ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ПАУЛИ НА СЛУЧАЙ АЛГЕБР КЛИФФОРДА

Д.С. Широков

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

shirokov@mi.ras.ru

Поступила 09.09.2012

В работе доказаны утверждения, которые обобщают так называемую фундаментальную теорему Паули о гамма-матрицах. Рассмотрены алгебры Клиффорда над полем вещественных и комплексных чисел произвольной размерности. Для произвольных двух наборов из четного или нечетного числа элементов, удовлетворяющих определяющим антикоммутационным соотношениям алгебры Клиффорда, доказаны обобщения теоремы Паули. Предъявлены алгоритмы для вычисления элемента, осуществляющего связь между двумя наборами.

УДК 514.744

1 Введение

Алгебра Клиффорда (первоначальное название - Геометрическая алгебра) была открыта английским математиком Вильямом Клиффордом [1] в 1878 году как алгебра, объединяющая свойства алгебры Грассмана [2] и кватернионов Гамильтона [3].

Дальнейшее развитие алгебр Клиффорда связано с целым рядом известных математиков и физиков - Р. Липшиц, Т. Вален, Э. Картан, Э. Уитт, К. Шевалльe [4], М. Рис [5] и др. Также отметим известную статью Атьи, Ботта и Шапиро 1964 г.[6], вызвавшую довольно большой резонанс в научном сообществе.

Существенное влияние на развитие алгебр Клиффорда оказало уравнение Дирака [7] для электрона (1928), к которому алгебра Клиффорда имеет непосредственное отношение. Уравнение Дирака записывается с использованием 4 комплекснозначных матриц (гамма-матриц Дирака), которые удовлетворяют тем же определяющим соотношениям, что и генераторы алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell(1,3)$. Связь алгебры Клиффорда со спинорами привлекла внимание к теории алгебр Клиффорда со стороны многих физиков и математиков.

В настоящее время алгебры Клиффорда применяется во многих разделах современной математики и физики. Например, алгебра Клиффорда находит свое применение в теории поля (D. Hestenes [8], N. Marchuk [9]), робототехнике, обработке сигналов и изображений, химии, небесной механике, вычислительной технике, электродинамике, геометрии и др.

В настоящей работе обсуждается применение формализма алгебр Клиффорда при изучении различных вопросов математической физики. Обсуждается обобщение фундаментальной теоремы Паули о гамма-матрицах на случай вещественных и комплексных алгебр Клиффорда. Предложенные обобщения используются при описании связи спинорных и ортогональных групп, в частности, при вычислении элементов спинорных групп по заданным элементам ортогональных групп.

2 Вещественные и комплексные алгебры Клиффорда

В литературе известно несколько различных (эквивалентных) определений алгебр Клиффорда.[1] В рассматриваемом далее определении алгебры Клиффорда используется базис специального вида - занумерованный упорядоченными мультииндексами. Подчеркнем, что введенные далее генераторы и базис фиксированы (не меняются). Такое определение ближе к первоначальному определению В. Клиффорда.

Пусть E - векторное (линейное) пространство над полем $\mathbb{F}$ вещественных чисел $\mathbb{R}$ или над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Пусть n - натуральное число и размерность пространства E равна $\dim E = 2^n$. Пусть в E введен базис

$$e,\, e^a,\, e^{a_1 a_2},\, \ldots, e^{1\ldots n}, \quad \text{где} \quad a_1 < a_2 < \ldots, \quad (\text{их } 2^n \text{ штук})$$

занумерованный упорядоченными мультииндексами длины от 0 до n. Индексы $a, a_1, a_2, \ldots$ пробегают значения от 1 до n.

Пусть p и q - неотрицательные целые числа и $p + q = n,\ n \geq 1$. Введем диагональную матрицу η размера n: $\eta = ||\eta^{ab}|| = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$, у которой на диагонали стоят p штук $+1$ и q штук -1. Введем на E операцию *Клиффордова умножения* $U, V \to UV$ так, что выполнены свойства дистрибутивности, ассоциативности, e - единичный элемент,

[1] В [10] рассмотрены сразу три различных определения алгебры Клиффорда и показана их эквивалентность. В разных случаях бывают удобны разные определения. После работ Е. Картана определение алгебры Клиффорда дается как определение алгебры Клиффорда n-мерного векторного пространства V с заданной квадратичной формой Q сигнатуры (p, q), где $n = p + q$. При этом требуется, чтобы алгебра Клиффорда содержала изометричную копию V.

$$e^a e^b + e^b e^a = 2\eta^{ab} e, \qquad \forall a, b = 1, \dots, n,$$

$$e^{a_1} \dots e^{a_k} = e^{a_1 \dots a_k}, \qquad 1 \le a_1 < \dots a_k \le n.$$

Тогда введенная таким образом алгебра называется *алгеброй Клиффорда* и обозначается $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ в случае поля вещественных чисел и $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(p,q) = \mathcal{C}\ell(p,q)^2$ в случае поля комплексных чисел. В тех случаях, когда рассуждения верны для обоих случаев, будем писать $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$, подразумевая, что $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ или $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Элементы e^a называются *генераторами* [3] алгебры Клиффорда, элемент e называется *единицей* алгебры Клиффорда. Пара чисел (p,q) называется *сигнатурой* алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$. Заметим, что часто сигнатурой также называется число $p-q$.

