

# ОДНОМЕРНЫЕ ТЕКСТУРЫ БИАКСИАЛЬНЫХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛОВ

В.Л. Голо<sup>1</sup>, Е.И. Кац<sup>2</sup>, Д.О. Синицын<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Механико-математический факультет Московский Государственный Университет  
им. М.В. Ломоносова, Москва, Россия*

*National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia*

<sup>2</sup> *Институт теоретической физики им. Л.Д.Ландау, Москва, Россия*

<sup>3</sup> *Институт химической физики им. Н.Н. Семенова РАН, Москва, Россия*

voislav.golo@gmail.com, kats@ill.fr

Поступила 28.04.2014

Показано, что уравнения одномерных текстур биаксиальных нематиков соответствуют структуре группы  $SL(3;R)$  вещественных  $3 \times 3$  матриц с определителем  $+1$ . Вводится вектор кривизны текстуры,  $\vec{\Omega}$ , который задаётся вещественной кососимметрической  $3 \times 3$  матрицей, соответствующей бесконечно малому повороту параметра порядка при движении вдоль оси текстуры. Полученное наглядное описание текстуры удобно при анализе результатов численного моделирования. Последние указывают на наличие многопериодичности конформаций текстур биаксиальных нематиков. Полученные результаты могут быть применены для анализа оптических явлений в биаксиальных нематиках.

УДК 539.2

## 1. Параметр порядка

Концепция параметра порядка является основной в теории фазовых переходов. Примечательно, что последние были поняты как физические явления сравнительно недавно, в середине XIX века, хотя переход вода-лёд известен с древнейших времён. Решающую роль в этом отношении сыграли успешные эксперименты по ожижению газов Jean-François-Collet и Gaspard Monge. Мощным стимулом для теоретического осмысления явления фазового перехода послужили работы Pierre Curie по ферромагнетикам. Именно в этих работах появляется величина, играющая роль параметра

порядка, намагниченность. Wilhelm Lenz и Ernst Ising предложили теоретическую модель, позволившая на качественном уровне исследовать фазовый переход в магнетиках, получившую название модели Изинга. Дальнейшее развитие теории фазовых переходов связано тесно с теорией сверхтекучести и сверхпроводимости. Именно при построении последней появляется параметр порядка Гинзбурга-Ландау, комплексно значащая функция  $\psi(\vec{r})$ , [1]. В дальнейшем в теории сверхтекучих жидкостей в состоянии  $p$ -спаривания появляются матричные параметры порядка с усложнённой симметрией структуры. Можно сказать, что параметр порядка выступает здесь как термодинамическое описание внутренней структуры среды.

Жидкие кристаллы естественным образом вписываются в эту картину. Их можно представить себе как анизотропную жидкую среду, [2], имеющую внутренние степени свободы, порождённые геометрией составляющих молекул. По этой причине для их термодинамического описания необходимы параметры с достаточно сложной структурой. В простейшем случае нематического жидкого кристалла параметр порядка задаётся симметричным тензором второго ранга. Этот тензор может быть выражен через компоненты вектора единичной длины, директора, который описывает ориентационное упорядочивание в системе, т.е. указывает среднее направление молекул. Все известные нематические жидкие кристаллы не полярны, поэтому имеется симметрия по отношению к изменению знака директора (и именно поэтому, параметр порядка должен быть определен именно как тензор второго ранга, то есть квадратичная комбинация компонент директора).

В большинстве известных нематических жидких кристаллов, молекулы имеют удлиненную (стержнеобразную) форму, т.е. характерный поперечный размер  $L_{\perp}$  много больше продольного  $L_{\parallel}$

$$L_{\perp} \ll L_{\parallel}.$$

Нематической фазе соответствует согласованная ориентация молекул (в одну сторону), т.е. имеет место

$$L_{\perp} \approx L_{\parallel},$$

но которые образуют в определённых условиях анизотропные жидкие фазы с оптической симметрией двухосных кристаллов (следовательно, параметр порядка не может быть описан одним директором). Такие фазы принято называть двухосными (или биаксиальными) нематиками. Если обыкновенные, или одноосные нематики, можно представлять себе как ансамбли палочек, то биаксиальные как ансамбли досок или кирпичей.

