

КВАЗИКЛАССИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ХАРТРИ ВБЛИЗИ ВЕРХНИХ ГРАНИЦ СПЕКТРАЛЬНЫХ КЛАСТЕРОВ. АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ, СОСРЕДОТОЧЕННЫЕ ВБЛИЗИ ОКРУЖНОСТИ

А.В. Перескоков

НИУ МЭИ, МИЭМ НИУ ВШЭ

pereskokov62@mail.ru

Поступила 05.08.2014

Рассматривается задача на собственные значения для оператора Хартри с кулоновским взаимодействием, который содержит малый параметр перед нелинейностью. Найдены асимптотические собственные значения и асимптотические собственные функции вблизи верхних границ спектральных кластеров. Вблизи окружности, где сосредоточено решение, главный член разложения является решением задачи о двумерном осцилляторе. Ключевые слова: самосогласованное поле, двумерный осциллятор, спектральный кластер, асимптотические собственные значения и собственные функции, логарифмическая особенность.

УДК 517.958 + УДК 517.928

1 Введение

Рассмотрим задачу на собственные значения для нелинейного оператора Хартри с кулоновским взаимодействием в $L^2(\mathbb{R}^3)$

$$\left(-\Delta_q - \frac{1}{|q|} + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|\psi(q')|^2}{|q - q'|} dq'\right)\psi = \lambda\psi, \quad (1)$$

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1, \quad (2)$$

где Δ_q — оператор Лапласа, $\varepsilon > 0$ — малый параметр.

Уравнение самосогласованного поля во внешнем поле, содержащее интегральную нелинейность типа Хартри, играет фундаментальную роль в квантовой теории и нелинейной оптике. В частности, такие уравнения возникают в теории полярона, который можно рассматривать как простейший пример частицы, взаимодействующей

с квантовым полем [1,2], в теории конденсата Бозе–Эйнштейна [3], при нахождении электронных орбиталей в многоэлектронных атомах [4], а также при рассмотрении сред с пространственной дисперсией [5].

Хорошо известно [6], что при $\varepsilon = 0$ собственные значения $\lambda = \lambda_n(\varepsilon)$ задачи (1), (2) равны

$$\lambda_n(0) = -\frac{1}{4n^2}.$$

Здесь $n = 1, 2, \dots$ — главное квантовое число. Для задачи (1), (2) имеются теоремы существования, в частности, для нижней точки спектра, отвечающему основному состоянию [7, 8]. В работе [9] при $n = 2$ доказано существование состояний, не обладающих сферической симметрией, а также найдено пять ветвей собственных значений, выходящих из невозмущенной точки спектра.

В данной работе будет рассмотрен случай, когда квантовое число n , задающее невозмущенное собственное значение, велико (для определенности будем считать, что λ имеет порядок ε). Вопрос о существовании состояний, отличных от основного, является исходным при исследовании процессов, связанных с возбуждением электронов в поляронных средах [10]. В настоящее время, помимо чисто теоретического интереса, проблема возбужденных поляронных состояний приобретает интерес в связи с проблемой электронного переноса возбуждений в самых различных конденсированных средах. В частности, проблема электронного переноса на большие расстояния является одной из центральных в молекулярной биологии при описании коллективных возбуждений в молекулярных цепочках и в молекулах ДНК [11].

Пусть $p = n - m - 1$, где m — магнитное квантовое число. В данной работе для каждого $p = 0, 1, 2, \dots$ будут найдены асимптотические собственные значения

$$\lambda_{n,i}^{(p)}(\varepsilon) = -\frac{1}{4n^2} + \varepsilon \left(\frac{\ln n}{4\pi n^2} + \frac{E_{1,i}^{(p)}}{n^2} \right) + O\left(\frac{\varepsilon \ln n}{n^{5/2}}\right), \quad n \rightarrow \infty, \quad (3)$$

где $i = 0, \dots, I_p$, которые расположены вблизи верхних границ спектральных кластеров, образующихся вокруг уровней энергии невозмущенного оператора (при $\varepsilon = 0$). В частности, при $p = 0, 1, 2$ числа $E_{1,i}^{(p)}$ представимы в виде

$$E_{1,i}^{(p)} = \frac{1}{4\pi} \left(5 \ln 2 + \gamma - \frac{\sigma_i^{(p)}}{128} \right). \quad (4)$$

Здесь $\gamma \approx 0.57$ — постоянная Эйлера. При $p = 0$ существует одно значение

$$\sigma_0^{(0)} = 0, \quad (5)$$

при $p = 1$ — два значения

$$\sigma_0^{(1)} = 80, \quad \sigma_1^{(1)} = 96, \quad (6)$$

при $p = 2$ — шесть значений

$$\begin{aligned} \sigma_0^{(2)} &= 123 + \frac{19}{39}, \quad \sigma_1^{(2)} = 142, \quad \sigma_2^{(2)} = 144, \\ \sigma_3^{(2)} &= 145 - \frac{1}{33}, \quad \sigma_4^{(2)} = 145 - \frac{1}{81}, \quad \sigma_5^{(2)} = 147 + \frac{5}{9}. \end{aligned}$$

Соответствующие (3) асимптотические собственные функции локализованы вблизи окружности Γ в \mathbb{R}^3 , на которой кулоновское ядро самодействия в (1) имеет логарифмическую особенность. Поэтому поправка в формуле (3) содержит $\ln n$, а числа $\lambda_{n,i}^{(p)}(\varepsilon)$ расположены вблизи верхних границ кластеров. Отметим, что на нижней границе кластера

$$\lambda_n(\varepsilon) \sim -\frac{1}{4n^2} + \frac{\varepsilon E_{min}}{n^2}, \quad n \rightarrow \infty,$$

где число E_{min} удовлетворяет неравенству

$$E_{min} \leq \frac{1}{2\pi^3} \int_0^\pi \int_0^\pi K \left(\frac{\sqrt{\sin \theta \sin \theta'}}{\sin((\theta + \theta')/2)} \right) \frac{d\theta' d\theta}{\sin((\theta + \theta')/2)}.$$

Здесь $K(\kappa)$ — полный эллиптический интеграл 1 рода [12].

Асимптотическим решениям уравнений типа Хартри, локализованным вблизи маломерных инвариантных подмногообразий в фазовом пространстве, посвящено большое число работ (см., например, [13–19]). В данной работе главный член асимптотического разложения вблизи окружности, где локализовано решение, оказывается решением другой классической задачи квантовой механики — задачи о двумерном осцилляторе:

$$\mathbf{L}g_{0,i}^{(p)}(\tau, s) = 0, \quad \|g_{0,i}^{(p)}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1. \quad (7)$$

Здесь оператор

$$\mathbf{L} = -\frac{\partial^2}{\partial s^2} - \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + [s^2 + \tau^2 - 2(p + 1)]. \quad (8)$$

В результате, функция $g_{0,i}^{(p)}$ представима в виде линейной комбинации базисных собственных функций задачи (7), отвечающих собственному значению $p + 1$. Коэффициенты этого разложения находятся из системы нелинейных уравнений одновременно с нахождением чисел $E_{1,i}^{(p)}$. Отметим, что данная система выводится из условий разрешимости уравнений для следующих приближений.

Аналогичная (1), (2) задача на собственные значения в $L^2(\mathbb{R}^2)$ для возмущенного двумерного резонансного осциллятора, возбуждающий потенциал которого задается интегральной нелинейностью типа Хартри с гладким потенциалом самодействия, рассматривалась ранее в [20,21]. Она имеет вид

$$(\mathbf{H}_0 + \hbar^2 \int_{\mathbb{R}^2} W(|q - q'|^2) |\psi(q')|^2 dq')\psi = \lambda\psi,$$

$$\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} = 1,$$

где

$$\mathbf{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} \right) + \frac{q_1^2 + q_2^2}{2}$$

— двумерный осциллятор, $\hbar > 0$ — малый параметр, $W(x) = w_0 + w_1x + w_2x^2$ — произвольный многочлен 2 степени с вещественными коэффициентами, причем $w_2 > 0$. В работах [20,21] были найдены асимптотические собственные значения и асимптотические собственные функции вблизи верхних границ спектральных кластеров,

которые образуются вокруг собственных значений $\hbar(\ell + 1)$ невозмущенного оператора \mathbf{H}_0 . Если ℓ имеет порядок \hbar^{-1} , то асимптотические собственные значения имеют вид

$$\lambda = \lambda_{k,\ell} = \ell\hbar + \hbar + (w_0 + 2\ell\hbar w_1 + 9\ell^2\hbar^2 w_2)\hbar^2 + (2w_1 + 2\ell\hbar w_2(9 - 2\sqrt{6}(k + 1/2)))\hbar^3 + O(\hbar^{7/2}), \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad \hbar \rightarrow 0. \quad (9)$$

Если сравнить эту серию с (3), то она не содержит логарифмических поправок, а расщепление спектра в (9) происходит в следующем приближении.