Любой элемент U алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ представляется в виде разложения по базису

$$U = ue + u_a e^a + \sum_{a_1<a_2} u_{a_1a_2} e^{a_1a_2} + \dots + u_{1\dots n} e^{1\dots n}, \tag{1}$$

где $u, u_a, u_{a_1a_2}, \dots, u_{1\dots n}$ - вещественные (в случае $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$) или комплексные числа (в случае $\mathcal{C}\ell(p,q)$).

Векторные подпространства, натянутые на элементы $e^{a_1\dots a_k}$, занумерованные упорядоченными мультииндексами длины k, обозначаются как $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}_k(p,q)$. Элементы подпространства $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}_k(p,q)$ называются *элементами ранга* k и обозначаются через $\overset{k}{U}$. Отметим, что $\dim \mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}_k(p,q) = C^k_n$. Разбиение $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}(p,q) = \bigoplus_{k=0}^n \mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}_k(p,q)$ задает классификацию элементов алгебр Клиффорда по рангам.

Алгебра Клиффорда $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ является супералгеброй, а именно представляется в виде прямой суммы с соответствующими свойствами для четного и нечетного подпространства

$$\mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}(p,q) = \mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Even}}(p,q) \oplus \mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q) = \bigoplus_{k-even} \mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}_k(p,q) \oplus \bigoplus_{k-odd} \mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}_k(p,q). \tag{2}$$

Элементы подпространства $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Even}}(p,q)$ называются *четными элементами* алгебры Клиффорда, элементы подпространства $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{F}}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$ называются *нечетными элементами* алгебры Клиффорда.

Рассмотрим следующие операции сопряжения от элементов алгебры Клиффорда, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Для элемента $U \in \mathcal{C}\ell(p,q)$ определим операцию сопряжения $U \to U^{\sim}$, называемую *реверсом* $U^{\sim} = (\sum_{k=0}^n \overset{k}{U})^{\sim} = \sum_{k=0}^n (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}} \overset{k}{U}$. Отметим, что реверс обращает порядок следования множителей в произведениях генераторов $(e^{a_1}e^{a_2}\dots e^{a_k})^{\sim} = e^{a_k}\dots e^{a_2}e^{a_1}$, в частности $(e^a)^{\sim} = e^a$. Верно $U^{\sim\sim} = U$, $(UV)^{\sim} = V^{\sim}U^{\sim}$, $(U+V)^{\sim} = U^{\sim} + V^{\sim}$, $(\lambda U)^{\sim} = \lambda U^{\sim}$.

---

[2] Заметим, что комплексные алгебры Клиффорда одной размерности n (и разных сигнатур) изоморфны друг другу как алгебры (см. ниже). Однако в приложениях рассматриваются комплексные алгебры Клиффорда различных сигнатур. Например, при рассмотрении уравнения Дирака используется комплексная алгебра Клиффорда $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(1,3)$ (а не $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{C}}(4,0)$).

[3] В русскоязычной литературе вместо термина “генератор” часто используется термин “порождающий”.

Операция *четностного сопряжения* $U \to U^{\curlywedge}$ такова, что нечетные элементы умножает на -1, а четные элементы не меняет. В частности имеем $(e^a)^{\curlywedge} = -e^a$. Для элемента $U \in \mathcal{C}\!\ell(p,q)$ имеем $U^{\curlywedge} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \overset{k}{U}$. Верно $U^{\curlywedge\curlywedge} = U$, $(UV)^{\curlywedge} = U^{\curlywedge}V^{\curlywedge}$, $U+V)^{\curlywedge} = U^{\curlywedge} + V^{\curlywedge}$, $(\lambda U)^{\curlywedge} = \lambda U^{\curlywedge}$.

Введем обозначение для линейных операций проектирования на подпространства элементов ранга k: $\langle U\rangle_k = \overset{k}{U} = \sum_{a_1<\cdots<a_k} u_{a_1\ldots a_k} e^{a_1\ldots a_k} \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_k(p,q)$. Введем операцию *следа* элемента $U \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ как операцию проектирования на одномерное подпространство $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_0(p,q)$, натянутое на единичный элемент e: $\mathrm{Tr}(U) = \langle U\rangle_0|_{e\to 1} = u$.

Будем обозначать коммутатор и антикоммутатор двух элементов алгебры Клиффорда через $[U,V] = UV - VU$, $\{U,V\} = UV + VU$.

Следующая известная теорема говорит о центре алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$.

Теорема 1 *Центром* $\mathrm{cen}\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q) = \{U \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q) \,|\, [U,V] = 0\, \forall V \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)\}$ *алгебры Клиффорда* $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ *размерности* $n = p+q$ *является*

$$\mathrm{cen}\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q) = \begin{cases} \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_0(p,q), & \text{n - четное;} \\ \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_0(p,q) \oplus \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}_n(p,q), & \text{n - нечетное.} \end{cases}$$

Кроме того приведем общеизвестные теоремы об изоморфизме алгебр Клиффорда матричным алгебрам.