Для теоретического анализа существенен правильный выбор аналитического представления параметра порядка. В простейшем случае одноосного нематика можно с этой целью взять единичный вектор  $\vec{n}(\vec{r})$ , задающий локальную пространственную ориентацию молекул. В случае биаксиального нематика описание ориентации с помощью локального репера из трех директоров  $\vec{n}_i(\vec{r})$ ,  $i = 1, 2, 3$ , подкупает своей внешней простотой, но в действительности не практично. Предпочтительнее пользоваться матричной формой параметра порядка. Этот подход восходит к de Gennes'у, [3], предложившему задавать параметр порядка одно-аксиального нематика в матричном виде

$$A_{ij} = \Delta(n_i n_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где  $n_i$  - вектор директора. Выделенное направление соответствует вектору директора. В случае биаксиального нематика можно применить описание параметра порядка, основанное на той же самой идее.

С этой целью удобно связать пространственную ориентацию жидкости с главными осями некоторой симметрической вещественной  $3 \times 3$  матрицы  $A$ , со следом нуль  $Tr(A) = 0$ . Последнее продиктовано соображениями математической целесообразности. Для дальнейшего существенно, что такая матрица может быть представлена в виде

$$A = R^{-1}A_0R, \quad (1)$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & -(\lambda_1 + \lambda_2) \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Таким образом, в выбранном представлении (1) для параметра порядка локальная ориентация жидкости описывается матрицей поворота  $R(\vec{r})$ , зависящей от точки пространства.

Согласно общепринятой сейчас теории параметр порядка является одним из аргументов свободной энергии  $\mathcal{F}$  системы, и состояние жидкокристаллической фазы соответствует минимуму  $\mathcal{F}$ . При этом следует иметь в виду, что даже в состоянии равновесия могут иметь место пространственные неоднородности, вызванные, например, граничными условиями на стенках сосуда. По этой причине необходимо учитывать зависимость свободной энергии жидкости,  $\mathcal{F}$ , также и от градиентов параметра порядка, т.е. свободная энергия имеет вид

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_\nabla, \quad \mathcal{F}_\nabla = \int F_\nabla d^3x,$$

где плотность  $F_\nabla$  градиентной части свободной энергии имеет вид

$$F_\nabla = K_1 \partial_i A_{ki} \partial_j A_{kj} + K_2 \partial_i A_{kj} \partial_i A_{kj} + K_3 \partial_i A_{kj} \partial_j A_{ki}. \quad (3)$$

Эта энергия записана в гармоническом (квадратичном по параметру порядка и по градиентам) приближении. В общем случае число феноменологических коэффициентов упругости больше трех констант  $K_1, K_2, K_3$  (из которых с точностью до полной производной, то есть поверхностных членов, только две являются независимыми) фигурирующих в вышеприведенной градиентной энергии.

Наш анализ основывается на матричной форме параметра порядка (1). Таким образом мы должны исследовать поведение матричной функции  $R(\vec{r})$ . С этой целью желая получить инфинитезимальное описание текстуры рассмотрим бесконечно малые повороты  $\delta R$ , заданные кососимметрическими матрицами, которые соответствуют переходам из данной точки пространства в близкие точки. Матрицы  $\delta R$  образуют алгебру Ли  $\mathcal{L}S(3)$  группы  $SO(3)$ . Вспомним, что значения параметра порядка — вещественные симметричные  $3 \times 3$  со следом 0. Совместно с  $\mathcal{L}SO(3)$  они образуют алгебру Ли группы  $\mathcal{L}SL(3, R)$  группы  $SL(3, R)$  вещественных матриц с определителем 1, т.е.  $3 \times 3$  матрицы со следом 0, поскольку любая матрица представима как сумма симметрической и кососимметрической. Стоит также отметить вещественных симметричных  $3 \times 3$  со следом 0 является пространством неприводимого представления  $SO(3)$  с весом  $l = 2$ . Эти простые алгебраические соображения являются основой для дальнейшего анализа.