Метод построения квазиклассических асимптотик в гладком случае основан на алгебраическом усреднении возмущения, последующем переходе на алгебру симметрий и когерентном преобразовании от исходного представления этой алгебры к ее неприводимому представлению в пространстве функций над лагранжевым подмногообразием в симплектическом листе [22]. Кроме того, при построении асимптотики вблизи верхних границ спектральных кластеров используется новое интегральное представление для решения.

План дальнейшего изложения следующий. В разделе 2 найдена асимптотика собственных функций невозмущенной задачи. В разделе 3 построены асимптотические решения спектральной задачи для уравнения Хартри. В разделах 4, 5, 6 приведены примеры решения спектральной задачи на подпространствах \mathcal{H}_p . Они состоят из собственных функций двумерного осциллятора, отвечающих собственному значению $p + 1$. В 4 разделе рассмотрены случаи, когда $p = 0, 1$, а в 5 и 6 разделах — случай $p = 2$. Отметим, что в 5 разделе ищутся вещественные, а в 6 разделе — комплексные решения задачи. Наконец, дополнение к статье содержит доказательство теоремы из раздела 2.

2 Асимптотика собственных функций невозмущенной задачи

Пользуясь растяжением $q = x/\varepsilon$, $\psi = \varepsilon^{3/2}v$, $\lambda = \varepsilon E$, приведем задачу (1), (2) к стандартному для теории квазиклассических приближений виду

$$\left(-\varepsilon\Delta_x - \frac{1}{|x|} + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \frac{|v(x')|^2}{|x-x'|} dx' \right) v(x) = Ev(x), \quad (10)$$

$$\|v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1. \quad (11)$$

При построении асимптотических решений (10), (11) нам потребуется асимптотика собственных функций невозмущенной задачи

$$\left(-\varepsilon\Delta_x - \frac{1}{|x|} \right) v(x) = Ev(x), \quad \|v\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1.$$

Дискретным собственным значениям

$$E_n = -\frac{1}{4\varepsilon n^2}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

в сферических координатах (r, θ, φ) , где

$$0 \leq r \leq \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi,$$

отвечают собственные функции [6]

$$v_{n,k,n_r} = Y_{\ell m}(\theta, \varphi) R_{n\ell}(r). \quad (12)$$

Здесь ℓ, n_r — орбитальное и радиальное квантовые числа, $n = \ell + 1 + n_r$, $k = \ell - m$,

$$Y_{\ell m}(\theta, \varphi) = \sqrt{\frac{(2\ell + 1)(\ell - |m|)!}{4\pi(\ell + |m|)!}} P_{\ell}^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (13)$$

$$R_{n\ell}(r) = \frac{1}{(2\varepsilon n)^{3/2}} \frac{2}{\sqrt{n(n - \ell - 1)!(n + \ell)!}} \left(\frac{r}{\varepsilon n}\right)^{\ell} e^{-r/(2\varepsilon n)} L_{n-\ell-1}^{2\ell+1}\left(\frac{r}{\varepsilon n}\right). \quad (14)$$

Функции (13). (14) содержат присоединенный полином Лежандра

$$P_{\ell}^m(x) = \frac{(-1)^{\ell}}{2^{\ell} \ell!} (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^{\ell+m}}{dx^{\ell+m}} (1 - x^2)^{\ell},$$

а также обобщенный полином Лагерра

$$L_n^s(x) = e^x x^{-s} \frac{d^n}{dx^n} (e^{-x} x^{n+s}).$$

Пусть

$$a = 2\ell^2 \varepsilon. \quad (15)$$

Будем считать, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ число ℓ имеет порядок $\varepsilon^{-1/2}$. Изучим поведение функций v_{n,k,n_r} вблизи окружности

$$\Gamma_a = \{(r, \theta, \varphi) \mid r = a, \theta = \pi/2\}$$

в \mathbb{R}^3 . Введем новые переменные

$$\tau = \left(\theta - \frac{\pi}{2}\right)\sqrt{\ell}, \quad s = \left(\frac{r}{a} - 1\right)\sqrt{\ell}.$$

Справедлива

Теорема 1. При $\ell \rightarrow \infty$ и небольших $n_r = 0, 1, 2, \dots$ и $k = 0, 1, 2, \dots$ функции v_{n,k,n_r} по мод $O(\ell^{-\infty})$ сосредоточены вблизи окружности Γ_a , где при $s^6 + \tau^4 \ll \ell$ справедлива асимптотика

$$\begin{aligned} v_{n,k,n_r} = & \frac{(-1)^p \sqrt{\ell}}{a^{3/2} 2^{(p+1)/2} \pi \sqrt{n_r!} \sqrt{k!}} e^{im\varphi} e^{-(s^2 + \tau^2)/2} H_{n_r}(s) H_k(\tau) [1 + \\ & + O\left(\frac{|s|^3 + 1}{\sqrt{\ell}} H_{n_r}(s)\right) + O\left(\frac{s^2 + 1}{\sqrt{\ell}} H'_{n_r}(s)\right) + \\ & + O\left(\frac{\tau^4 + 1}{\ell} H_k(\tau)\right) + O\left(\frac{|\tau|^3 + 1}{\ell} H'_k(\tau)\right)]. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь H_n — полином Эрмита.

Доказательство теоремы 1 приведено в дополнении к статье.

3 Построение асимптотического решения

Переходя в сферическую систему координат, а также делая подстановку

$$v(x) = \frac{e^{im\varphi}}{\sqrt{2\pi}} g(r, \theta),$$

преобразуем задачу (10), (11) к виду [17]

$$\left\{ -\varepsilon \left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \cot \theta \frac{\partial}{\partial \theta} - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right) \right] - \frac{1}{r} + \right. \\ \left. + \varepsilon \int_0^\pi \int_0^\infty W(r, r', \theta, \theta') |g(r', \theta')|^2 (r')^2 \sin \theta' dr' d\theta' - E \right\} g(r, \theta) = 0, \quad (17)$$

$$\int_0^\pi \int_0^\infty |g(r, \theta)|^2 r^2 \sin \theta dr d\theta = 1, \quad (18)$$

где ядро

$$W(r, r', \theta, \theta') = \frac{2}{\pi \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos(\theta + \theta')}} K \left(\frac{2\sqrt{rr' \sin \theta \sin \theta'}}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos(\theta + \theta')}} \right). \quad (19)$$

Для квантовых чисел ℓ, n, m порядка $\varepsilon^{-1/2}$, и следовательно, небольших n_r, k и $p = n_r + k$ ниже будут построены асимптотические решения задачи (10), (11) по $\text{mod } O(\ell^{-1})$ локализованные вблизи окружности Γ_a . Асимптотические решения задачи (17), (18) будем искать в виде

$$g = a^{-3/2} \left[\sqrt{\ell} g_0(\tau, s) + g_1(\tau, s) + \frac{g_2(\tau, s)}{\sqrt{\ell}} \right] + O \left(\frac{g_3(\tau, s)}{\ell} \right), \quad (20)$$

$$E = -\frac{1}{2a(1 + (n_r + 1)/\ell)^2} + \frac{E_0 \ln \ell}{\ell^2} + \frac{E_1}{\ell^2} + O \left(\frac{\ln \ell}{\ell^{5/2}} \right). \quad (21)$$

Здесь $\ell \rightarrow \infty$, функции $g_j(\tau, s), j = 0, 1, 2, 3$, экспоненциально убывают при $\tau^2 + s^2 \rightarrow \infty$; E_0, E_1 — некоторые константы. (Для упрощения обозначений индексы i и p у g_0 и E_1 опущены.)

Разложим входящие в (17), (18) функции с помощью формулы Тейлора по степеням τ и s . Поскольку функция $K(\kappa)$ имеет логарифмическую особенность при $\kappa \rightarrow 1$ [12]

$$K(\kappa) = \ln(4/\sqrt{1 - \kappa^2}) + O((1 - \kappa^2) \ln(1 - \kappa^2)), \quad (22)$$

то непосредственно к W формула Тейлора не применима. Обозначим

$$t = (\tau - \tau')^2 + (s - s')^2.$$

Тогда из (19), (22) вытекает

Лемма 1. При $\ell \rightarrow \infty, t \ll \ell$ имеет место асимптотика

$$W(r, r', \theta, \theta') = \frac{1}{\pi a} \ln \frac{8\sqrt{\ell}}{\sqrt{t}} + O \left(\frac{s + s'}{\sqrt{\ell}} \ln \frac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{t}} \right) + O \left(\frac{t}{\ell} \ln \frac{\sqrt{\ell}}{\sqrt{t}} \right). \quad (23)$$