Теорема 2 (Э.Картан 1908, Р.Ботт 1960) *Вещественные алгебры Клиффорда* $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$, $n = p+q$ *изоморфны (как алгебры) следующим матричным алгебрам:*

$$\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q) \simeq \begin{cases} \mathrm{Mat}(2^{\frac{n}{2}}, \mathbb{R}), & \text{если } p-q \equiv 0;2 \mod 8; \\ \mathrm{Mat}(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathbb{R}) \oplus \mathrm{Mat}(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathbb{R}), & \text{если } p-q \equiv 1 \mod 8; \\ \mathrm{Mat}(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathbb{C}), & \text{если } p-q \equiv 3;7 \mod 8; \\ \mathrm{Mat}(2^{\frac{n-2}{2}}, \mathbb{H}), & \text{если } p-q \equiv 4;6 \mod 8; \\ \mathrm{Mat}(2^{\frac{n-3}{2}}, \mathbb{H}) \oplus \mathrm{Mat}(2^{\frac{n-3}{2}}, \mathbb{H}), & \text{если } p-q \equiv 5 \mod 8. \end{cases}$$

где $\mathrm{Mat}(k,\mathbb{F})$ *- алгебра квадратных матриц размера* k *над полем или телом* $\mathbb{F}$.

Теорема 3 *Имеем следующие изоморфизмы комплексных алгебр Клиффорда матричным алгебрам*

$$\mathcal{C}\!\ell(p,q) \simeq \begin{cases} \mathrm{Mat}(2^{\frac{n}{2}}, \mathbb{C}), & \text{если } n \text{ - четно;} \\ \mathrm{Mat}(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathbb{C}) \oplus \mathrm{Mat}(2^{\frac{n-1}{2}}, \mathbb{C}), & \text{если } n \text{ - нечетно.} \end{cases}$$

Отметим, что элементы комплексных алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$ представляются комплексными матрицами, минимальный размер которых равен $2^{[\frac{n+1}{2}]}$. Причем, при нечетном n это будут блочно-диагональные матрицы размера $2^{\frac{n+1}{2}}$, у которых на диагонали стоят два блока размера $2^{\frac{n-1}{2}}$, а остальные элементы - нули.

3 Обобщенная теорема Паули (ОТП)

В 1936 году В. Паули [11] доказал так называемую фундаментальную теорему о гамма-матрицах Дирака. Приведем формулировку этой теоремы.

Теорема 4 (Паули) *Пусть два набора квадратных комплексных матриц* γ^a, β^a, $a = 0, 1, 2, 3$ *размера* 4 *удовлетворяют соотношениям*

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\eta^{ab}\mathbf{1}, \qquad \beta^a\beta^b + \beta^b\beta^a = 2\eta^{ab}\mathbf{1}.$$

Тогда существует единственная, с точностью до умножения на комплексное число, матрица T *такая, что*

$$\gamma^a = T^{-1}\beta^a T \qquad a = 0, 1, 2, 3.$$

Эта теорема играет ключевую роль при изучении различных вопросов, возникающих в теории поля ([12], [13]). Например, с помощью теоремы Паули доказывается лоренц-инвариантность уравнения Дирака, описывается связь спинорных и ортогональных групп, вводится понятие спиноров Майорана.

Имеются общеизвестные утверждения, которые в некотором смысле обобщают теорему Паули на случай произвольной размерности. А именно, методами теории представлений несложно показать, что алгебра Клиффорда имеет единственное (с точностью до эквивалентности) неприводимое представление в случае четной размерности и два неприводимых представления в случае нечетной размерности (см., например, [14], [15]). Данные утверждения применяются в различных вопросах математической физики, в частности, в теории суперсимметрии.

В одной из предыдущих работ [16] автором были предложены утверждения, обобщающие теорему Паули. А именно, рассматривается более общий вопрос (который не всегда сводится к рассмотрению представлений) о связи двух наборов элементов алгебр Клиффорда, удовлетворяющих определяющим антикоммутационным соотношениям. Показано, что в нечетном случае есть 4 (а в комплексном 6) вариантов связи между двумя наборами элементов, удовлетворяющих антикоммутационным соотношениям алгебры Клиффорда. Кроме того, во всех случаях (четной и нечетной размерностей) указаны явные алгоритмы для вычисления элемента, осуществляющего эту связь. Сформулируем доказанные теоремы.

Будем обозначать через $\mathcal{I}$ множество мультииндексов A длины от 0 до n: $\mathcal{I} = \{o, 1, \ldots, n, 12, 13, \ldots, 1\ldots n\}$, где o - пустой мультииндекс. Пусть $\mathcal{I}_{\mathrm{Even}} = \{A \in \mathcal{I} : |A| - \text{четно}\}$ и $\mathcal{I}_{\mathrm{Odd}} = \{A \in \mathcal{I} : |A| - \text{нечетно}\}$. Также используем обозначения $\gamma_A = \gamma_{a_1 \ldots a_k} = \gamma_{a_k} \cdots \gamma_{a_1} = (\gamma^A)^{-1}$ и $\gamma_a = \eta^{ab}\gamma^b = (\gamma^a)^{-1}$.