Введём кривизну текстуры, описывающую изменение параметра порядка при перемещении по пространству

$$\Omega = R^{-1} \cdot \dot{R}. \quad (4)$$

Отметим, что приведённая конструкция по сути дела повторяет построение формул Френе в дифференциальной геометрии откуда и её название. Для дальнейшего нам понадобятся простые сведения о бесконечно малых поворотах, или, выражаясь более учёным языком, алгебре Ли группы трёхмерных вращений. Вспомним, что бесконечно малые повороты порождены матрицами  $f^k$ ,  $k = 1, 2, 3$ ,

$$(f^k)_{ij} = -\epsilon_{kij}. \quad (5)$$

Их коммутаторы равны

$$[f^i, f^j] = \sum_{k=1}^3 \epsilon_{kij} f^k. \quad (6)$$

Имеет место формула скалярного произведения (метрики в алгебре Ли)

$$\frac{1}{2} \text{Tr}(f^i \cdot f^j) = -\delta_{ij}. \quad (7)$$

Бесконечно малый поворот соответствует вектору согласно формуле

$$\delta\omega_k = -\frac{1}{2} \text{Tr}(\delta R \cdot f^k).$$

И аналогично по вектору кривизны можно восстановить матрицу кривизны

$$\Omega = \sum_{k=1}^3 \omega_k f^k.$$

Совокупность всех вещественных  $3 \times 3$  матриц со следом 0  $\mathcal{LSL}(3, R)$  замкнута относительно операции коммутирования

$$[A, B] = C$$

и образует алгебру Ли, в которой  $\mathcal{LSO}(3)$  образует подалгебру, что можно выразить в символической форме

$$\mathcal{LSL}(3, R) = \mathcal{LSO}(3, R) \oplus \mathcal{A}, \quad (8)$$

где  $\mathcal{A}$  пространство симметрических матриц со следом 0. Таким образом имеем условие на коммутаторы

$$[X, Y] = Z; \quad \begin{cases} X & \text{принадлежит } \mathcal{LSO}(3), \\ Y & \text{принадлежит } \mathcal{A}, \\ Z & \text{принадлежит } \mathcal{A}. \end{cases}$$

Приведённые условия оставляют ограниченный выбор для написания уравнений минимизации свободной энергии для биаксиальных нематиков. Эти уравнения должны основываться на структуре алгебры Ли  $\mathcal{LSL}(3, R)$  заданной уравнениями (8). Таким образом они должны иметь вид

$$\frac{d}{dz} L + [L, \Omega] + [A, B] = 0; \quad \frac{d}{dz} A = [A, \Omega], \quad (9)$$

где  $A$  и  $B$  принадлежат  $\mathcal{A}$ . Стоит отметить, что уравнения (9) имеют ту же форму, что и уравнения Пуассона для движения твёрдого тела. Последние базируются на группе движений трёхмерного евклидова пространства  $E(3)$  и её алгебре Ли  $\mathcal{LE}(3)$ , для которой имеет место разложение аналогичное заданному

$$\mathcal{LE}(3) = \mathcal{LSO}(3) \oplus \mathcal{LT}.$$

## 2. Вариационный принцип для 1D-текстур

Воспользуемся для окончательного вывода уравнения текстуры вариационным принципом, согласно которому равновесная конфигурация соответствует минимуму свободной энергии (11). Будем пользоваться обозначением

$$\frac{d}{dz}f = \dot{f}.$$

Получаем следующее выражение для плотности свободной энергии

$$\mathcal{F}_\nabla = \int F_\nabla dz, \quad F_\nabla = K_2 Tr(\dot{A} \cdot \dot{A}) + (K_1 + K_3) (\dot{A} \cdot \dot{A})_{33}. \quad (10)$$

Мы должны минимизировать  $\mathcal{F}_\nabla$  при том условии, что матрица параметра порядка имеет фиксированные собственные значения. Воспользуемся кривизной текстуры, выраженной в векторной форме,

$$\omega_k = -\frac{1}{2} Tr(\Omega \cdot f_k).$$

Условия связи, наложенные на параметр порядка будут удовлетворены, если будем варьировать параметр порядка  $A$ , варьируя матрицу поворота  $R$

$$\delta R = R \cdot \delta S,$$

где  $\delta S$  — матрица бесконечно малого поворота. Откуда получаем формулу для вариации параметра порядка, учитывающую наложенные связи,

$$\delta A = [A, \delta S]$$

и вариацию кривизны текстуры

$$\delta \Omega = \frac{d}{dz} \delta S - [\delta S, \Omega]$$

в виде ковариантной производной. Или в векторных обозначениях

$$\delta \vec{\omega} = \frac{d}{dz} \delta \vec{s} + \vec{\omega} \times \delta \vec{s},$$

где

$$\delta S = \sum_{k=1}^3 \delta s_k f^k.$$

Воспользовавшись приведёнными выше формулами для вариаций получаем уравнения минимизации в виде уравнений (9).

