mathcal{H}^2(S^1_l) \times \mathcal{H}^2_D(\Omega) \cap \mathcal{L}^\perp_0 \to L_2(S^1_l) \times \mathcal{L}^\perp_0$$

и для доказательства существования резольвенты оператора H'_ε при заданных ε и λ достаточно установить, что A является изоморфизмом. Оператор A представляется в виде суммы $A = A_0 + \varepsilon B$, где A_0 определяется из (51), если все B_{ij} положить равными нулю, а B определяется матричными элементами $B_{i,j}$. Если $\mu \notin \sigma(T_0)$ ($\sigma(T_0)$ – спектр оператора T_0), то решение системы (51) без операторов B_{ij} можно получить в явном виде с помощью разложения (48) и разложения коэффициентов $C_n(s)$ из (48) в ряд Фурье

$$C_n(s) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{nk} \frac{1}{\sqrt{l}} e^{2\pi i\, ks/l}.$$

В результате получим, что оператор A_0^{-1} определяется формулами

$$v_0 = (T_0 - \mu)^{-1} f_0, \qquad C_{nk} = \frac{(f_1 - B^0_{10} v_0)_{nk}}{\varepsilon^2 \xi_k^2 + \nu_n - \nu_0}, \tag{53}$$

где $\xi_k = 2\pi k/l$, а $(f_1 - B^0_{10} v_0)_{nk}$ – коэффициенты соответствующего разложения для $f_1 - B^0_{10} v_0$.

Из известного равенства $\|(T_0 - \mu)^{-1}\| = \operatorname{dist}(\mu, \sigma(T_0))$, справедливого для любых самосопряжённых операторов (см., например, [28] глава 6 п. 1 пример 2), при $\mu \in W$, для v_0 следует оценка $\|v_0\| \le c\|f_0\|$ с константой c, не зависящей от $f_0 \in L_2(S^1_l)$. Из стандартного неравенства $\|v_0\|_2 \le c(\|T_0 v_0\| + \|v_0\|)$ при $\mu \in W$ теперь получается оценка

$$\|v_0\|_2 \le c\|f_0\|, \tag{54}$$

где $\|\cdot\|_2$ – норма в $\mathcal{H}^2(S^1_l)$, а через c здесь и далее каждый раз обозначается новая константа. Из (53), (54) и того, что (49) является эквивалентной нормой в $\mathcal{H}^2_D(\Omega)$, получаем, что оператор A_0 при $\mu \in W$ для $\varepsilon > 0$ является изоморфизмом.

При $\mu \in W$, где W определено в формулировке теоремы 3, будем рассматривать εB как возмущение, и будем строить A^{-1} в виде ряда Неймана

$$A^{-1} = A_0^{-1} + A_0^{-1} \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} (-\varepsilon B A_0^{-1})^n. \tag{55}$$

Ясно, что теорема 3 будет доказана, если мы установим следующее утверждение.

Лемма 2 *Найдётся такое $\varepsilon_0 > 0$, что норма оператора BA_0^{-1} равномерно ограничена при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и $\mu \in W$.*

Доказательство этого утверждения проводится по той схеме, что доказательство леммы 1. Введём в $\mathcal{H}^2_D(\Omega)$ норму, зависящую от параметра ε:

$$\|u\|_{2,\varepsilon} = \|\varepsilon^2\partial_s^2 u\| + \sum_{j=2}^{3}(\|\varepsilon\partial_s\partial_{q_j}u\| + \|\partial_{q_j}u\|) + \sum_{2\le i,j\le 3}\|\partial_{q_i}\partial_{q_j}u\| + \|\varepsilon\partial_s u\| + \|u\|, \quad (56)$$

где $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(\Omega)$, а $\|\cdot\|_{2,1}$ – это обычная норма в $\mathcal{H}^2(\Omega)$.

С некоторой константой c выполняется оценка

$$\|u_1\|_{2.\varepsilon} \le \|\varepsilon^2\partial_s^2 + \partial_{q_2}^2 + \partial_{q_3}^2 - w + \nu_0)u_1\| \quad (57)$$