Теорема 5 *Пусть* $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ *- вещественная (или комплексная) алгебра Клиффорда четной размерности* $n = p+q$. *Пусть два набора элементов алгебры Клиффорда* γ^a, β^a, $a = 1, 2, \ldots, n$ *удовлетворяют соотношениям*

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\eta^{ab}e, \qquad \beta^a\beta^b + \beta^b\beta^a = 2\eta^{ab}e.$$

Тогда оба набора генерируют базисы алгебры Клиффорда и существует единственный, с точностью до умножения на вещественное (соответственно комплексное) число, элемент алгебры Клиффорда $T \in \mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{F}}(p,q)$ *такой, что*

$$\gamma^a = T^{-1}\beta^a T, \qquad \forall a = 1, \ldots, n \tag{3}$$

При этом, такой элемент T *всегда найдется среди элементов вида* $T = \sum_A \beta^A F \gamma_A$, *где в качестве элемента* F *подойдет любой такой элемент из* $\{\gamma^A, A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Even}}\}$, *если*

$\beta^{1\dots n} \neq -\gamma^{1\dots n}$, или из $\{\gamma^A, A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Odd}}\}$, если $\beta^{1\dots n} \neq \gamma^{1\dots n}$, что построенный по нему T отличен от нуля $T \neq 0$.

Теорема 6 *Пусть $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ - вещественная алгебра Клиффорда нечетной размерности $n = p+q$. Пусть два набора элементов алгебры Клиффорда γ^a, β^a, $a = 1, 2, \dots, n$ удовлетворяют соотношениям*

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\eta^{ab}e, \qquad \beta^a\beta^b + \beta^b\beta^a = 2\eta^{ab}e.$$

Тогда в случае алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ сигнатуры $p - q \equiv 1 \bmod 4$ элементы $\gamma^{1\dots n}$ и $\beta^{1\dots n}$ либо принимают значения $\pm e^{1\dots n}$ и тогда соответствующие наборы генерируют базис алгебры Клиффорда, либо принимают значения $\pm e$ и тогда наборы не генерируют базис. В этом случае реализуются случаи 1, 2, 3, 4.

В случае алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ сигнатуры $p - q \equiv 3 \bmod 4$ элементы $\gamma^{1\dots n}$ и $\beta^{1\dots n}$ всегда принимают значения $\pm e^{1\dots n}$ и соответствующие наборы всегда генерируют базис алгебры Клиффорда. В этом случае реализуются только случаи 1 и 2.

Утверждается, что существует единственный, с точностью до умножения на обратимый элемент центра алгебры Клиффорда, элемент алгебры Клиффорда T такой, что

$$\begin{array}{lllll}
1) & \gamma^a = T^{-1}\beta^a T, & \forall a = 1,\dots,n & \Leftrightarrow & \beta^{1\dots n} = \gamma^{1\dots n},\\
2) & \gamma^a = -T^{-1}\beta^a T, & \forall a = 1,\dots,n & \Leftrightarrow & \beta^{1\dots n} = -\gamma^{1\dots n},\\
3) & \gamma^a = e^{1\dots n}T^{-1}\beta^a T, & \forall a = 1,\dots,n & \Leftrightarrow & \beta^{1\dots n} = e^{1\dots n}\gamma^{1\dots n},\\
4) & \gamma^a = -e^{1\dots n}T^{-1}\beta^a T, & \forall a = 1,\dots,n & \Leftrightarrow & \beta^{1\dots n} = -e^{1\dots n}\gamma^{1\dots n}.
\end{array} \tag{4}$$

Заметим, что все четыре случая имеют единую запись в виде

$$\gamma^a = (\beta^{1\dots n}\gamma_{1\dots n})T^{-1}\gamma^a T.$$

Кроме того в случае вещественной алгебры Клиффорда $p - q \equiv 1 \bmod 4$, элемент T, о существовании которого говорится во всех четырех случаях теоремы, всегда найдется среди элементов вида

$$\sum_{A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Even}}} \beta^A F \gamma_A, \tag{5}$$

где в качестве F всегда подойдет один из элементов $\gamma^A + \gamma^B$, $A, B \in \mathcal{I}_{\mathrm{Even}}$.

В случае вещественной алгебры Клиффорда сигнатуры $p - q \equiv 3 \bmod 4$ элемент T, о существовании которого говорится в 1-2 случаях теоремы, всегда найдется среди элементов вида (5). Причем в качестве F подойдет любой такой из элементов γ^A, $A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Even}}$, что построенный по нему элемент T отличен от нуля $T \neq 0$.