Плотность градиентной энергии  $F_\nabla$  для одномерного случая имеет вид

$$F_\nabla = k_1 Tr(\partial_z A \cdot \partial_z A) + k_2 (\partial_z A \cdot \partial_z A)_{33}, \quad (11)$$

где  $z = x_3$  и  $\partial_z$  — производная по  $z$ , а также введены обозначения для констант:  $k_1 = K_2$ ,  $k_2 = K_1 + K_3$ . Граничные условия, значения параметра порядка на пластинках, рассматриваемых как параллельные,  $A(z=0) = A(z=Z)$ . Последнее условие (параллельности граничных условий), разумеется совсем не обязательно, и задача решается при произвольных граничных условиях. Чисто технически, однако,

удобнее решать задачу Коши, когда на одной границе заданы значения параметра порядка и его первой производной. Мы всегда можем свести задачу Коши к задаче с граничными условиями для параметра порядка на двух границах, подобрав подходящим образом толщину пленки жидкого кристалла.

Для минимизации свободной энергии мы воспользуемся уравнениями Лагранжа первого рода, задав связи, наложенные на параметр порядка, в виде

$$\text{Tr}(A) = 0, \quad \text{Tr}(A^2) = c_1, \quad \text{Tr}(A^3) = c_2, \quad (12)$$

где  $c_1, c_2$  — константы, определяющие собственные значения матрицы параметра порядка. Минимум находим, решая уравнения Эйлера–Лагранжа для эффективного Лагранжиана

$$\mathcal{L} = F_{\nabla} - \lambda_1 \text{Tr}(A) - \lambda_2 \text{Tr}(A^2) - \lambda_3 \text{Tr}(A^3). \quad (13)$$

Следует иметь в виду, что при этом мы находим, вообще говоря, экстремали, которые не обязательно доставляют минимум рассматриваемой задачи. Поиски минимума требуют дополнительного исследования.

Численное моделирование текстур (см. также нашу недавнюю работу [7]) проводилось путем численного решения задачи Коши для уравнений Лагранжа первого рода, соответствующих лагранжиану (13), с различными начальными значениями матрицы параметра порядка и ее производной по  $z$  (называемой далее скоростью), удовлетворяющими условиям связей (12).

Тривиальная организация ориентационного параметра порядка возникает в случае нулевой начальной скорости, при которой параметр порядка постоянен (при любых значениях  $k_1, k_2$ ), а структура однородна. Соответственно, в этом случае все двухосные молекулы (которые могут быть представлены в виде одинаковых кирпичей) имеют одинаковую ориентацию.

Уравнения Лагранжа для параметра порядка (при любых значениях  $k_1, k_2$ ) имеют частное решение вида:

$$\hat{A}(z) = \hat{R}_3^{-1}(\omega z) \hat{A}(0) \hat{R}_3(\omega z), \quad (14)$$

где  $\hat{R}_3(\omega z)$  — матрица трехмерного вращения вокруг оси  $Z$  на угол  $\omega z$ , а  $\hat{A}(0)$  дается формулой (2). Угловая скорость для этого решения не зависит от  $z$ :

$$\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega).$$

Собственные векторы матрицы  $\hat{A}(z)$  для этого решения имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{l} &= (-\cos \omega z, \sin \omega z, 0), \\ \mathbf{m} &= (\sin \omega z, \cos \omega z, 0), \\ \mathbf{n} &= (0, 0, 1). \end{aligned}$$

Таким образом, от слоя к слою направления осей молекул совершают равномерное вращение в плоскости  $XY$  с угловой скоростью  $\omega$ . Расположение молекул, соответствующее этому решению, показано на рис. 1, А. Эта фаза имеет некоторые сходства с *холестерической* структурой, а именно то, что эволюция ориентации молекул от слоя к слою состоит в вращении вокруг оси  $Z$  с угловой скоростью  $\omega$ . Период этой структуры по  $Z$  имеет значение  $T = \pi/\omega$  ( $\pi$ , а не  $2\pi$ , потому что для неполярных двухосных нематиков  $\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{m}$  и  $\mathbf{l}$  физически эквивалентны  $-\mathbf{n}$ ,  $-\mathbf{m}$  и  $-\mathbf{l}$  соответственно, таким образом, поворот на  $\pi$  радиан преобразует матрицу параметра порядка в себя). Это сходство является естественным следствием тесной связи между хиральностью