для всех $u_1 \in \mathcal{H}_D^2(\Omega)\cap\mathcal{L}_0^{\perp}$. Действительно,

$$\|\varepsilon\partial_s\partial_{q_j}u_1\|^2 + \|\varepsilon\partial_s u_1\ \|^2 = (\varepsilon\partial_s\partial_{q_j}u_1, \varepsilon\partial_s\partial_{q_j}u_1) + (\varepsilon\partial_s u_1, \varepsilon\partial_s u_1) = (\varepsilon^2\partial_s^2 u_1, \partial_{q_j}^2 u_1) -$$
$$(\varepsilon^2\partial_s^2 u_1, u_1) \le (\|\varepsilon^2\partial_s^2 u_1\|^2 + \|\partial_{q_j}^2 u_1\|^2 + \|u_1\|^2) \le c^2(\|\varepsilon^2\partial_s^2 u_1\|^2 + \int_0^l \|u_1\|^2_{\mathcal{H}^2(M)}\,ds),$$

а остальные слагаемые в (56) оцениваются через $(\int_0^l \|u_1\|^2_{\mathcal{H}^2(M)}\,ds)^{1/2}$. Напомним, что c каждый раз означает новую константу. С помощью обычной эллиптической оценки

$$\|u_1\|_{\mathcal{H}^2(M)} \le c\|(\partial_{q_2}^2 + \partial_{q_3}^2 - w + \nu_0)u_1\|_{L_2(M)}$$

теперь получаем

$$\|u_1\|^2_{2,\varepsilon} \le c^2(\|\varepsilon^2\partial_s^2 u_1\|^2 + \|(\partial_{q_2}^2 + \partial_{q_3}^2 - w + \nu_0)u_1\|^2). \quad (58)$$

Разложив $u_1(s,q')$ в ряд по ортонормированной системе $l^{-1/2}\chi_n(q')\exp(2\pi i\,ks/l)$ и обозначив, как и прежде, коэффициенты этого разложения через C_{nk}, с помощью равенства Парсеваля получим, что

$$\|\varepsilon^2\partial_s^2 u_1\|^2 + \|(\partial_{q_2}^2 + \partial_{q_3}^2 - w + \nu_0)u_1\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\varepsilon^4\xi_k^4 + (\nu_n - \nu_0)^2)|C_{nk}|^2 \le$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=-\infty}^{\infty}(\varepsilon^2\xi_k^2 + \nu_n - \nu_0)^2|C_{nk}|^2 = \|\varepsilon^2\partial_s^2 + \partial_{q_2}^2 + \partial_{q_3}^2 - w + \nu_0)u_1\|^2. \quad (59)$$

Из (58) и (59) получаем оценку (57).

Из (53), (54), (57) ясно, что для решений системы $A_0(v_0, u_1) = (f_0, f_1)$ с некоторой константой c_1 выполняется оценка

$$\|v_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon} \le c_1(\|f_0\| + \|f_1\|) \quad (60)$$

для всех $v_0 \in \mathcal{H}^2(S_l^1),\ u_1 \in \mathcal{H}_D^2(\Omega)\cap\mathcal{L}_0^{\perp},\ \mu\in W,\ \varepsilon > 0$, где $\|\cdot\|_2$ – норма в $\mathcal{H}^2(S_1^l)$

В силу отмеченных выше свойств операторов B_{ij}, при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ с некоторым $\varepsilon_0 > 0$ выполняется оценка

$$\|B(v_0, u_1)\| \le c_2(\|v_0\|_2 + \|u_1\|_{2,\varepsilon}). \quad (61)$$

Так как $(v_0, u_1) = A_0^{-1}(f_0, f_1)$, то из (60) и (61) теперь получаем, что

$$\|BA_0^{-1}(f_0, f_1)\| \le c_3(\|f_0\| + \|f_1\|),$$

где $c_3 = c_1c_2$. Тем самым утверждение леммы доказано.

11. Сведение задачи о нахождении собственных значений оператора H к неявному уравнению

Пусть μ_k и W_k выбраны так, как указано в формулировке теоремы 4. Рассмотрим задачу: по заданным (f_0, f_1, d) найти решение (v_0, u_1, g) системы

$$\begin{gathered}(T_0-\mu)v_0+g\Phi_k+\varepsilon B_{00}(s,\partial_s,\varepsilon)v_0+\varepsilon B_{01}(s,\varepsilon\partial_s,\varepsilon)u_1=f_0(s),\\ -\varepsilon^2\partial_s^2u_1-(\partial_{q_2}^2+\partial_{q_3}^2-w+\nu_0)u_1+B_{10}^0(s,\partial_s)v_0+\\ \varepsilon B_{10}(s,\partial_s,\varepsilon)v_0+\varepsilon B_{11}(s,\varepsilon\partial_s,\varepsilon)u_1=f_1(s,q'),\qquad (v_0,\Phi_k)=d,\end{gathered}\tag{62}$$