Далее разложим $(1+(n_r+1)/\ell)^{-2}$ по степеням ℓ и подставим асимптотики (20), (21) в уравнения (17), (18). В силу (15), (21), (23), (18) для отсутствия в левой части (17) слагаемых порядка $\ell^{-2} \ln \ell$ достаточно положить $E_0 = 1/(4\pi)$. Приравнивая к нулю слагаемые порядка ℓ^{-1} , $\ell^{-3/2}$ и ℓ^{-2} , получаем следующие задачи для определения g_0 , g_1 и g_2 :

$$\mathbf{L}g_0 = 0, \tag{24}$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |g_0|^2 d\tau ds = 1; \tag{25}$$

$$\mathbf{L}g_1 = F_1,$$

где

$$F_1 = 2 \left[\frac{\partial g_0}{\partial s} - s \frac{\partial^2 g_0}{\partial \tau^2} + (s^3 - 2ks + s\tau^2)g_0 \right],$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} (g_0 \bar{g}_1 + \bar{g}_0 g_1) d\tau ds = -2 \int_{\mathbb{R}^2} s |g_0|^2 d\tau ds;$$

$$\mathbf{L}g_2 = F_{2,1} + F_{2,2}, \tag{26}$$

где

$$F_{2,1} = -2s \frac{\partial g_0}{\partial s} + 3s^2 \frac{\partial^2 g_0}{\partial \tau^2} - \tau \frac{\partial g_0}{\partial \tau} - \left[\frac{2}{3}\tau^4 - 2k\tau^2 + k^2 - 6ks^2 + 3s^2\tau^2 + \right. \\ \left. + 3s^4 + 3(n_r + 1)^2 \right] g_0 + 2 \left[\frac{\partial g_1}{\partial s} - s \frac{\partial^2 g_1}{\partial \tau^2} + (s^3 - 2ks + s\tau^2)g_1 \right],$$

$$F_{2,2} = \frac{1}{2\pi} \left(4\pi E_1 - 6 \ln 2 + \int_{\mathbb{R}^2} \ln((\tau - \tau')^2 + (s - s')^2) |g_0(\tau', s')|^2 d\tau' ds' \right) g_0,$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} (g_0 \bar{g}_2 + \bar{g}_0 g_2) d\tau ds =$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^2} [|g_1|^2 + 2s(g_0 \bar{g}_1 + \bar{g}_0 g_1) + (s^2 - \tau^2/2) |g_0|^2] d\tau ds.$$

Здесь оператор \mathbf{L} задан формулой (8).

Решениями уравнения (24) из $L^2(\mathbb{R}^2)$ являются собственные функции двумерного осциллятора, отвечающие собственному значению $p + 1$ ($p = 0, 1, 2, \dots$). Они образуют подпространство $\mathcal{H}_p \subset L^2(\mathbb{R}^2)$, ортонормированный базис в котором состоит из функций $\beta_{j,p-j}(\tau, s), j = 0, \dots, p$. Здесь

$$\beta_{j,i}(\tau, s) = \theta_{j,i} e^{-(s^2 + \tau^2)/2} H_j(s) H_i(\tau),$$

где

$$\theta_{j,i} = \frac{(-1)^{j+i}}{2^{(j+i)/2} \sqrt{\pi} \sqrt{j!} \sqrt{i!}}.$$

Следовательно,

$$g_0 = \sum_{j=0}^p c_j \beta_{j,p-j}, \tag{27}$$

где c_j — некоторые константы, удовлетворяющие условию нормировки

$$\sum_{j=0}^p |c_j|^2 = 1.$$

Они находятся из условий разрешимости для следующих приближений. Используя (24), а также известные свойства полиномов Эрмита [23]

$$sH_j(s) = H_{j+1}(s)/2 + jH_{j-1}(s), \quad H'_j(s) = 2jH_{j-1}(s),$$

преобразуем правую часть уравнения (25). Так как

$$\begin{aligned} & \left[s \frac{\partial^2}{\partial s^2} + \frac{\partial}{\partial s} + 2s(n_r + 1) \right] e^{-s^2/2} H_j(s) = e^{-s^2/2} [s(s^2 - 1)H_j(s) - 4s^2 j H_{j-1}(s) + \\ & + 4sj(j-1)H_{j-2}(s) - sH_j(s) + 2jH_{j-1}(s) + 2s(n_r + 1)H_j(s)] = \\ & = e^{-s^2/2} \left\{ \frac{1}{8} H_{j+3}(s) + \left(\frac{3}{4}j + \frac{3}{4} \right) H_{j+1}(s) + \frac{3}{2} j^2 H_{j-1}(s) + j(j-1)(j-2)H_{j-3}(s) + \right. \\ & + 2n_r \left[\frac{1}{2} H_{j+1}(s) + jH_{j-1}(s) \right] - 4j \left[\frac{1}{4} H_{j+1}(s) + \left(j - \frac{1}{2} \right) H_{j-1}(s) + \right. \\ & \left. \left. + (j-1)(j-2)H_{j-3}(s) \right] + 2jH_{j-1}(s) + 4j(j-1) \left[\frac{1}{2} H_{j-1}(s) + (j-2)H_{j-3}(s) \right] \right\} = \\ & = e^{-s^2/2} \left\{ \frac{1}{8} H_{j+3}(s) + \left[-\frac{j}{4} + \frac{3}{4} + n_r \right] H_{j+1}(s) + \right. \\ & \left. + j \left[-\frac{j}{2} + 2n_r + 2 \right] H_{j-1}(s) + j(j-1)(j-2)H_{j-3}(s) \right\}, \end{aligned}$$

то F_1 принимает вид

$$\begin{aligned} F_1 &= 2 \left[s \frac{\partial^2 g_0}{\partial s^2} + \frac{\partial g_0}{\partial s} + 2s(n_r + 1)g_0 \right] = \\ &= 2 \sum_{j=0}^p c_j \theta_{j,p-j} e^{-(s^2 + \tau^2)/2} H_{p-j}(\tau) \left\{ H_{j+3}(s)/8 + ((3-j)/4 + n_r)H_{j+1}(s) + \right. \\ & \left. + j(-j/2 + 2n_r + 2)H_{j-1}(s) + j(j-1)(j-2)H_{j-3}(s) \right\}. \end{aligned} \quad (28)$$

Поскольку (28) не содержит функций из \mathcal{H}_p , то уравнение (25) разрешимо. Его решение имеет вид

$$g_1 = -\frac{1}{3} \frac{\partial^3 g_0}{\partial s^3} - 2(n_r + 1) \frac{\partial g_0}{\partial s} + \sum_{j=0}^p c_j^* \beta_{j,p-j},$$

где c_j^* — некоторые константы.

Аналогично доказывается, что $F_{2,1}$ также не содержит функций из \mathcal{H}_p . Поэтому условия разрешимости уравнения (26) принимают вид

$$\int_{\mathbb{R}^2} F_{2,2} \beta_{j,p-j} d\tau ds = 0, \quad j = 0, \dots, p. \quad (29)$$

При выполнении (29) функция $g_2 \in L^2(\mathbb{R}^2)$ может быть представлена в виде суммы следующего ряда [24, 23]

$$g_2 = \sum_{\substack{j,i=0 \\ j+i \neq p}}^{\infty} \frac{1}{2(j+i-p)} \int_{\mathbb{R}^2} (F_{2,1}(\tau', s') + aF_{2,2}(\tau', s')) \beta_{j,i}(\tau', s') d\tau' ds' \beta_{j,i}(\tau, s) + \sum_{j=0}^p c_j^{**} \beta_{j,p-j}, \quad (30)$$

где c_j^{**} — некоторые константы.

Условие (29) позволяют найти входящие в (27) коэффициенты

$$c_j = \frac{1}{6 \ln 2 - 4\pi E_1} \int_{\mathbb{R}^4} \ln((\tau - \tau')^2 + (s - s')^2) |g_0(\tau', s')|^2 g_0(\tau, s) \beta_{j,p-j}(\tau, s) d\tau' ds' d\tau ds,$$

$j = 0, \dots, p$. В результате, приходим к следующей не содержащей малых параметров задаче на собственные значения

$$(6 \ln 2 - 4\pi E_1)g_0 = \int_{\mathbb{R}^2} \Omega(\tau, s, \tau'', s'') \int_{\mathbb{R}^2} \ln((\tau' - \tau'')^2 + (s' - s'')^2) |g_0(\tau', s')|^2 d\tau' ds' g_0(\tau'', s'') d\tau'' ds'', \quad (31)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} |g_0(\tau, s)|^2 d\tau ds = 1. \quad (32)$$

Здесь функция

$$\Omega(\tau, s, \tau'', s'') = \frac{e^{-(s^2 + \tau^2 + (s'')^2 + (\tau'')^2)/2}}{2^p \pi} \sum_{j=0}^p \frac{H_j(s) H_j(s'') H_{p-j}(\tau) H_{p-j}(\tau'')}{j!(p-j)!}.$$

Поскольку в результате преобразования Гаусса [23]

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\mathbb{R}} (2ix)^n e^{(ix-y)^2} dx = H_n(y),$$

то для ядра Ω имеет место интегральное представление

$$\Omega(\tau, s, \tau'', s'') = \frac{(-1)^{p-2p}}{p! \pi^3} e^{-(s^2 + \tau^2 + (s'')^2 + (\tau'')^2)/2} \times \int_{\mathbb{R}^4} (\tilde{s}\tilde{s}' + \tilde{\tau}\tilde{\tau}')^p e^{(i\tilde{s}-s)^2 + (i\tilde{\tau}-\tau)^2 + (i\tilde{s}'-s')^2 + (i\tilde{\tau}'-\tau')^2} d\tilde{\tau} d\tilde{s} d\tilde{\tau}' d\tilde{s}'.$$

Из (31), (32) следует, что число E_1 может быть записано в виде

$$E_1 = \frac{3 \ln 2}{2\pi} - \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} \Omega(\tau, s, \tau'', s'') g_0(\tau'', s'') \bar{g}_0(\tau, s) d\tau ds \times \int_{\mathbb{R}^2} \ln((\tau' - \tau'')^2 + (s' - s'')^2) |g_0(\tau', s')|^2 d\tau' ds' d\tau'' ds''. \quad (33)$$

Замечание 1. Уравнение (31) является нелинейным интегральным уравнением. Ранее при нахождении серии асимптотических собственных функций для оператора Хартри нелинейное интегральное уравнение на сфере возникало в работе [14].