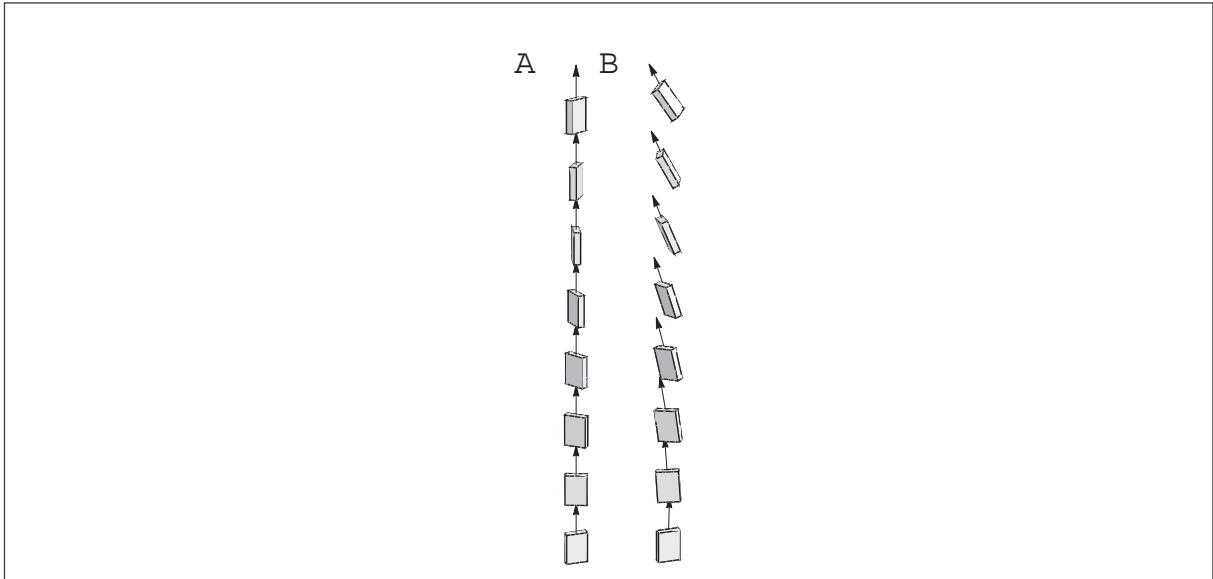


Рис. 1: Пространственная организация молекул. А: геликоидальная фаза,  $\omega(0) = (0, 0, 1)$ , В: квазипериодическая фаза,  $\omega(0) = (\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, 1)$ . Стрелками показаны векторы угловой скорости. Другие параметры на обоих рисунках имеют значения:  $k_1 = 1, k_2 = \frac{1}{2}, \lambda_1 = 7, \lambda_2 = 3$ .

(нарушением зеркальной симметрии) и двуосностью (т.е. наличием дополнительного к одноосному директору  $\mathbf{n}$  упорядочения в перпендикулярной к  $\mathbf{n}$  плоскости). В нашем случае хиральность производится извне с помощью граничных условий, а двуосность является внутренним свойством жидко-кристаллического материала (поэтому может быть сколь угодно большой). В обычных холестериках хиральность — это свойство материала, в то время как двуосность является геометрическим следствием простой спирально закрученной структуры и, как правило, очень мала.

Когда направление начальной угловой скорости отличается от оси  $Z$ , возникает более сложное решение. Организация молекул этого типа показана на рис. 1, В. Видно, что в отличие от случая геликоидальной фазы в данной ситуации угловая скорость меняется от слоя к слою, и длинные оси молекул не параллельны.

Следует заметить, что для нахождения распределений параметра порядка, минимизирующих функционал свободной энергии, необходим дополнительный анализ экстремалей, в частности исследование второй вариации этого функционала. Данная процедура в типичном случае сводится к выделению участка экстремали до первой сопряженной точки [6]. Тем не менее, в дальнейшем анализе мы рассматриваем достаточно длинные участки экстремалей, которые могут содержать сопряженные точки, так как основная цель этого анализа — охарактеризовать уравнения экстремалей как динамическую систему. При переносе найденных на этом пути закономерностей на свойства текстур необходимо учитывать ограничения на длину траекторий, связанные с сопряженными точками.