где $B_{i,j},\ i,j=0,1$ определяются формулами (52), $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – скалярное произведение в $L_2(S_l^1)$, а d и g – числа. Подобные задачи рассматривались в [22] в связи с исследованием гипоэллиптичности некоторых операторов и в [21]. Через A теперь обозначим соответствующий оператор

$$A:\mathcal{H}^2(\mathbb{S}_l^1)\times\mathcal{H}_D^2(\Omega)\cap\mathcal{L}_0^\perp\times\mathbb{C}\to L_2(S_l^1)\times\mathcal{L}_0^\perp\times\mathbb{C}.$$

Предложение 6 *Для некоторого $\varepsilon_0>0$ оператор A при всех $\mu\in W_k,\ 0<\varepsilon<\varepsilon_0$ является изоморфизмом и с некоторой константой с выполняется оценка*

$$\|v_0\|_2+\|u_1\|_{2,\varepsilon}+|g|\le c(\|f_0\|+\|f_1\|+|d|).\tag{63}$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству предложения 1 (подробное изложение см. в [20]). Будем обозначать g из системы (62) как $g(\mu,\varepsilon,f_0,f_1,d)$.

Предложение 7 *Число λ, принадлежащее $W_k+\nu_0/\varepsilon^2$, при $0<\varepsilon<\varepsilon_0$, где W_k и ε_0 указаны в предложении 6, тогда и только тогда является собственным значением оператора H_ε, когда*

$$G(\mu,\varepsilon)=0,\tag{64}$$

где μ связано с λ формулой (50), $G(\mu,\varepsilon)=g(\mu,\varepsilon,0,0,1)$. *При вещественных μ функция $G(\mu,\varepsilon)$ вещественна.*

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству предложения 2 (подробное изложение см. в [20]).

Нам понадобится также утверждение о гладкости решений системы (62). Введём пространство $\mathcal{H}_D^{(2,m)}(\Omega)$, состоящее из функций, для которых $\partial_s^ju\in\mathcal{H}_D^2(\Omega),\ j=0\dots m$, и при $\varepsilon>0$ определим норму, зависящую от ε, в этом пространстве:

$$\|u\|_{(2,m),\varepsilon}=\sum_{j=0}^m\|\partial_s^ju\|_{2,\varepsilon}.$$

При $\varepsilon=1$ получаем обычную норму. Аналогичным образом определим пространство $\mathcal{H}^{(0,m)}(\Omega)$, состоящее из функций с конечной нормой

$$\|f\|_{(0,m)}=\sum_{j=0}^m\|\partial_s^jf\|,$$

так что $\mathcal{H}^{(0,0)}(\Omega)=L_2(\Omega)$. Оператор A можно рассматривать как отображение

$$A:\mathcal{H}^{2+m}(S_l^1)\times\mathcal{H}_D^{(2,m)}(\Omega)\cap\mathcal{L}_0^\perp\times\mathbb{C}\to\mathcal{H}^m(S_l^1)\times\mathcal{H}^{(0,m)}(\Omega)\cap\mathcal{L}_0^\perp\times\mathbb{C}.\tag{65}$$

Предложение 8 *Для любого целого $m \geq 0$ найдутся такие $\varepsilon_m > 0$ и c_m, что при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_m$ оператор A в* (65) *является изоморфизмом, а если имеется решение системы* (62) $v_0 \in \mathcal{H}^2(S_l^1)$, $u_1 \in \mathcal{H}_D^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^{\perp}$, $f_0 \in \mathcal{H}^m(S_l^1)$, $f_1 \in \mathcal{H}^{(0,m)}(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^{\perp}$, *то*

$$v_0 \in \mathcal{H}^{2+m}(S_l^1),\ u_1 \in \mathcal{H}_D^{(2,m)}(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^{\perp} \tag{66}$$

и выполняется оценка

$$\|v_0\|_{m+2} + \|u_1\|_{(2,m),\varepsilon} + |g| \leq c_m(\|f_0\|_m + \|f_1\|_{(0,m)} + |d|). \tag{67}$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству предложения 3 (подробное изложение см. в [20]).

12. Доказательство теоремы 4

Докажем, что функция $g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)$ для $\mu \in W_k$ имеет предел при $\varepsilon \to +0$ и, если доопределить её при $\varepsilon = 0$ этим пределом, то эта функция принадлежит $C^\infty(W_k \times [0, \varepsilon_0))$ и при этом будет аналитической по параметру μ, а для этого достаточно показать, что она имеет ограниченные частные производные в $W_k \times (0, \varepsilon_0')$, где ε_0' – любое $0 < \varepsilon_0' < \varepsilon_0$.