Теорема 7 *Пусть $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$ - комплексная алгебра Клиффорда нечетной размерности $n = p + q$. Пусть два набора элементов алгебры Клиффорда γ^a, β^a, $a = 1, 2, \dots, n$ удовлетворяют соотношениям*

$$\gamma^a\gamma^b + \gamma^b\gamma^a = 2\eta^{ab}e, \qquad \beta^a\beta^b + \beta^b\beta^a = 2\eta^{ab}e.$$

Тогда в случае алгебры Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$ *сигнатуры* $p-q\equiv 1 \bmod 4$ *имеем для элементов* $\gamma^{1\ldots n}$ *и* $\beta^{1\ldots n}$ *возможные значения* $\pm e^{1\ldots n}$*, когда соответствующие наборы генерируют базисы алгебры Клиффорда, а также значения* $\pm e$*, когда наборы не генерируют базис. В этом случае реализуются 1, 2, 3 и 4 случаи теоремы.*

В алгебре Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$ *сигнатуры* $p-q\equiv 3 \bmod 4$ *имеем для элементов* $\gamma^{1\ldots n}$ *и* $\beta^{1\ldots n}$ *возможные значения* $\pm e^{1\ldots n}$*, когда соответствующие наборы генерируют базисы алгебры Клиффорда, а также значения* $\pm ie$*, когда наборы не будут генерировать базис. В этом случае реализуются 1, 2, 5 и 6 случаи теоремы.*

Утверждается, что существует единственный, с точностью до умножения на обратимый элемент центра алгебры Клиффорда, элемент алгебры Клиффорда T *такой, что*

$$\begin{array}{lllll}
1) & \gamma^a = T^{-1}\beta^a T, & \forall a=1,\ldots,n & \Leftrightarrow & \beta^{1\ldots n}=\gamma^{1\ldots n},\\
2) & \gamma^a = -T^{-1}\beta^a T, & \forall a=1,\ldots,n & \Leftrightarrow & \beta^{1\ldots n}=-\gamma^{1\ldots n},\\
3) & \gamma^a = e^{1\ldots n}T^{-1}\beta^a T, & \forall a=1,\ldots,n & \Leftrightarrow & \beta^{1\ldots n}=e^{1\ldots n}\gamma^{1\ldots n},\\
4) & \gamma^a = -e^{1\ldots n}T^{-1}\beta^a T, & \forall a=1,\ldots,n & \Leftrightarrow & \beta^{1\ldots n}=-e^{1\ldots n}\gamma^{1\ldots n},\\
5) & \gamma^a = ie^{1\ldots n}T^{-1}\beta^a T, & \forall a=1,\ldots,n & \Leftrightarrow & \beta^{1\ldots n}=ie^{1\ldots n}\gamma^{1\ldots n},\\
6) & \gamma^a = -ie^{1\ldots n}T^{-1}\beta^a T, & \forall a=1,\ldots,n & \Leftrightarrow & \beta^{1\ldots n}=-ie^{1\ldots n}\gamma^{1\ldots n}.
\end{array} \tag{6}$$

Заметим, что все шесть случаев имеют единую запись в виде

$$\gamma^a = (\beta^{1\ldots n}\gamma_{1\ldots n})T^{-1}\gamma^a T.$$

Кроме того, элемент T*, о существовании которого говорится во всех шести случаях теоремы, всегда найдется среди элементов вида*

$$\sum_{A\in\mathcal{I}_{\mathrm{Even}}} \beta^A F \gamma_A,$$

где в качестве F *всегда подойдет один из элементов вида* $\gamma^A+\gamma^B$*,* $A,B\in\mathcal{I}_{\mathrm{Even}}$.

Отметим, что предложенные теоремы можно переформулировать в терминах матриц, если воспользоваться утверждениями Теорем 2 и 3.

4 Применение ОТП в различных вопросах математической физики

В настоящей работе мы также хотим отметить возможные приложения доказанных теорем в различных вопросах математической физики. Стоит отметить несколько направлений, связанных с применением обобщенной теоремы Паули (ОТП).

Первым направлением можно назвать изучение n-мерного уравнения Дирака, в частности, вопрос об инвариантности уравнения при псевдоортогональных (в частном случае, лоренцевых) преобразованиях. Также стоит отметить рассмотрение систем многомерных уравнений Дирака-Максвелла и Дирака-Янга-Миллса. В связи с вопросами, возникающими при изучении уравнений Дирака-Янга-Миллса, возникает также (решенный) вопрос о выполнимости локальной теоремы Паули [17] в псевдоевклидовом пространстве.

Второе возможное применение возникает при изучении n-мерных спиноров. Мы не будем детально касаться этого вопроса в настоящей работе, отметим только основные результаты, сделанные в данном направлении и изложенные в других работах автора. Доказаны утверждения для аналогов Дираковского, Майорановского и зарядового сопряжения от спинора в случае произвольных размерностей и сигнатур пространства (см. также [18]). Отметим, что в случае четных размерностей рассмотрено по два аналога сопряжения каждого вида. Изучен вопрос о существовании спиноров Дирака, Вейля, Майорана и Майорана-Вейля в формализме алгебр Клиффорда в случае произвольных размерностей и сигнатур пространства. В связи с этими вопросами возникают вопросы, связанные с применением ОТП в теории суперсимметрии. Отметим классические работы по суперсимметрии и супергравитации Шерка, Глиоззи, Оливе (1977) [15], Куго и Таундсена (1983) [14], в которых обсуждаются похожие вопросы.