Для более подробного изучения квазипериодической текстуры мы изображаем траектории собственных векторов  $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}$  матрицы параметра порядка  $\hat{A}$ , соответствующие направлениям осей молекул, см. рис. 2. Наблюдается сложная динамическая картина, в которой вращение молекул вокруг длинной оси сочетается с прецессией этой оси (ей соответствует собственный вектор  $\mathbf{n}$ , траектория которого показана на



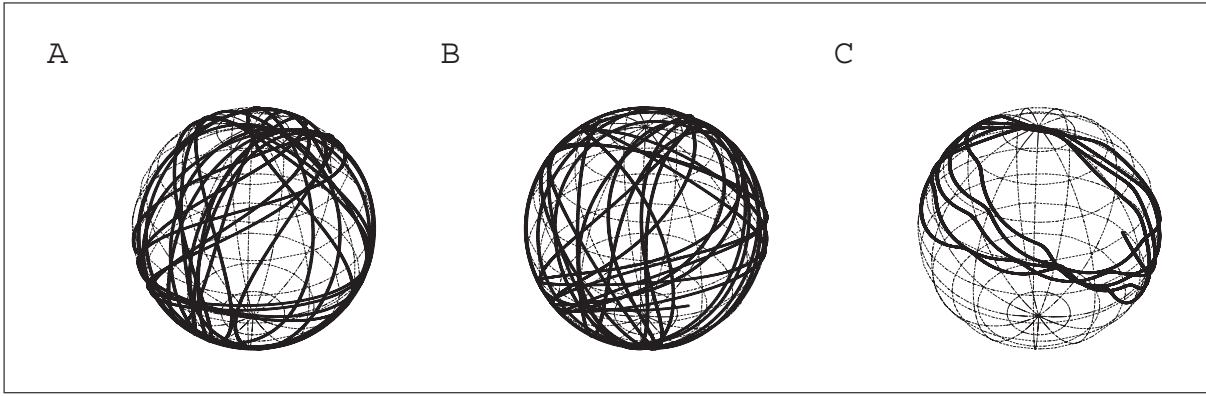


Рис. 2: А,В,С: траектории собственных векторов  $\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{m}$ ,  $\mathbf{n}$  (соответственно) матрицы параметра порядка для квазипериодической фазы. Параметры имеют значения:  $\boldsymbol{\omega}(0) = (\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, 1)$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda_1 = 7$ ,  $\lambda_2 = 3$ .

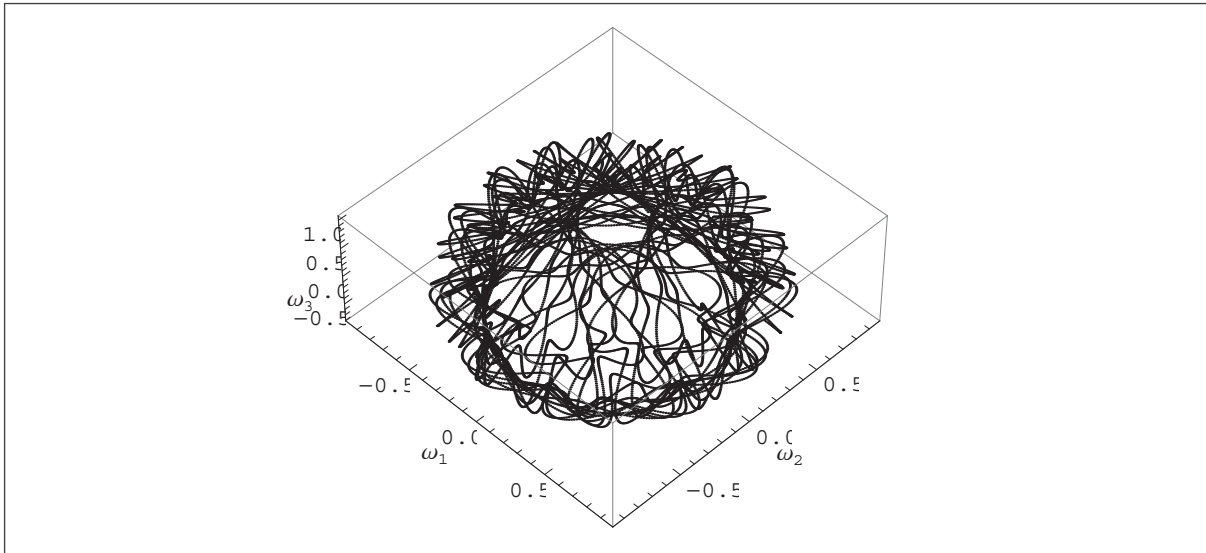


Рис. 3: Траектория вектора угловой скорости для квазипериодической фазы. Параметры имеют значения:  $\boldsymbol{\omega}(0) = (\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, 1)$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda_1 = 7$ ,  $\lambda_2 = 3$ .