При $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ для некоторого ε_0 оператор A аналитически зависит от параметров μ и ε и в силу предложения 6 обратим, следовательно, v_0, u_1 (как функции со значениями в пространствах $\mathcal{H}^2(S_l^1)$ и $\mathcal{H}_D^2(\Omega) \cap \mathcal{L}_0^{\perp}$) и g также аналитически зависят от этих параметров. Аналогичным образом, в силу предложения 8 они, как элементы пространств из левой части (65), аналитически зависят от μ и ε (при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_m$). Обозначим

$$v_0^{(n_1,n_2)} = \partial_\mu^{n_1} \partial_\varepsilon^{n_2} v_0, \quad u_1^{(n_1,n_2)} = \partial_\mu^{n_1} \partial_\varepsilon^{n_2} u_1, \quad g^{(n_1,n_2)} = \partial_\mu^{n_1} \partial_\varepsilon^{n_2} g.$$

Предложение 9 *Для любых целых $n \geq 0$, $m \geq 0$ найдутся такие $\varepsilon_{n,m} \geq 0$ и константы $c_{n,m}$, что при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_{n,m}$ и конечных $\|f\|_{m+n}$ и $\|f_1\|_{(0,m+n)}$ для решений системы* (62) *выполняются оценки*

$$\|v_0^{(0,n)}\|_{2+m} + \|u_1^{(0,n)}\|_{(2,m),\varepsilon} + |g^{(0,n)}| \leq c_{m,n}(\|f_0\|_{m+n} + \|f_1\|_{(0,m+n)} + |d|). \tag{68}$$

Доказательство. Будем доказывать (68) по индукции. В силу предложения 3 неравенство (68) выполнено при $n = 0$. Предположим, что (68) выполнено при всех m для $n \leq j-1$ и докажем, что (68) будет выполнено при всех m для $n = j$. Дифференцируя (68) по ε, получим систему, аналогичную (36):

$$\begin{gathered}(T_0 - \mu)v_0^{(0,j)} + g^{(0,j)}\Phi_k + \varepsilon B_{00}(s, \partial_s, \varepsilon)v_0^{(0,j)} + \varepsilon B_{01}(s, \varepsilon\partial_s, \varepsilon)u_1^{(0,j)} = F_0(s),\\ (-\varepsilon^2\partial_s^2 - \partial_{q_2}^2 - \partial_{q_3}^2 + w - \nu_0)u_1^{(0,j)} + B_{10}^0(s, \partial_s)v_0^{(0,j)} +\\ \varepsilon B_{10}(s, \partial_s, \varepsilon)v_0^{(0,j)} + \varepsilon B_{11}(s, \varepsilon\partial_s, \varepsilon)u_1^{(0,j)} = F_1(s, q'), \qquad (v_0^{(0,j)}, \Phi_k) = 0.\end{gathered} \tag{69}$$

Дальнейшее доказательство предложения 9 аналогично доказательству предложения 4 (подробное изложение см. в [20]).

С помощью индукции по n_1 аналогичным образом устанавливается оценка производных, содержащих дифференцирования по μ, при этом оценка (68) является началом индукции.

Предложение 10 *Для любых целых $n_1 \geq 0$, $n_2 \geq 0$, $m \geq 0$ найдутся такие константы $c_{n_1,n_2,m}$, что при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_{n_2,m}$ и конечных $\|f\|_{m+n_2}$ и $\|f_1\|_{(0,m+n_2)}$ для решений системы (62) выполняются оценки*

$$\|v_0^{(n_1,n_2)}\|_{2+m} + \|u_1^{(n_1,n_2)}\|_{(2,m),\varepsilon} + |g^{(n_1,n_2)}| \leq c_{n_1,n_1,m}(\|f_0\|_{m+n_2} + \|f_1\|_{(0,m+n_2)} + |d|). \quad (70)$$

Следствие *1. Функция $g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)$ для $\mu \in W_k$ имеет предел при $\varepsilon \to +0$ и, если доопределить её при $\varepsilon = 0$ этим пределом, то эта функция принадлежит $C^\infty(W_k \times [0, \varepsilon_0))$ и при этом будет аналитической по параметру μ.*

Действительно, как уже отмечалось выше, для этого достаточно установить ограниченность производных от $g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)$ на $[0, \varepsilon_0')$, где $0 < \varepsilon_0' < \varepsilon_0$. Но это следует из установленной ранее аналитичности функции $g(\mu, \varepsilon, 0, 0, 1)$ при $\mu \in W_k$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ и оценок (70).