Третье применение относится к изучению связи спинорных и ортогональных групп. С помощью ОТП автором предложено альтернативное доказательство теоремы о двойных накрытиях спинорных групп ортогональными в случае произвольных размерностей (без использования теоремы Картана–Дьедонне, как делается в стандартном изложении). Кроме того, предложены явные алгоритмы для вычисления элементов спинорных групп, которые соответствуют элементам ортогональных групп при двойном накрытии. На последнем остановимся более подробно в настоящей работе.

5 Вычисление элементов спинорных групп

Рассмотим псевдо-ортогональную группу и ее специальную подгруппу

$$\begin{aligned}
\mathrm{O}(p,q) &= \{A \in Mat(n,\mathbb{R}) \,|\, A^T \eta A = \eta\},\\
\mathrm{SO}(p,q) &= \{A \in Mat(n,\mathbb{R}) \,|\, A^T \eta A = \eta,\, \mathrm{det} A = 1\},
\end{aligned}$$

где $p+q=n,\ n \geq 1$ и $\eta = ||\eta^{ab}|| = \mathrm{diag}(1,\ldots,1,-1,\ldots,-1)$ - диагональная матрица, у которой p штук $+1$ и q штук -1 на диагонали.

Будем рассматривать сигнатуры (p,q) Евклидова пространства V, у которых первые p координат являются временными, а последние q координат являются пространственными. Минор матрицы A будем обозначать через $A^{k_1\ldots k_i}_{l_1\ldots l_i}$.

Рассмотрим *ортохронную*, *ортохорную* и *специальную ортохронную* группы (см., например, [18])

$$\mathrm{O}_{\uparrow}(p,q) = \{A \in \mathrm{O}(p,q) \,|\, A^{1\ldots p}_{1\ldots p} > 0\}, \quad \mathrm{O}_{\downarrow}(p,q) = \{A \in \mathrm{O}(p,q) \,|\, A^{p+1\ldots n}_{p+1\ldots n} > 0\},$$

$$\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q) = \{A \in \mathrm{O}(p,q) \,|\, A^{1\ldots p}_{1\ldots p} > 0,\, \mathrm{det} A = 1\}.$$

Заметим, что группа $\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q) = \mathrm{SO}_{+}(p,q)$ является связной компонентой единицы. Ортохронная группа состоит из преобразований пространства, сохраняющих ориентацию во времени, ортохорная группа состоит из преобразований, которые сохраняют ориентацию в пространстве.

Можно показать, что псевдо-ортогональная группа $\mathrm{O}(p,q)$ состоит из 4 связных компонент (в случае $p,q \neq 0$) (см. [18]):

$$\mathrm{O}(p,q)=\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q)\sqcup\mathrm{O}'_{\uparrow}(p,q)\sqcup\mathrm{O}'_{\downarrow}(p,q)\sqcup\mathrm{SO}'(p,q),\qquad \text{где}$$

$$\mathrm{O}'_{\uparrow}(p,q)=\mathrm{O}_{\uparrow}(p,q)\setminus\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q),\qquad \mathrm{O}'_{\downarrow}(p,q)=\mathrm{O}_{\downarrow}(p,q)\setminus\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q),$$
$$\mathrm{SO}'(p,q)=\mathrm{SO}(p,q)\setminus\mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q).$$

Рассмотрим гомоморфизм $ad:\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}\times}(p,q)\to End\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$, действующий на группе обратимых элементов алгебры Клиффорда следующим образом $s\mapsto ad_s$, где $ad_s x= sxs^{-1}$ и $x\in\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$.

Также рассмотрим гомоморфизм $\overset{\wedge}{ad}$: $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}\times}(p,q)\to End\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$, действующий следующим образом $s\mapsto\overset{\wedge}{ad}_s$, где $\overset{\wedge}{ad}_s\,x=s^{\wedge}xs^{-1}$ и $x\in\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$.

Обозначим через $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}\times}_{\mathrm{Even}}(p,q)$ и $\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}\times}_{\mathrm{Odd}}(p,q)$ множества четных и нечетных обратимых элементов алгебры Клиффорда. Рассмотрим *группу Липшица* и ее специальную подгруппу

$$\Gamma^{\pm}(p,q)=\{s\in\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}\times}_{\mathrm{Even}}(p,q)\cup\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}\times}_{\mathrm{Odd}}(p,q)|\forall x\in\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}_{1}(p,q),sxs^{-1}\in\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}_{1}(p,q)\},$$

$$\Gamma^{+}(p,q)=\{s\in\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}\times}_{\mathrm{Even}}(p,q)|\forall x\in\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}_{1}(p,q),sxs^{-1}\in\mathcal{C}\ell^{\mathbb{R}}_{1}(p,q)\}.$$