рис. 2, С). Таким образом, в отличие от геликоидальной фазы, эта текстура имеет более чем одну характерную частоту, демонстрируя квазипериодическую структуру.

Чтобы проследить за изменением ориентационного порядка вдоль оси  $Z$ , мы также исследуем эволюцию вектора угловой скорости для квазипериодического решения. Его траектория показана на рис. 3. В изображенном конкретном случае траектория имеет форму достаточно сложной пространственной кривой.

Характерные частоты (по  $Z$ ) паттернов ориентации молекул могут указывать длины волн света, соответствующие специальным оптическим свойствам этих структур. Таким образом, важно изучить спектральные характеристики решений. В качестве характерной величины рассмотрим  $X$ -компоненту  $\omega_x$  угловой скорости. Рис. 4 показывает эту функцию и ее (дискретное) преобразование Фурье. Видно, что количество значимых коэффициентов более одного. Это подтверждает, что текстура имеет более одной характерной частоты и имеет квазипериодическую природу.



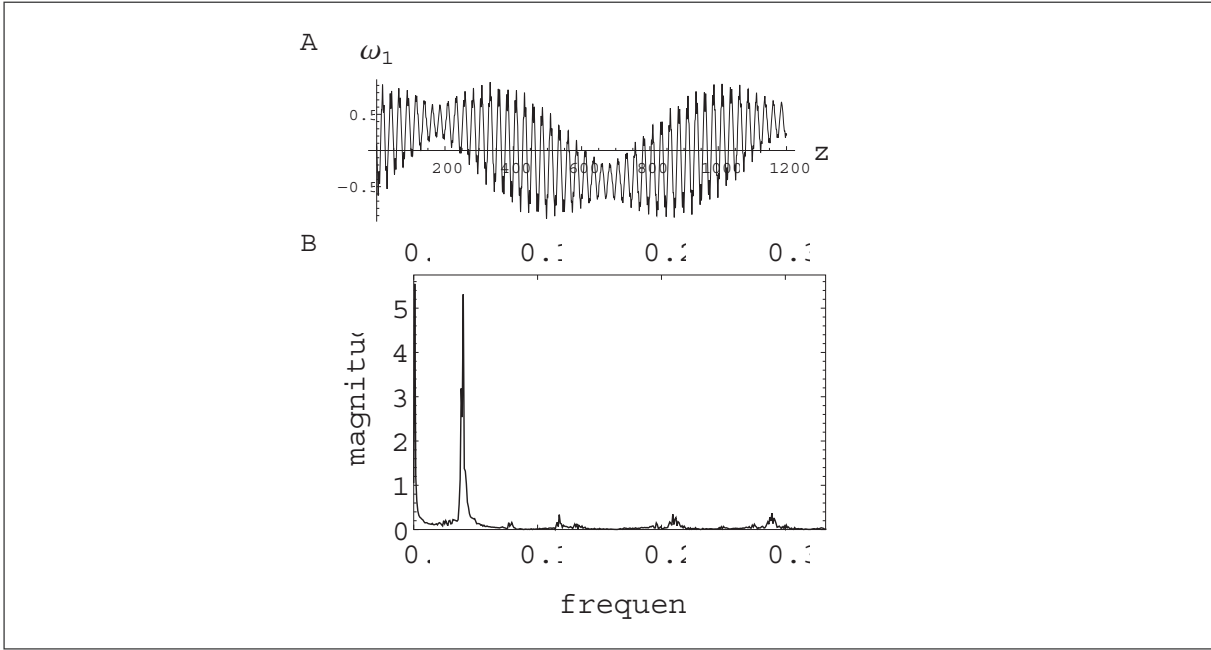


Рис. 4: А: первая компонента угловой скорости  $\omega_1$  как функция  $z$  в квазипериодической фазе; В: дискретное преобразование Фурье, примененное к последовательности значений этой функции на интервале  $z = 0..1200$  с шагом 1.5. Параметры имеют значения:  $\omega(0) = (\frac{1}{12}, \frac{1}{6}, 1)$ ,  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda_1 = 7$ ,  $\lambda_2 = 3$ .