Следствие *2. Если v_0 и u_1 для $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $d = 1$ рассматривать как функции со значениями в $\mathcal{H}^2(S_l^1)$ и $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$, то они имеют пределы при $\varepsilon \to +0$. Доопределив их этими пределами при $\varepsilon = 0$, получим функции из $C^\infty(W_k \times [0, \varepsilon_0))$ и при этом они будут аналитическими по параметру μ.*

Это утверждение устанавливается таким же образом, как и предыдущее, если заметить, что норма функций в $\mathcal{H}_D^2(\Omega)$ равномерно по ε оценивается через норму в $\mathcal{H}_D^{2,2}(\Omega)$.

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы 4. Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, в первом и третьем уравнениях системы (62), получим

$$(T_0 - \mu)v_0 + G(\mu, 0)\Phi_k = 0, \qquad (v_0, \Phi_k) = 1,$$

следовательно, $v_0 = \Phi_k$ и $G(\mu, 0) = \mu - \mu_k$. Поэтому $\partial_\mu G(\mu, 0) = 1 \neq 0$ и утверждение теоремы 4 теперь вытекает из предложения 7 и теоремы о неявной функции.

13. Вычисление коэффициентов асимптотического разложения (41)

Исходя из предложения 7, собственное значение $\mu_k(\varepsilon)$, существование которого установлено в теореме 4, можно получить путем решения системы (62) с $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $d = 1$, если в качестве μ взять $\mu_k(\varepsilon)$, удовлетворяющее уравнению (64). Так как в силу следствия 2 соответствующие $\mu_k(\varepsilon)$, $v_0(s, \varepsilon)$, $u_1(s, q', \varepsilon)$ бесконечно дифференцируемы при $0 \leq \varepsilon < \varepsilon_0$, то их можно разложить в асимптотические ряды Тейлора

$$v_0(s, \varepsilon) \sim \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} v_0^{(0,n)}(s, 0), \qquad u_1(s, q', \varepsilon) \sim \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} u_1^{(0,n)}(s, q', 0). \quad (71)$$

После этого можно действовать по стандартной схеме теории возмущений: ряды (41) (с учетом (50)), (71) подставить в уравнения (62) с $g = 0$, $f_0 = 0$, $f_1 = 0$, $d = 1$ и, приравнивая к нулю коэффициенты при одинаковых степенях ε, получать рекуррентные соотношения для определения коэффициентов разложений (41), (71) (при этом, естественно, коэффициенты операторов B_{ij} также нужно разложить в асимптотические ряды по ε).

Таким способом получаем соотношения

$$(T_0 - \mu_k)v_0(s,0) = 0, \qquad (v_0(s,0), \Phi_k(s)) = 1,$$
$$(T_0 - \mu_k)v_0^{(0,1)}(s,0) - d_{k,1}v_0(s,0) + b'_{00}(s,\partial_s,0)v_0(s,0) = 0, \tag{72}$$

откуда следует, что $v_0(s,0) = \Phi_k(s)$, а условием разрешимости второго уравнения является равенство

$$d_{k,1} = (b'_{00}(s,\partial_s,0)\Phi_k(s), \Phi_k(s)), \tag{73}$$

которое и определяет коэффициент $d_{k,1}$.

Очевидно,что формулы (72) и (73) совпадают с формулами стандартной теории возмущений для оператора

$$T_0 + \varepsilon b'_{00}(s,\partial_s,0), \tag{74}$$

который получается, если в правой части первого уравнения в (51) (без μ) пренебречь членами порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$. Отсюда следует, что $\mu_k(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to +0$ с точностью до $\mathcal{O}(\varepsilon^2)$ совпадает с собственным значением оператора (74), которое находится вблизи μ_k.