Можем рассмотреть следующие *спинорные группы*

$$\begin{array}{rcl}\mathrm{Pin}(p,q)&=&\{T\in\Gamma^{\pm}|T^{\sim}T=\pm e\}=\{T\in\Gamma^{\pm}|T^{\sim\wedge}T=\pm e\},\\ \mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q)&=&\{T\in\Gamma^{\pm}|T^{\sim}T=+e\},\\ \mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q)&=&\{T\in\Gamma^{\pm}|T^{\sim\wedge}T=+e\},\\ \mathrm{Spin}(p,q)&=&\{T\in\Gamma^{+}|T^{\sim}T=\pm e\}=\{T\in\Gamma^{+}|T^{\sim\wedge}T=\pm e\},\\ \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)&=&\{T\in\Gamma^{+}|T^{\sim}T=+e\}=\{T\in\Gamma^{+}|T^{\sim\wedge}T=+e\}.\end{array}\qquad(7)$$

Группа $\mathrm{Pin}(p,q)$ состоит из 4 компонент для $p,q\neq0$:

$$\mathrm{Pin}(p,q)=\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)\sqcup\mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q)\sqcup\mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q)\sqcup\mathrm{Spin}'(p,q),\qquad\text{где}$$

$$\mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q)=\mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q)\setminus\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q),\qquad\mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q)=\mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q)\setminus\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q),$$
$$\mathrm{Spin}'(p,q)=\mathrm{Spin}(p,q)\setminus\mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q).$$

Имеем следующее известное утверждение о связи спинорных и ортогональных групп.

Теорема 8 *([10], [18] и др.) Гомоморфизм* $\overset{\wedge}{ad}$*, действующий из*

$$\mathrm{O}(p,q),\ \mathrm{SO}(p,q),\ \mathrm{SO}_{\uparrow\downarrow}(p,q),\ \mathrm{O}_{\uparrow}(p,q),\ \mathrm{O}_{\downarrow}(p,q)\qquad(8)$$

соответственно в

$$\mathrm{Pin}(p,q),\ \mathrm{Spin}(p,q),\ \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q),\ \mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q),\ \mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q)\qquad(9)$$

сюръективен с ядром $\{\pm1\}$*. Более того, спинорные группы дважды накрывают соответствующие ортогональные группы.*

Мы можем использовать формулу

$$T^{\wedge} e^a T^{-1} = p^a_b e^b, \tag{10}$$

которая сопоставляет паре элементов $\pm T$ спинорной группы (9) единственный элемент $P = ||p^a_b||$ соответствующей ортогональной группы (8).

Используя теоремы 5 и 6 мы можем получить алгоритм для вычисления элементов спинорный групп, которые соответствуют заданным элементам ортогональных групп. Мы используем формулу (10).

Теорема 9 *1) Рассмотрим вещественную алгебру Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell^{\mathbb{R}}(p,q)$ четной размерности n и ортогональную матрицу $P \in \mathrm{O}(p,q)$. Тогда мы всегда можем найти элементы $\pm T \in \mathrm{Pin}(p,q)$ такие, что $\overset{\wedge}{ad}(\pm T) = P$, следующим образом.*

Рассмотрим набор элементов алгебры Клиффорда $\beta^a = p^a_b e^b$, $P = ||p^a_b||$. Мы всегда сможем найти элемент $T \in \Gamma^{\pm}$ среди элементов

- $T = \beta^A F e_A$, *если* $\beta^{1\ldots n} = e^{1\ldots n}$,
- $T = (-1)^{|A|} \beta^A F e_A$, *если* $\beta^{1\ldots n} = -e^{1\ldots n}$,

где F такой элемент из множества

- $\{e^A, A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Even}}\}$, *если* $\beta^{1\ldots n} = e^{1\ldots n}$,
- $\{e^A, A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Odd}}\}$, *если* $\beta^{1\ldots n} = -e^{1\ldots n}$,

что соответствующий T ненулевой.

Далее принимаем во внимание условия $T^{\sim} T = \pm e$ (или $T^{\sim\wedge} T = \pm e$) и находим два элемента $\pm T$ из группы $\mathrm{Pin}(p,q)$, соответствующие ортогональной матрице P.

2) В случае нечетного n действуем аналогичным образом. Мы находим элемент T среди элементов

$$\sum_{A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Even}}} \beta^A F e_A,$$

где F такой элемент из

- $\{e^A, \quad A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Even}}\}$, *если* $\beta^{1\ldots n} = e^{1\ldots n}$,
- $\{e^A, \quad A \in \mathcal{I}_{\mathrm{Odd}}\}$, *если* $\beta^{1\ldots n} = -e^{1\ldots n}$,

что T ненулевой.

Далее накладываем условия $T^{\sim} T = \pm e$ или $T^{\sim\wedge} T = \pm e$.