Общая структура множества характерных частот и их зависимость от параметров системы требует дальнейшего изучения. Одна из ситуаций, в которых могут появиться условно-периодические решения, - это случай интегрируемых или близких к интегрируемым уравнений Лагранжа. Таким образом, природа характерных частот в этой системе может быть уточнена с помощью дальнейшего анализа ее динамических свойств, в том числе первых интегралов и возможных редукций по размерности.

### 3. Выводы

Методика, применённая в настоящей работе, позволяет усмотреть аналогию аналитического строения  $1D$ -структуры биаксиальных нематиков и классической теории волчков, [8]. В рассматриваемом нами случае речь идёт о  $SL(3, R)$  волчке, насколько нам известно ранее не изучавшийся в математической физике. Следует отметить, что речь идёт о некомпактной группе Ли, что напоминает случай волчка в геометрии Лобачевского, рассмотренный в своё время Klein'м, [8].

Можно сказать, что нами был найден один из вариантов аналогии Kirhhoff'a: роль упругой эластики играет  $1D$ -текстура, в качестве “упругого тела” — аналог системы уравнений Эйлера на группе  $SL(3, R)$ . Эта аналогия может быть полезна для анализа возможных конформаций текстур рассматриваемого вида. Например она сразу же подсказывает наличие условно периодических решений, которые, по видимому, могут быть полезны для анализа экспериментальных данных, в частности оптических эффектов.

В.Л.Г. благодарит Программу Прогресса Фундаментальных Исследований Высшей Школы Экономики за финансовую поддержку. Участие Е.И.К. в работе поддержано грантом РФФИ 13-02-00120.

**Литература**

1. *Landau L.D., Lifshitz E.M.* Statistical Physics, Volume 5 of Course of Theoretical Physics, Part 1 // Pergamon, Oxford, 1980.
2. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика, том VII, Теория Упругости, Гл. VI // Наука, Москва, 1987.
3. *de Gennes P.G., Prost J.* The Physics of Liquid Crystals // Clarendon Press, Oxford 1993.
4. *Chandrasekhar J.* Liquid Crystals // Cambridge University Press, London, 1992.
5. *Пикин С.А.* Структурные превращения в жидких кристаллах // Наука, Москва, 1981.
6. *Гельфанд И.М., Фомин С.В.* Вариационное исчисление // Физматлит, 1961.
7. *Golo V.L., Kats E.I., Severyuk A.A., Sinitsyn D.O.* Twisted quasiperiodic textures of biaxial nematic liquid crystals // Phys. Rev. E, 88, 042504-1 042504-7 (2013).
8. *Klein F., Sommerfeld A.* Über der Theorie des Kreisels // Teubner, Leipzig, 1910.

## ONE DIMENSIONAL TEXTURES OF BIAxIAL LIQUID CRYSTALS

V.L. Golo<sup>1</sup>, E.I. Kats<sup>2</sup>, D.O. Sinitsyn<sup>3</sup>

<sup>1</sup> *Department of Mechanics and Mathematics The Lomonosov Moscow State University  
Moscow, Russia*

*National Research University Higher School of Economics Moscow, Russia*

<sup>2</sup> *The Landau Institute for Theoretical Physics, Moscow, Russia*

<sup>3</sup> *The Semenov Institute for Chemical Physics, Moscow, Russia*

voislav.golo@gmail.com, kats@ill.fr

Received 28.04.2014

We have derived the equations for 1D textures of biaxial nematics and showed that they are based on the structure of the group  $SL(3;R)$  of real  $3 \times 3$  matrices of determinant +1. To describe the conformations of the above textures we introduce the curvature vector  $\Omega$  that corresponds to a skew-symmetric matrix describing infinitesimal rotations of the order parameter while moving along the axis of the texture. The construction is helpful for the analysis of data provided by the numerical modelling. Thus we have obtained the conditional periodic textures of the biaxial nematics. Our results may be applied for studying the optical phenomena in the biaxial nematics.