14. Случай кратного собственного значения оператора T_0

Пусть μ_k – кратное собственное значение оператора T_0 и $\Phi_k^1,\ \Phi_k^2$ – ортонормированные собственные функции, отвечающие этому собственному значению. Обозначим через $\hat\beta$ матрицу

$$\hat\beta = \begin{pmatrix} b'_{00}(s,\partial_s,0)\Phi_k^1, \Phi_k^1) & b'_{00}(s,\partial_s,0)\Phi_k^2, \Phi_k^1) \\ b'_{00}(s,\partial_s,0)\Phi_k^1, \Phi_k^2) & b'_{00}(s,\partial_s,0)\Phi_k^2, \Phi_k^2) \end{pmatrix}$$

и предположим, что вековое уравнение $\det(\hat\beta - \eta I) = 0$, где I – единичная матрица, имеет простые корни η_1, η_2 (т.е. в первом порядке теории возмущений происходит расщепление собственных значений оператора (74). В таком случае будет выполнено утверждение, аналогичное теореме 4 и следствиям предложения 10, но в $W_k + \nu_0/\varepsilon^2$ при достаточно малых $\varepsilon > 0$ будет существовать не одно собственное значение, а два $\lambda_k^1(\varepsilon)$ и $\lambda_k^2(\varepsilon)$, причем они невырождены и $\mu_k^{1,2}(\varepsilon)$ вместе с отвечающими им функциями v_0 и u_1 бесконечно дифференцируемы по ε при $0 \le \varepsilon < \varepsilon_0$ для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ и $\mu_k^{1,2}(0) = \mu_k$.

Доказательство этого утверждения можно получить по той же схеме, что и доказательство теоремы 4; поэтому мы отметим только некоторые изменения, которые нужно внести в рассуждения п. 12.

В системе (62) и далее под g, Φ_k и d следует понимать векторные величины

$$g = (g_1, g_2), \qquad \Phi_k = (\Phi_k^1, \Phi_k^2), \qquad d = (d_1, d_2),$$

а под их произведением, например, $d\Phi_k$ – сумму произведений их компонент. Доказательства предложений 8–10 и следствий к предложению 10 переносятся на этот случай без изменений, а в формулировке предложения 7 функция $G(\mu,\varepsilon)$ определяется как

$$G(\mu,\varepsilon) = \det \hat g(\mu,\varepsilon), \tag{75}$$

где матрица $\hat g$ определяется следующим образом: если в системе (62) $f_0 = 0$ и $f_1 = 0$, то, в силу линейности,

$$g(\mu,\varepsilon,0,0,d) = \hat g(\mu,\varepsilon)d, \tag{76}$$

где $\hat g(\mu,\varepsilon)$ – матрица с элементами $\hat g_{ij}(\mu,\varepsilon),\ i,j = 1,2$.

При вещественных μ функция $G(\mu,\varepsilon)$ вещественна. Это следует из того, что при вещественных μ матрица $\hat{g}(\mu,\varepsilon)$ эрмитова. Чтобы это показать, заметим, что система (62) с $f_0=0$ и $f_1=0$ эквивалентна соотношениям

$$\varepsilon^2(H'_\varepsilon-\lambda)u=-g_1\Phi_k^1\chi_0-g_2\Phi_k^2\chi_0,\qquad \varepsilon^2(u,\Phi_k^1\chi_0)=d_1,\qquad \varepsilon^2(u,\Phi_k^2\chi_0)=d_2, \tag{77}$$

где $(\,\cdot\,,\cdot\,)$ – скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Заменяя $\varepsilon^2(H'_\varepsilon-\lambda)u$ в равенстве

$$(u,\varepsilon^2(H'_\varepsilon-\lambda)u)=(\varepsilon^2(H'_\varepsilon-\lambda)u,u)$$

на правую часть в (77) и пользуясь соотношениями (76), (77), получаем

$$(\overline{\hat{g}_{11}d_1+\hat{g}_{12}d_2})d_1+(\overline{\hat{g}_{21}d_1+\hat{g}_{22}d_2})d_2=(\hat{g}_{11}d_1+\hat{g}_{12}d_2)\overline{d}_1+(\hat{g}_{21}d_1+\hat{g}_{22}d_2)\overline{d}_2.$$

Ввиду произвольности чисел $d_1,\ d_2$ отсюда следует, что матрица $\hat{g}$ эрмитова.