Пусть при некотором $p = 0, 1, 2, \dots$ число $E_1 = E_{1,i}^{(p)}$ и функция $g_0 = g_{0,i}^{(p)}$ являются решением задачи (31), (32). Определим число $\lambda_{n,i}^{(p)}$ по формуле (3), а также функцию

$$\psi_{n,i}^{(p)} = \varepsilon^{3/2} \sum_{j=0}^p c_j v_{n,p-j,j}(\varepsilon q),$$

где v_{n,k,n_r} задаются формулой (12), а коэффициенты c_j совпадают с коэффициентами разложения g_0 согласно (27) (см. теорему 1). Справедлива

Теорема 2. При $\varepsilon \rightarrow 0$ и n порядка $\varepsilon^{-1/2}$ число $\lambda_{n,i}^{(p)}$ является асимптотическим собственным значением, а функция $\psi_{n,i}^{(p)}$ — главным членом разложения соответствующей асимптотической собственной функции задачи (1), (2) в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$. Число $\lambda_{n,i}^{(p)}$ расположено вблизи верхней границы спектрального кластера, отвечающего квантовому числу n , а функция $\psi_{n,i}^{(p)}$ по mod $O(n)$ сосредоточена вблизи окружности $\Gamma = \{(r, \theta, \varphi) \mid r = 2n^2, \theta = \pi/2\}$ в \mathbb{R}^3 .

Замечание 2. Поправка к $\psi_{n,i}^{(p)}$ строится аналогично (30), однако имеет весьма громоздкий вид.

4 Решение спектральной задачи на подпространствах $\mathcal{H}_0, \mathcal{H}_1$

Найдем решение задачи (31), (32) при $p = 0$. Будем искать $g_{0,0}^{(0)}$ в виде

$$g_{0,0}^{(0)} = c_0^{(0)} \beta_{0,0} = \frac{c_0^{(0)}}{\sqrt{\pi}} e^{-(s^2 + \tau^2)/2}. \quad (34)$$

В силу условия нормировки (32) константа $c_0^{(0)}$ удовлетворяет равенству

$$c_0^{(0)} = 1. \quad (35)$$

Замечание 3. Формулы для асимптотических собственных функций в статье приводятся с точностью до произвольного множителя вида $e^{i\varphi}$, где $\varphi \in \mathbb{R}$.

Подставляя (34) в соотношение (33), имеем:

$$E_{1,0}^{(0)} = \frac{3 \ln 2}{2\pi} - \frac{1}{4\pi^3} \int_{\mathbb{R}^4} \ln((\tau' - \tau'')^2 + (s' - s'')^2) e^{-s'^2 - \tau'^2 - (s'')^2 - (\tau'')^2} d\tau' ds' d\tau'' ds''. \quad (36)$$

Далее, делая замену переменных

$$\xi = \tau'' - \tau', \quad \eta = s'' - s', \quad (37)$$

а также учитывая при $n = 0$ равенство [25]

$$\int_{\mathbb{R}} r^{2n} e^{-2r^2} dr = \frac{\sqrt{\pi}(2n)!}{2^{3n}\sqrt{2n!}}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (38)$$

преобразуем (36) к виду

$$E_{1,0}^{(0)} = \frac{3 \ln 2}{2\pi} - \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(\xi^2 + \eta^2) e^{-(\xi^2 + \eta^2)/2} d\xi d\eta. \quad (39)$$

Наконец, переходя в правой части (39) к полярным координатам

$$\xi = \rho \cos \varphi, \quad \eta = \rho \sin \varphi$$

и используя интеграл [25]

$$\int_0^\infty e^{-r/2} \ln r dr = -2\gamma + 2 \ln 2, \quad (40)$$

где γ – постоянная Эйлера, находим, что

$$\begin{aligned} E_{1,0}^{(0)} &= \frac{3 \ln 2}{2\pi} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \ln \rho^2 e^{-\rho^2/2} \rho d\rho d\varphi = \\ &= \frac{3 \ln 2}{2\pi} - \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty e^{-r/2} \ln r dr = \frac{5 \ln 2 + \gamma}{4\pi}. \end{aligned}$$

При $p = 1$ решение будем искать в виде

$$g_{0,i}^{(1)} = c_{0,i}^{(1)} \beta_{0,1} + c_{1,i}^{(1)} \beta_{1,0} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-(s^2 + \tau^2)/2} (c_{0,i}^{(1)} \tau + c_{1,i}^{(1)} s), \quad (41)$$

где $c_{0,i}^{(1)}, c_{1,i}^{(1)}$ – константы. Подставляя функцию (41) в (31), (32), приходим к системе уравнений

$$(4\pi E_1^{(1)} - 6 \ln 2) c_0^{(1)} + I(c_0^{(1)}, c_1^{(1)}) = 0, \quad (42)$$

$$(4\pi E_1^{(1)} - 6 \ln 2) c_1^{(1)} + I(c_1^{(1)}, c_0^{(1)}) = 0, \quad (43)$$

$$|c_0^{(1)}|^2 + |c_1^{(1)}|^2 = 1, \quad (44)$$

где

$$\begin{aligned} I(c_0^{(1)}, c_1^{(1)}) &= \frac{4}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \ln((\tau' - \tau'')^2 + (s' - s'')^2) e^{-((s')^2 + (\tau')^2 + (s'')^2 + (\tau'')^2)} [|c_0^{(1)}|^2 (\tau')^2 + \\ &+ |c_1^{(1)}|^2 (s')^2 + (c_0^{(1)} \bar{c}_1^{(1)} + \bar{c}_0^{(1)} c_1^{(1)}) s' \tau'] [c_0^{(1)} (\tau'')^2 + c_1^{(1)} s'' \tau''] d\tau' ds' d\tau'' ds''. \end{aligned}$$

(Индекс i для краткости обозначений опущен.)

Вычислим входящий в $I(c_0^{(1)}, c_1^{(1)})$ интеграл. Делая замену переменных (37), имеем:

$$I(c_0^{(1)}, c_1^{(1)}) = \frac{4}{\pi^2} \int_{\mathbb{R}^2} \ln(\xi^2 + \eta^2) e^{-(\xi^2 + \eta^2)/2} I_1(c_0^{(1)}, c_1^{(1)}, \xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (45)$$

Здесь

$$I_1(c_0^{(1)}, c_1^{(1)}, \xi, \eta) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2(s'+\eta/2)^2 - 2(\tau'+\xi/2)^2} [|c_0^{(1)}|^2 (\tau')^2 + |c_1^{(1)}|^2 (s')^2 + (c_0^{(1)}\bar{c}_1^{(1)} + \bar{c}_0^{(1)}c_1^{(1)})s'\tau'] [c_0^{(1)}(\xi + \tau')^2 + c_1^{(1)}(\xi + \tau')(\eta + s')] d\tau' ds'.$$

Делая далее еще одну замену

$$x = s' + \eta/2, \quad y = \tau' + \xi/2$$

и пользуясь равенствами (38) при $n = 0, 1, 2$ находим, что

$$\begin{aligned} I_1(c_0^{(1)}, c_1^{(1)}, \xi, \eta) &= \frac{\pi}{32} \{ 3 |c_0^{(1)}|^2 c_0^{(1)} + |c_1^{(1)}|^2 c_0^{(1)} + (c_0^{(1)}\bar{c}_1^{(1)} + \bar{c}_0^{(1)}c_1^{(1)})c_1^{(1)} + \\ &+ [|c_0^{(1)}|^2 \xi^2 + |c_1^{(1)}|^2 \eta^2 + (c_0^{(1)}\bar{c}_1^{(1)} + \bar{c}_0^{(1)}c_1^{(1)})\xi\eta] c_0^{(1)} - \\ &- [4 |c_0^{(1)}|^2 c_0^{(1)} + (c_0^{(1)}\bar{c}_1^{(1)} + \bar{c}_0^{(1)}c_1^{(1)})c_1^{(1)}] \xi^2 - 2 [(c_0^{(1)}\bar{c}_1^{(1)} + \bar{c}_0^{(1)}c_1^{(1)})c_0^{(1)} + \\ &+ (|c_0^{(1)}|^2 + |c_1^{(1)}|^2)c_1^{(1)}] \xi\eta - (c_0^{(1)}\bar{c}_1^{(1)} + \bar{c}_0^{(1)}c_1^{(1)})c_1^{(1)}\eta^2 + \\ &+ [|c_0^{(1)}|^2 + |c_1^{(1)}|^2 + |c_0^{(1)}|^2 \xi^2 + |c_1^{(1)}|^2 \eta^2 + \\ &+ (c_0^{(1)}\bar{c}_1^{(1)} + \bar{c}_0^{(1)}c_1^{(1)})\xi\eta] (c_0^{(1)}\xi^2 + c_1^{(1)}\xi\eta) \}. \end{aligned} \quad (46)$$