Отметим, что мы можем вычислять элементы подгрупп группы $\mathrm{Pin}(p,q)$

$$\mathrm{Spin}(p,q),\ \mathrm{Pin}_{\uparrow}(p,q),\ \mathrm{Pin}_{\downarrow}(p,q),\ \mathrm{Spin}_{\uparrow\downarrow}(p,q)$$

аналогичным образом. Итак, мы всегда можем решить нелинейное уравнение (10) относительно элемента алгебры Клиффорда T и найти элементы спинорной группы.

Приведем пример. Для алгебр Клиффорда $\mathcal{C}\!\ell(p,q)$ с нечетными p и q, $p+q=n$, рассмотрим матрицу обращения времени $T = -\eta = -\mathrm{diag}(1,\ldots,1,-1,\ldots,-1) \in \mathrm{O}'_{\downarrow}(p,q)$, матрицу обращения четности $P = \eta \in \mathrm{O}'_{\uparrow}(p,q)$ и $T * P = -\eta * \eta = -\mathbf{1} \in \mathrm{SO}'(p,q)$. Используя предложенный выше алгоритм, можем найти

$$\overset{\wedge}{ad}\colon \pm e^{1\ldots p} \to -\eta, \qquad \overset{\wedge}{ad}\colon \pm e^{p+1\ldots n} \to \eta, \qquad \overset{\wedge}{ad}\colon \pm e^{1\ldots n} \to -\eta * \eta = -\mathbf{1},$$

где

$$\pm e^{1..p} \in \mathrm{Pin}'_{\downarrow}(p,q), \qquad \pm e^{p+1...n} \in \mathrm{Pin}'_{\uparrow}(p,q), \qquad \pm e^{1...n} \in \mathrm{Spin}'(p,q).$$

В настоящее время спинорные группы и алгебры Клиффорда используются в различных областях современной математики и физики: теории поля, робототехнике, обработке сигналов и изображений, химии, небесной механике, электродинамике и т.д. Автор надеется, что предложенные алгоритмы для вычисления элементов спинорных групп найдут применения в различных приложениях.

Работа выполнена при поддержке гранта Президента РФ (НШ-2928.2012.1).

Литература

1. *Clifford, W.,* Applications of Grassmann's Extensive Algebra // American Journal of Mathematics (The Johns Hopkins University Press) 1 (4): 350-358, (1878).
2. *Grassmann Hermann,* Die Lineale Ausdehnungslehre // Ein neuer Zweig der Mathematik, (1844).
3. *Hamilton William Rowan,* On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra // Philosophical Magazine. Vol. 25, n 3. p. 489-495, (1844).
4. *Chevalley C.,* The algebraic theory of Spinors and Clifford algebras // Springer, (1996).
5. *Riesz M.* Collected papers // Berlin, New York: Springer-Verlag, ISBN 978-3-54018115-6, MR 962287, (1988).
6. *M.F. Atiyah, R. Bott, A.Shapiro,* Clifford modules // Topology 3, pp. 3-38 (1964).
7. *Dirac P.A.M.,* Proc. Roy. Soc. Lond. A117 610, (1928).
8. *D.Hestenes, G.Sobczyk,* Clifford Algebra to Geometric Calculus – A Unified Language for Mathematical Physics // Reidel Publishing Company (1984).
9. *Марчук Н.Г.,* Уравнения теории поля и алгебры Клиффорда // Ижевск, РХД, (2009), 302 стр.
10. *Lounesto P.,* Clifford Algebras and Spinors // Cambridge Univ. Press (1997, 2001).
11. *W.Pauli,* Contributions mathematiques a la theorie des matrices de Dirac // Ann. Inst. Henri Poincare 6, (1936).
12. *Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В.,* Квантовые поля // Москва, Наука, (1980).
13. *Боголюбов Н.Н., Логунов А.А., Оксак А.И., Тодоров И.Т.,* Общие принципы квантовой теории поля // Москва, Наука, (1987).
14. *T.Kugo, P.Townsend,* Supersymmetry and the Division Algebras // Nucl.Phys., B221: 357, (1983).
15. *J.Sherk, F.Gliozzi, D.Olive,* Supersymmetry, Supergravity Theories and the Dual Spinor Model // Nucl.Phys., B122: 253, (1977).
16. *Широков Д.С.,* Обобщение теоремы Паули на случай алгебр Клиффорда // Доклады академии наук, 440(5), с.1-4 (2011).
17. *N.G.Marchuk, D.S.Shirokov,* Local generalized Pauli's theorem // arXiv:1201.4985v1 [math-ph].
18. *Benn I. M., Tucker R. W.,* An introduction to Spinors and Geometry with Applications in Physics // Publishing Ltd, (1987).

GENERALIZATION OF PAULI'S THEOREM ON THE CASE OF CLIFFORD ALGEBRAS

D.S. Shirokov

Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow

shirokov@mi.ras.ru

Received 09.09.2012

In our work we prove statements that generalize fundamental Pauli's theorem about gamma-matrices. We consider real and complex Clifford algebras of arbitrary dimension. We prove generalizations of Pauli's theorem for two arbitrary sets of Clifford algebra elements that satisfy the main anticommutative conditions. We present algorithm for computing elements that connect these two sets.