Наиболее существенные изменения нужно произвести в конце доказательства теоремы 4. Вместо обычной теоремы о неявной функции нужно использовать следующее утверждение: *если функция $G(\mu,\varepsilon)$ класса C^∞ определена при $0\le\varepsilon<\varepsilon_0$ в некоторой комплексной окрестности точки μ_k и аналитична по μ, причем*

$$G(\mu_k,0)=0,\quad G_\mu(\mu_k,0)=0,\quad G_\varepsilon(\mu_k,0)=0,\quad G_{\mu,\mu}(\mu_k,0)\ne 0$$

и корни уравнения

$$\eta^2G_{\mu\mu}(\mu_k,0)+2\eta\,G_{\mu.\varepsilon}(\mu_k,0)+G_{\varepsilon.\varepsilon}(\mu_k,0)=0$$

различны, тогда уравнение $G(\mu,\varepsilon)=0$ в некоторой окрестности точки $(\mu_k,0)$ при $0<\varepsilon$ имеет два различных корня $\mu_k^1(\varepsilon)$ и $\mu_k^2(\varepsilon)$, причем $\mu_k^{1,2}(\varepsilon)\in C^\infty$ и $\mu_k^{1,2}(0)=\mu_k$.

Это утверждение легко сводится к обычной теореме о неявной функции с помощью подстановки $\mu-\mu_k=\varepsilon z$.

После этих замечаний остается лишь проверить, что функция $G(\mu,\varepsilon)$, определенная формулами (75), (76) удовлетворяет этим условиям. Для этого достаточно вычислить первые производные от $\hat{g}$ в точке $(\mu_k,0)$.

Переходя к пределу при $\varepsilon\to+0$ в (62) для $f_0=0,\ f_1=0$, получаем

$$(T_0-\mu)v_0+g(\mu,0,0,0,d)\Phi_k=0,\ (v_0,\Phi_k)=d,$$

следовательно, $v_0=d\Phi_k$ и $g(\mu,0,0,0,d)=(\mu-\mu_k)d$, поэтому

$$\hat{g}(\mu,0)=(\mu-\mu_k)I, \tag{78}$$

а из (69) следует, что

$$(T_0-\mu_k)v_0^{(0,1)}+g^{(0,1)}(\mu_k,0,0,0,d)\Phi_k+b'_{00}(s,\partial_s,0)v_0=0.$$

Как только что было показано, $v_0=d\Phi_k$ и, умножая это уравнение скалярно на Φ_k^1 и Φ_k^2, получим

$$(g^{(0,1)}(\mu_k,0,0,0,d)\Phi_k,\Phi_k^j)=-(b'_{00}(s,\partial_s,0)d\Phi_k,\Phi_k^j),$$

или, учитывая (76), $\partial_\varepsilon\hat{g}(\mu_k,0)=-\hat{\beta}$. Из (78) теперь вытекает, что

$$\hat{g}(\mu, \varepsilon) = (\mu - \mu_k)I - \varepsilon\hat{\beta} + \mathcal{O}(|\mu - \mu_k|^2 + \varepsilon^2),$$

откуда легко следуют все необходимые нам свойства функции $G(\mu, \varepsilon)$. Тем самым сформулированное в начале этого пункта утверждение о собственных значениях $\lambda_k^{1,2}(\varepsilon)$ доказано.

Как и в п. 13, для вычисления коэффициентов $d_{k,1}^{1,2}$ соответствующих разложений для $\mu_k^{1,2}(\varepsilon)$ можно применять к оператору (74) обычные формулы теории возмущений кратного собственного значения.