Подставим, наконец, правую часть (46) в (45). Переходя в получившемся интеграле к полярным координатам, а также используя (40) и равенства [25]

$$\int_0^\infty r^n e^{-r/2} \ln r dr = n! 2^{n+1} \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \gamma + \ln 2 \right), \quad n = 1, 2, \dots$$

при $n = 1, 2$, приходим к следующей лемме.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$I(c_0^{(1)}, c_1^{(1)}) = \left(\ln 2 - \gamma + \frac{5}{8} \right) (|c_0^{(1)}|^2 + |c_1^{(1)}|^2) c_0^{(1)} + (c_0^{(1)}\bar{c}_1^{(1)} - \bar{c}_0^{(1)}c_1^{(1)}) \frac{c_1^{(1)}}{8}. \quad (47)$$

С учетом (47) система уравнений (42)–(44) принимает вид

$$\left(4\pi E_1^{(1)} - 5 \ln 2 - \gamma + \frac{5}{8} \right) c_0^{(1)} + (c_0^{(1)}\bar{c}_1^{(1)} - \bar{c}_0^{(1)}c_1^{(1)}) \frac{c_1^{(1)}}{8} = 0, \quad (48)$$

$$\left(4\pi E_1^{(1)} - 5 \ln 2 - \gamma + \frac{5}{8} \right) c_1^{(1)} - (c_0^{(1)}\bar{c}_1^{(1)} - \bar{c}_0^{(1)}c_1^{(1)}) \frac{c_0^{(1)}}{8} = 0, \quad (49)$$

$$|c_0^{(1)}|^2 + |c_1^{(1)}|^2 = 1. \quad (50)$$

Система (48)–(50) при

$$E_{1,0}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \left(5 \ln 2 + \gamma - \frac{5}{8} \right)$$

имеет однопараметрическое семейство вещественных решений

$$c_{0,0}^{(1)} = \cos \alpha, \quad c_{1,0}^{(1)} = \sin \alpha, \quad (51)$$

где $\alpha \in \mathbb{R}$, а при

$$E_{1,1}^{(1)} = \frac{1}{4\pi} \left(5 \ln 2 + \gamma - \frac{3}{4} \right)$$

— комплексные решения

$$c_{0,1}^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_{1,1}^{(1)} = \pm \frac{i}{\sqrt{2}}. \quad (52)$$

Справедлива

Теорема 3. При $p = 0, 1$ собственные значения задачи (31), (32) имеют вид (4)–(6), а соответствующие собственные функции при $p = 0$ определяются равенствами (34), (35), а при $p = 1$ — равенствами (41), (51), (52).

5 Спектральная задача на подпространстве \mathcal{H}_2 . Вещественные решения

При $p = 2$ будем искать решение задачи (31), (32) в виде

$$\begin{aligned} g_{0,i}^{(2)} &= c_{0,i}^{(2)}\beta_{0,2} + c_{1,i}^{(2)}\beta_{1,1} + c_{2,i}^{(2)}\beta_{2,0} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(s^2+\tau^2)/2} [c_{0,i}^{(2)}(2\tau^2 - 1) + c_{1,i}^{(2)}2\sqrt{2}\tau s + c_{2,i}^{(2)}(2s^2 - 1)]. \end{aligned} \quad (53)$$

Тогда система (31), (32) примет вид

$$(4\pi E_1^{(2)} - 6 \ln 2)c_0^{(2)} + I_2(c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}) = 0, \quad (54)$$

$$(4\pi E_1^{(2)} - 6 \ln 2)c_1^{(2)} + I_3(c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}) = 0, \quad (55)$$

$$(4\pi E_1^{(2)} - 6 \ln 2)c_2^{(2)} + I_2(c_2^{(2)}, c_1^{(2)}, c_0^{(2)}) = 0, \quad (56)$$

$$|c_0^{(2)}|^2 + |c_1^{(2)}|^2 + |c_2^{(2)}|^2 = 1. \quad (57)$$

Здесь

$$\begin{aligned} I_2(c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \ln((\tau - \tau')^2 + (s - s')^2) e^{-((s')^2 + (\tau')^2 + s^2 + \tau^2)} \times \\ &\quad \times I_4(c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \tau', s', \tau, s) (2\tau^2 - 1) d\tau' ds' d\tau ds, \\ I_3(c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}) &= \frac{1}{\sqrt{2}\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} \ln((\tau - \tau')^2 + (s - s')^2) e^{-((s')^2 + (\tau')^2 + s^2 + \tau^2)} \times \\ &\quad \times I_4(c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \tau', s', \tau, s) \tau s d\tau' ds' d\tau ds, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} I_4(c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \tau', s', \tau, s) &= \{ |c_0^{(2)}|^2 (2(\tau')^2 - 1)^2 + 8 |c_1^{(2)}|^2 (\tau' s')^2 + \\ &\quad + |c_2^{(2)}|^2 (2(s')^2 - 1)^2 + 2\sqrt{2}(c_0^{(2)}\bar{c}_1^{(2)} + \bar{c}_0^{(2)}c_1^{(2)})\tau' s'(2(\tau')^2 - 1) + \end{aligned}$$

$$+2\sqrt{2}(c_2^{(2)}\bar{c}_1^{(2)} + \bar{c}_2^{(2)}c_1^{(2)})\tau's'(2(s')^2 - 1) + (c_0^{(2)}\bar{c}_2^{(2)} + \bar{c}_0^{(2)}c_2^{(2)})(2(\tau')^2 - 1) \times \\ \times (2(s')^2 - 1)\} [c_0^{(2)}(2\tau^2 - 1) + 2\sqrt{2}c_1^{(2)}\tau s + c_2^{(2)}(2s^2 - 1)].$$

(Индекс i снова опущен.)

Вычисления, аналогичные случаям $p = 0, 1$, но значительно более громоздкие, приводят к следующей лемме.

Лемма 3. *Справедливы равенства*

$$I_2(c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}) = (\ln 2 - \gamma)(|c_0^{(2)}|^2 + |c_1^{(2)}|^2 + |c_2^{(2)}|^2) + \\ + \frac{1}{128} \left\{ |c_0^{(2)}|^2 \left(\frac{247}{2}c_0^{(2)} + \frac{c_2^{(2)}}{2} \right) + |c_1^{(2)}|^2 (153c_0^{(2)} - c_2^{(2)}) + \right. \\ \left. + |c_2^{(2)}|^2 \left(\frac{343}{2}c_0^{(2)} + \frac{c_2^{(2)}}{2} \right) - 15(c_0^{(2)}\bar{c}_1^{(2)} + \bar{c}_0^{(2)}c_1^{(2)})c_1^{(2)} - 9(c_2^{(2)}\bar{c}_1^{(2)} + \right. \\ \left. + \bar{c}_2^{(2)}c_1^{(2)})c_1^{(2)} + (c_0^{(2)}\bar{c}_2^{(2)} + \bar{c}_0^{(2)}c_2^{(2)}) \left(\frac{c_0^{(2)}}{2} - \frac{9}{2}c_2^{(2)} \right) \right\}, \quad (58)$$

$$I_3(c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}) = (\ln 2 - \gamma)(|c_0^{(2)}|^2 + |c_1^{(2)}|^2 + |c_2^{(2)}|^2) + \\ + \frac{1}{128} \{ 153|c_0^{(2)}|^2 c_1^{(2)} + 142|c_1^{(2)}|^2 c_1^{(2)} + 153|c_2^{(2)}|^2 c_1^{(2)} - \\ - (c_0^{(2)}\bar{c}_2^{(2)} + \bar{c}_0^{(2)}c_2^{(2)})c_1^{(2)} - (c_0^{(2)}\bar{c}_1^{(2)} + \bar{c}_0^{(2)}c_1^{(2)})(15c_0^{(2)} + 9c_2^{(2)}) - \\ - (c_2^{(2)}\bar{c}_1^{(2)} + \bar{c}_2^{(2)}c_1^{(2)})(9c_0^{(2)} + 15c_2^{(2)}) \}. \quad (59)$$