Список литературы

1. *Маслов В.П.* Асимптотика собственных функций уравнения Δu + k^2u = 0 с краевыми условиями на эквидистантных кривых и рассеяние электромагнитных волн в волноводе// Докл. АН СССР, 1958, **123**(4), 631-633.
2. *Maslov V.P.* Mathematical Aspects of Integral Optics// Russ. J. Math. Phys., 2001, **8**(1), 83-105.
3. *Маслов В.П., Воробьев Е.М.* Об одномодовых открытых резонаторах// Докл. АН СССР, 1968, **179**(3), 558-561.
4. *Белов В.В., Доброхотов С.Ю., Синицын С.О.* Асимптотические решения уравнения Шредингера в тонких трубках// Труды Института мататематики и механики УрО РАН, 2003, **9**(1), 1-11.
5. *Белов В.В., Доброхотов С.Ю., Синицын С.О., Тудоровский Т.Я.* Квазиклассическое приближение и канонический оператор Маслова для нерелятивистских уравнений квантовой механики в нанотрубках// Докл. РАН, 2003, **393**(4), 460464.
6. *Belov V.V., Dobrokhotov S.Yu., Tudorovskii T.Ya.* Quantum and classical dynamics of electron in thin curved tubes with spin and external electromagnetic fields taken into account// Russ. J. Math. Phys., 2004, **11**(1), 109-118.
7. *Белов В.В., Доброхотов С.Ю., Тудоровский* Асимптотические решения нерелятивистских уравнений квантовой механики в искривленных нанотрубках// Теорет. Мат. Физ., 2004, **141**(2), 267-303.
8. *Белов В.В., Доброхотов С.Ю., Маслов В.П., Тудоровский Т.Я.* Обобщенный адиабатический принцип для описания динимики электрона в искривленных нанотрубках// Успехи Физ. Наук, 2005, **175**(9), 1004-1010.
9. *Duclos P., Exner P.* Curvature-induced bound states in quantum waveguides in two and three dimensions// Rev. Math. Phys., 1995, **7**(1), 73-102.
10. *Exner P., Seba P.* Bound States in curved quantum waveguides// J. Math. Phys., 1989, **30**(11), 2574-2580.
11. *Exner P.* Bound states in quantum waveguides of a slowly decaying curvature// J. Math. Phys., 1993 **34**(1), 23-28.
12. *Exner P.* A quantum pipette// J. Phys. A, 1995, **28**(18), 5323-5330.
13. *Bulla W., Gesztesy F., Renger W., Simon B.* Weakly couped bound states in quantum waveguides// Proc. Amer. Math. Soc., 1997, **125**(5), 1487-1495.
14. *Exner P., Vugalter S.A.* Bounds states in a locally deformed waveguide: the critical value// Lett. Math. Phys., 1997, **39**(1), 59-68.
15. *Borisov D., Exner P., Gadyl'shin R., Krejcirik D.* Bound states in a weakly deformed strips and layers// Ann. Inst. H. Poincare, 2001 **2**(3), 553-572.
16. *Грушин В.В.* О собственных значениях финитно возмущенного оператора Лапласа в бесконечных цилиндрических областях// Матем. Заметки, 2004, **75**(3), 360-371.
17. *Грушин В.В.* Асимптотическое поведение собственных значений оператора Шре- дингера с поперечным потенциалом в слабо искривленных бесконечных цилиндрах// Матем. Заметки, 2005, **77**(5), 656-664.
18. *Грушин В.В.* Асимптотическое поведение собственных значений оператора Лапласа в бесконечных цилиндрах, возмущенных поперечными растяжениями// Матем. Заметки, 2007, **81**(3), 328-334.
19. *Грушин В.В.* Асимптотическое поведение собственных значений оператора Лапласа в тонких бесконечных трубках// Матем. Заметки, 2009, **85**(5), 687-701.
20. *Грушин В.В.* Асимптотическое поведение собственных значений оператора Шрё- дингера в тонких замкнутых трубках// Матем. Заметки, 2008, **83**(4), 503-519.

21. *Грушин В.В.* Применение многопараметрической теории возмущений фредголь- мовых операторов к блоховским функциям// Матем. Заметки, 2009, **86**(6), 819828
22. *Грушин В.В.* Об одном классе псевдодифференциальных операторов, вырождающихся на подмногообразии// Матем. Сб., 1971, **84**(2), 163-195.
23. *Гадыльшин Р.Р.* О локальных возмущениях квантовых волноводов// Теорет. Мат. Физ., 2005, **145**(3), 358-371.
24. *Chenaud B., Duclos P., Freitas P., Krejcirik D.* Geometrically induced discrete spectrum in curved tubes// Differential Geom. Appl., 2005, **23**(2), 95-105.
25. *Магарилл Л.И. , Энтин М.В.* Электроны в криволинейной квантовой проволоке// Ж. Экспер. Теорет. Физ., 2003 **123**(4), 867-876.
26. *Hormander L.* Linear Partial Differential Operators// Grundlehren Math. Wiss., **116**, Springer-Verlag, Berlin, 1963. Русс. пер.: *Хёрмандер Л.* Линейные дифференциальные операторы с частными производными// Мир, Москва, 1965.

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF EIGENVALUES OF THE SCHROEDINGER OPERATOR IN THIN INFINITE TUBES AND THIN CLOSED TUBES

V.V. Grushin

Moscow Institute of Electronics and Mathematics
at National Research University HSE

vvgrushin@mail.ru

Received 30.09.2012

The eigenvalue problem is considered for the Laplace operator with zero Dirichlet conditions in infinite tubes, i.e., in infinite curved cylinders with internal torsion under uniform compression of the cross-sections, and an asymptotic expansion is obtained with respect to a small parameter characterizing the transverse dimensions of the tube. A similar expansion is obtained for the Schroedinger operator with the magnetic field taken into account in the case of finite closed tubes. A method for reducing the eigenvalue problem to the problem of solving an implicit equation is proposed.