С учетом (58), (59) система уравнений (54)–(57) принимает вид

$$-\sigma^{(2)}c_0^{(2)} + |c_0^{(2)}|^2 \left(\frac{247}{2}c_0^{(2)} + \frac{c_2^{(2)}}{2} \right) + |c_1^{(2)}|^2 (153c_0^{(2)} - c_2^{(2)}) + \\ + |c_2^{(2)}|^2 \left(\frac{343}{2}c_0^{(2)} + \frac{c_2^{(2)}}{2} \right) - 15(c_0^{(2)}\bar{c}_1^{(2)} + \bar{c}_0^{(2)}c_1^{(2)})c_1^{(2)} - \\ - 9(c_2^{(2)}\bar{c}_1^{(2)} + \bar{c}_2^{(2)}c_1^{(2)})c_1^{(2)} + (c_0^{(2)}\bar{c}_2^{(2)} + \bar{c}_0^{(2)}c_2^{(2)}) \left(\frac{c_0^{(2)}}{2} - \frac{9}{2}c_2^{(2)} \right) = 0, \quad (60)$$

$$-\sigma^{(2)}c_1^{(2)} + 153|c_0^{(2)}|^2 c_1^{(2)} + 142|c_1^{(2)}|^2 c_1^{(2)} + 153|c_2^{(2)}|^2 c_1^{(2)} - \\ - (c_0^{(2)}\bar{c}_2^{(2)} + \bar{c}_0^{(2)}c_2^{(2)})c_1^{(2)} - (c_0^{(2)}\bar{c}_1^{(2)} + \bar{c}_0^{(2)}c_1^{(2)})(15c_0^{(2)} + 9c_2^{(2)}) - \\ - (c_2^{(2)}\bar{c}_1^{(2)} + \bar{c}_2^{(2)}c_1^{(2)})(9c_0^{(2)} + 15c_2^{(2)}) = 0, \quad (61)$$

$$-\sigma^{(2)}c_2^{(2)} + |c_0^{(2)}|^2 \left(\frac{c_0^{(2)}}{2} + \frac{343}{2}c_2^{(2)} \right) + |c_1^{(2)}|^2 (-c_0^{(2)} + 153c_2^{(2)}) + \\ + |c_2^{(2)}|^2 \left(\frac{c_0^{(2)}}{2} + \frac{247}{2}c_2^{(2)} \right) - 9(c_0^{(2)}\bar{c}_1^{(2)} + \bar{c}_0^{(2)}c_1^{(2)})c_1^{(2)} - 15(c_2^{(2)}\bar{c}_1^{(2)} + \\ + \bar{c}_2^{(2)}c_1^{(2)})c_1^{(2)} + (c_0^{(2)}\bar{c}_2^{(2)} + \bar{c}_0^{(2)}c_2^{(2)}) \left(-\frac{9}{2}c_0^{(2)} + \frac{c_2^{(2)}}{2} \right) = 0, \quad (62)$$

$$|c_0^{(2)}|^2 + |c_1^{(2)}|^2 + |c_2^{(2)}|^2 = 1. \quad (63)$$

Здесь $\sigma^{(2)} = 128(-4\pi E_1^{(2)} + 5 \ln 2 + \gamma)$.

Перейдем к решению системы (60)-(63). (Для упрощения обозначений индекс 2 сверху у $c_0^{(2)}, c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, \sigma^{(2)}$ будем ниже опускать.) Вначале найдем вещественные решения. Если $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, то система (60)-(63) принимает вид

$$\begin{aligned} -\sigma c_0 + c_0^2 \left(\frac{247}{2} c_0 + \frac{3}{2} c_2 \right) + c_1^2 (123c_0 - 19c_2) + c_2^2 \left(\frac{325}{2} c_0 + \frac{c_2}{2} \right) &= 0, \\ c_1(-\sigma + 123c_0^2 + 142c_1^2 + 123c_2^2 - 38c_0c_2) &= 0, \\ -\sigma c_2 + c_0^2 \left(\frac{c_0}{2} + \frac{325}{2} c_2 \right) + c_1^2 (-19c_0 + 123c_2) + c_2^2 \left(\frac{3}{2} c_0 + \frac{247}{2} c_2 \right) &= 0, \\ c_0^2 + c_1^2 + c_2^2 &= 1. \end{aligned} \quad (64)$$

Учитывая (64), при $c_1 = 0$ получаем систему

$$\left(-\sigma + 123 + \frac{c_0^2}{2} + \frac{79}{2} c_2^2 \right) c_0 + \left(-19 + \frac{41}{2} c_0^2 + \frac{39}{2} c_2^2 \right) c_2 = 0, \quad (65)$$

$$\left(-19 + \frac{39}{2} c_0^2 + \frac{41}{2} c_2^2 \right) c_0 + \left(-\sigma + 123 + \frac{79}{2} c_0^2 + \frac{c_2^2}{2} \right) c_2 = 0, \quad (66)$$

$$c_0^2 + c_2^2 = 1, \quad (67)$$

а при $c_1 \neq 0$ приходим к уравнениям (65), (66),

$$-\sigma + 142 - 19(c_0 + c_2)^2 = 0, \quad (68)$$

$$c_1^2 = 1 - c_0^2 - c_2^2. \quad (69)$$

Рассмотрим случай, когда $c_1 = 0$. Обозначим $x = c_2^2$. Тогда, исключая c_0 из (65)-(67), имеем:

$$\sigma^2 - 286\sigma - 1520x^2 + 1520x + 20068 = 0, \quad (70)$$

$$\sigma^2(x - 1) - \sigma(x - 1)(78x + 247) + \left(1522x^3 + 8109x^2 + \frac{11243}{2}x - \frac{61009}{4} \right) = 0. \quad (71)$$

Из уравнений (70), (71) вытекает, что

$$\left(x - \frac{1}{2} \right) \left(-78(x - 1)\sigma + 3042x^2 + 6590x - \frac{19263}{2} \right) = 0. \quad (72)$$

Если $x = 1/2$, то из уравнения (70) находим

$$\sigma_1^{(2)} = 142, \quad \sigma_2^{(2)} = 144. \quad (73)$$

Соответствующие коэффициенты в формуле (53) имеют вид

$$\begin{aligned} c_{0,1}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & c_{1,1}^{(2)} &= 0, & c_{2,1}^{(2)} &= -\frac{1}{\sqrt{2}}, \\ c_{0,2}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}, & c_{1,2}^{(2)} &= 0, & c_{2,2}^{(2)} &= \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{aligned} \quad (74)$$

Если же $x \neq 1/2$, то выражая σ из (72) и подставляя его в (70), получаем уравнение

$$x^4 - 4x^3 + \frac{15971}{3042}x^2 - \frac{1141}{507}x + \frac{1}{2704} = 0.$$

Оно сводится к двум квадратным уравнениям:

$$(x - 3/2)^2 = 0 \quad (75)$$

и

$$x^2 - x + \frac{1}{6084} = 0. \quad (76)$$

Так как $x \in [0, 1]$, то уравнение (75) решений не имеет. В случае уравнения (76) находим корни

$$x_1 = \frac{1}{78(39 + 4\sqrt{95})}, \quad x_2 = 1 - \frac{1}{78(39 + 4\sqrt{95})}.$$

Они отвечают значению

$$\sigma_0^{(2)} = 123 + \frac{19}{39}. \quad (77)$$

Доказана

Лемма 4. Система (65)–(67) разрешима лишь в случае, когда σ имеет вид (73) или (77).

Перейдем к изучению уравнений (65), (66), (68), (69), которые возникают при $c_1 \neq 0$. Исключая из этой системы σ и c_1^2 , находим, что

$$\left(-19 + \frac{39}{2}c_0^2 + 38c_0c_2 + \frac{117}{2}c_2^2\right)c_0 + \left(-19 + \frac{41}{2}c_0^2 + \frac{39}{2}c_2^2\right)c_2 = 0, \quad (78)$$

$$\left(-19 + \frac{39}{2}c_0^2 + \frac{41}{2}c_2^2\right)c_0 + \left(-19 + \frac{117}{2}c_0^2 + 38c_0c_2 + \frac{39}{2}c_2^2\right)c_2 = 0. \quad (79)$$

Если $c_0 = c_2 = 0$, то из (68), (69) следует, что $c_1 = 1$, а $\sigma = 142$. Если же $c_0c_2 \neq 0$, то условием разрешимости (78), (79) будет равенство

$$\begin{aligned} &\left(-19 + \frac{39}{2}c_0^2 + 38c_0c_2 + \frac{117}{2}c_2^2\right)\left(-19 + \frac{117}{2}c_0^2 + 38c_0c_2 + \frac{39}{2}c_2^2\right) - \\ &- \left(-19 + \frac{39}{2}c_0^2 + \frac{41}{2}c_2^2\right)\left(-19 + \frac{41}{2}c_0^2 + \frac{39}{2}c_2^2\right) = 0. \end{aligned}$$

Вследствие симметрии уравнений (78), (79) оно может быть записано в виде

$$(c_0 + c_2)^2[38 - 39(c_0 + c_2)^2] = 0.$$

Пусть $c_0 + c_2 = 0$. Тогда из соотношения (68) находим, что $\sigma_1^{(2)} = 142$. Этому значению σ соответствует однопараметрическое семейство решений (53), коэффициенты которого имеют вид

$$c_{0,1}^{(2)} = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}}, \quad c_{1,1}^{(2)} = \cos \alpha, \quad c_{2,1}^{(2)} = -\frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}}. \quad (80)$$

Здесь $\alpha \in \mathbb{R}$.

В случае, если

$$(c_0 + c_2)^2 = \frac{38}{39},$$

для σ снова получаем значение (77). Ему соответствует однопараметрическое семейство решений (53), коэффициенты которого имеют вид

$$c_{0,0}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{39}} \left(\frac{\sqrt{38}}{2} + \sqrt{10} \cos \alpha \right), \quad c_{1,0}^{(2)} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{39}} \sin \alpha, \quad c_{2,0}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{39}} \left(\frac{\sqrt{38}}{2} - \sqrt{10} \cos \alpha \right). \quad (81)$$

Здесь $\alpha \in \mathbb{R}$. Отметим, что если $\sigma = \sigma_0^{(2)}$ и $\sigma = \sigma_1^{(2)}$, то построенные выше при $c_1 = 0$ решения системы (65)–(67) содержатся в однопараметрических семействах (81), (80).

Доказана

Теорема 4. При $p = 2$ собственные значения задачи (31), (32), отвечающие вещественным собственным функциям, имеют вид (4), (77), (73). Соответствующие собственные функции определяются равенствами (53), (81), (80), (74).

6 Спектральная задача на подпространстве \mathcal{H}_2 . Комплексные решения

Перейдем к построению комплексных решений системы (60)–(63). В силу замечания 3 мы можем считать, что $c_1 \in \mathbb{R}$. Поэтому положим

$$c_0^{(2)} = |c_0| e^{i\varphi_0}, \quad c_1^{(2)} = |c_1|, \quad c_2^{(2)} = |c_2| e^{i\varphi_2}.$$

Поделим далее (60) на $e^{i\varphi_0}$, (62) на $e^{i\varphi_2}$ и приравняем в уравнениях (60)–(62) к нулю вещественные и мнимые части. В результате получаем систему

$$\begin{aligned} & -\sigma |c_0| + \frac{247}{2} |c_0|^3 + \frac{1}{2} |c_0|^2 |c_2| \cos(\varphi_2 - \varphi_0) + 153 |c_1|^2 |c_0| - \\ & - |c_1|^2 |c_2| \cos(\varphi_2 - \varphi_0) + |c_2|^2 \left(\frac{343}{2} |c_0| + \frac{1}{2} |c_2| \cos(\varphi_2 - \varphi_0) \right) - \\ & - 30 |c_0| |c_1|^2 \cos^2 \varphi_0 - 18 |c_2| |c_1|^2 \cos \varphi_2 \cos \varphi_0 + \\ & + 2 |c_0| |c_2| \cos(\varphi_2 - \varphi_0) \left(\frac{|c_0|}{2} - \frac{9}{2} |c_2| \cos(\varphi_2 - \varphi_0) \right) = 0, \quad (82) \\ & |c_1| \{ -\sigma + 153 |c_0|^2 + 142 |c_1|^2 + 153 |c_2|^2 - \\ & - 2 |c_0| |c_2| \cos(\varphi_2 - \varphi_0) - 2 |c_0| \cos \varphi_0 (15 |c_0| \cos \varphi_0 + 9 |c_2| \cos \varphi_2) - \\ & - 2 |c_2| \cos \varphi_2 (9 |c_0| \cos \varphi_0 + 15 |c_2| \cos \varphi_2) \} = 0, \\ & -\sigma |c_2| + |c_0|^2 \left(\frac{1}{2} |c_0| \cos(\varphi_2 - \varphi_0) + \frac{343}{2} |c_2| \right) + \\ & + |c_1|^2 \left(-|c_0| \cos(\varphi_2 - \varphi_0) + 153 |c_2| \right) + |c_2|^2 \left(\frac{1}{2} |c_0| \cos(\varphi_2 - \varphi_0) + \right. \\ & \left. + \frac{247}{2} |c_2| \right) - 18 |c_0| |c_1|^2 \cos \varphi_0 \cos \varphi_2 - 30 |c_2| |c_1|^2 \cos^2 \varphi_0 + \end{aligned}$$

$$+2 |c_0| |c_2| \cos(\varphi_2 - \varphi_0) \left(-\frac{9}{2} |c_0| \cos(\varphi_2 - \varphi_0) + \frac{|c_2|}{2} \right) = 0, \quad (83)$$

$$|c_0|^2 + |c_1|^2 + |c_2|^2 = 1, \quad (84)$$

$$|c_2| \sin(\varphi_2 - \varphi_0) \left(\frac{|c_0|^2}{2} - |c_1|^2 + \frac{|c_2|^2}{2} - 9 |c_0| |c_2| \cos(\varphi_2 - \varphi_0) \right) + \\ + |c_1|^2 \sin \varphi_0 (30 |c_0| \cos \varphi_0 + 18 |c_2| \cos \varphi_2) = 0, \quad (85)$$

$$|c_0| \sin(\varphi_2 - \varphi_0) \left(\frac{|c_0|^2}{2} - |c_1|^2 + \frac{|c_2|^2}{2} - 9 |c_0| |c_2| \cos(\varphi_2 - \varphi_0) \right) - \\ - |c_1|^2 \sin \varphi_2 (18 |c_0| \cos \varphi_0 + 30 |c_2| \cos \varphi_2) = 0, \quad (86)$$

$$|c_1| \{ |c_0| \sin \varphi_0 (5 |c_0| \cos \varphi_0 + 3 |c_2| \cos \varphi_2) + \\ + |c_2| \sin \varphi_2 (3 |c_0| \cos \varphi_0 + 5 |c_2| \cos \varphi_2) \} = 0. \quad (87)$$

Уравнение (87) здесь можно отбросить, так как оно является линейной комбинацией (85), (86).

Анализ уравнений (85), (86) показывает, что комплексные решения спектральной задачи на подпространстве \mathcal{H}_2 могут существовать в следующих пяти случаях.

- 1 случай. $c_1 = 0$.
- 2 случай. $|c_2| = 0$, $|c_0| \neq 0$, $\varphi_0 = \pm\pi/2$.
- 3 случай. $|c_0| = 0$, $|c_2| \neq 0$, $\varphi_2 = \pm\pi/2$.
- 4 случай. $\varphi_0 = \varphi_2 = \pm\pi/2$.
- 5 случай. $|c_0| = |c_2| \neq 0$, $\varphi_2 = -\varphi_0$.

Рассмотрим случай 1. Пусть $c_1 = 0$. Тогда из уравнений (84), (85) следует, что

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_0) = \frac{1}{18 |c_0| |c_2|}. \quad (88)$$

(При $\sin(\varphi_2 - \varphi_0) = 0$ снова приходим к вещественным решениям.) Далее подставим правую часть (88) в (82), (83). В результате получаем систему

$$|c_0| \left\{ -\sigma + \frac{247}{2} + |c_2|^2 \left(48 - \frac{9}{(18 |c_0| |c_2|)^2} \right) \right\} + \\ + |c_2| \left(\frac{1}{12 |c_0| |c_2|} - \frac{|c_2|}{18 |c_0|} \right) = 0, \\ |c_0| \left(\frac{1}{36 |c_0| |c_2|} + \frac{|c_2|}{18 |c_0|} \right) + |c_2| \left\{ -\sigma + \right. \\ \left. + \frac{343}{2} - \frac{9}{(18 |c_0| |c_2|)^2} + |c_2|^2 \left(-48 + \frac{9}{(18 |c_0| |c_2|)^2} \right) \right\} = 0, \\ |c_0|^2 + |c_2|^2 = 1,$$

которая сводится к решению следующих уравнений

$$\sigma + 48 |c_2|^2 = \frac{1}{18} + \frac{343}{2}, \quad \sigma - 48 |c_2|^2 = \frac{1}{18} + \frac{247}{2}. \quad (89)$$

Из (89) находим, что

$$\sigma_5^{(2)} = 147 + \frac{5}{9}, \quad (90)$$

$$|c_0| = |c_2| = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

и, следовательно,

$$\cos(\varphi_2 - \varphi_0) = \frac{1}{9}.$$

Таким образом, соответствующие (90) коэффициенты разложения (53) имеют вид

$$c_{0,5}^{(2)} = \frac{1 \pm 4\sqrt{5}i}{9\sqrt{2}}, \quad c_{1,5}^{(2)} = 0, \quad c_{2,5}^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (91)$$

Остальные случаи рассматриваются аналогично. Во втором случае находим число

$$\sigma_4^{(2)} = 145 - \frac{1}{81} \quad (92)$$

и коэффициенты

$$c_{0,4}^{(2)} = \pm \frac{\sqrt{22}i}{9}, \quad c_{1,4}^{(2)} = \frac{\sqrt{59}}{9}, \quad c_{2,4}^{(2)} = 0. \quad (93)$$

В третьем случае находим число (92) и коэффициенты

$$c_{0,4}^{(2)} = 0, \quad c_{1,4}^{(2)} = \frac{\sqrt{59}}{9}, \quad c_{2,4}^{(2)} = \pm \frac{\sqrt{22}i}{9}. \quad (94)$$

В четвертом случае находим число

$$\sigma_3^{(2)} = 145 - \frac{1}{33} \quad (95)$$

и коэффициенты

$$c_{0,3}^{(2)} = \frac{\pm\sqrt{5} + \sqrt{24}i}{\sqrt{66}}, \quad c_{1,3}^{(2)} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{66}}, \quad c_{2,3}^{(2)} = \frac{\pm\sqrt{5} - \sqrt{24}i}{\sqrt{66}}; \quad (96)$$

$$c_{0,3}^{(2)} = \frac{\pm\sqrt{5} - \sqrt{24}i}{\sqrt{66}}, \quad c_{1,3}^{(2)} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{66}}, \quad c_{2,3}^{(2)} = \frac{\pm\sqrt{5} + \sqrt{24}i}{\sqrt{66}}. \quad (97)$$

Наконец, в пятом случае находим два числа (90), (95), а также коэффициенты

$$c_{0,5}^{(2)} = \pm \frac{\sqrt{5}i}{3\sqrt{2}}, \quad c_{1,5}^{(2)} = \frac{2}{3}, \quad c_{2,5}^{(2)} = \pm \frac{\sqrt{5}i}{3\sqrt{2}}. \quad (98)$$

и

$$c_{0,3}^{(2)} = \frac{\pm\sqrt{5} + \sqrt{24}i}{\sqrt{66}}, \quad c_{1,3}^{(2)} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{66}}, \quad c_{2,3}^{(2)} = \frac{\pm\sqrt{5} - \sqrt{24}i}{\sqrt{66}}; \quad (99)$$

$$c_{0,3}^{(2)} = \frac{\pm\sqrt{5} - \sqrt{24}i}{\sqrt{66}}, \quad c_{1,3}^{(2)} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{66}}, \quad c_{2,3}^{(2)} = \frac{\pm\sqrt{5} + \sqrt{24}i}{\sqrt{66}}. \quad (100)$$

Справедлива

Теорема 5. При $p = 2$ собственные значения задачи (31), (32), отвечающие комплексным собственным функциям, имеют вид (4), (95), (92), (90). Соответствующие собственные функции определяются равенствами (53), (99), (100), (96), (97); (93), (94); (91), (98).

Таким образом, в данной работе найдены асимптотические собственные значения и асимптотические собственные функции для оператора Хартри вблизи верхних границ спектральных кластеров. Отметим, что использованные в работе методы носят общий характер. Они применимы не только в случае оператора Хартри, но и при изучении более сложных нелинейных уравнений с сингулярными ядрами.

Дополнение

Данное дополнение содержит доказательство теоремы 1, относящейся к теории специальных функций. Начнем с асимптотики полинома Лежандра. Поскольку полином Эрмита имеет вид [23]

$$H_k(\tau) = \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^j k!}{j!(k-2j)!} (2\tau)^{k-2j},$$

где $\lfloor \alpha \rfloor$ — целая часть числа α , то заменяя в равенстве

$$\frac{d^{2\ell-k}}{dx^{2\ell-k}} (1-x^2)^\ell = (-1)^\ell \sum_{j=0}^{\lfloor k/2 \rfloor} \frac{(-1)^j \ell! (2\ell-2j)!}{(\ell-j)! j! (k-2j)!} x^{k-2j}$$

факториалы по формуле Стирлинга, а также разлагая функцию $(1-x^2)^{(\ell-k)/2}$ с помощью формулы Тейлора, имеем:

$$P_\ell^{\ell-k}(\cos \theta) = \frac{(-1)^k \ell^{\ell-k/2} 2^{\ell-k+1/2} e^{-\ell}}{k!} e^{-\tau^2/2} \left\{ H_k(\tau) + \right. \\ \left. + O\left(\frac{\tau^4+1}{\ell} H_k(\tau)\right) + O\left(\frac{|\tau|^3+1}{\ell} H'_k(\tau)\right) \right\}.$$

Здесь $\tau^4 \ll \ell$.

Чтобы найти асимптотику полинома Лагерра, воспользуемся интегральными представлениями [23]:

$$L_n^s(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|\omega|=\rho} \frac{e^{-x\omega/(1-\omega)}}{(1-\omega)^{s+1} \omega^{n+1}} d\omega, \quad (101) \\ H_n(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{|z|=R} e^{2xz-z^2} dz.$$

Здесь $\rho < 1$, контуры интегрирования ориентированы против часовой стрелки. Делая в интеграле (101) замену $\omega = z/\sqrt{\ell}$ и разлагая далее функции по формуле Тейлора, имеем:

$$L_{n_r}^{2\ell+1}\left(\frac{r}{\varepsilon n}\right) = \frac{n_r!}{2\pi i} \oint_{|\omega|=\rho} \frac{e^{-[2(\ell-n_r-1)+2\sqrt{\ell}s+O(s/\sqrt{\ell})+O(1/\ell)]\omega/(1-\omega)}}{(1-\omega)^{2\ell+2} \omega^{n_r+1}} d\omega = \\ = \frac{\ell^{n_r/2} n_r!}{2\pi i} \oint_{|z|=\sqrt{\ell}\rho} \frac{e^{-2sz-z^2}}{z^{n_r+1}} \left[1 + O\left(\frac{(2n_r+4)z - 2sz^2 - 4z^3/3}{\sqrt{\ell}}\right) \right] dz = \\ = \ell^{n_r/2} (-1)^{n_r} \left[H_{n_r}(s) + O\left(\frac{|s|^3+1}{\sqrt{\ell}} H_{n_r}(s)\right) + O\left(\frac{s^2+1}{\sqrt{\ell}} H'_{n_r}(s)\right) \right].$$

Здесь $s^6 \ll \ell$.

Чтобы получить формулу (16), остается разложить функцию $r^\ell e^{-r/(2\varepsilon n)}$ вблизи точки $r = a$ и применить к входящим в (13), (14) факториалам формулу Стирлинга. Теорема доказана.

Автор благодарен М.В.Карасеву за привлечение внимания к данной задаче, а также за ценные вопросы и замечания.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 12-01-00627) и при частичной финансовой поддержке Совета по грантам при Президенте РФ (проект НШ-2081.2014.1).

Список литературы

- [1] Боголюбов Н. Н. Об одной новой форме адиабатической теории возмущений в задаче о взаимодействии частицы с квантовым полем // УМЖ, 1950, **2** (2), 3–24.
- [2] Пекар С. И. Исследования по электронной теории кристаллов // Гостехиздат, М., 1951, 258 стр.
- [3] Питаевский Л. П. Конденсация Бозе-Эйнштейна в магнитных ловушках. Введение в теорию // УФН, 1998, **168** (6), 641–653.
- [4] Хартри Д. Р. Расчеты атомных структур // ИЛ, М., 1960, 271 стр.
- [5] Achmanov S. A., Hocklov R. V., Suchorukov A. P. Self-focusing, self-defocusing and self-modulation in nonlinear medium // Laserhandbuch, Holland-press, 1972, **2**, 5–108.
- [6] Шифф Л. Квантовая механика // ИЛ, М., 1957, 473 стр.
- [7] Lieb E. H., Simon B. The Hartree-Fock theory for Coulomb systems // Commun. Math. Phys., 1977, **53** (3), 185–194.
- [8] Lions P. L. Solutions of Hartree-Fock equations for Coulomb systems // Commun. Math. Phys., 1987, **109** (1), 33–97.
- [9] Карасев М. В., Осипов Ю. В. Собственные функции уравнения Хартри-Фока, не обладающие сферической симметрией // ТМФ, 1982, **52** (2), 263–269.
- [10] Лахно В. Д. (ред.) Возбужденные поляронные состояния в конденсированных средах // ОНТИ НЦБИ АН СССР, Пущино, 1990, 144 стр.
- [11] Давыдов А. С. Солитоны в молекулярных системах // Наукова думка, Киев, 1984, 288 стр.
- [12] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции // Наука, М., Т. 3, 1967, 300 стр.
- [13] Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях // Наука, М., 1977, 384 стр.
- [14] Карасев М. В. Квантовая редукция на орбиты алгебр симметрий и задача Эренфеста // Препринт ИТФ-87-157Р, ИТФ АН УССР, Киев, 1987, 38 стр.
- [15] Вакуленко С. А., Маслов В. П., Молотков И. А., Шафаревич И. А. Асимптотические решения уравнения Хартри, сосредоточенные при $\hbar \rightarrow 0$ в малой окрестности кривой // Доклады РАН, 1995, **345** (6), 743–745.
- [16] Карасев М. В., Перескоков А. В. Асимптотические решения уравнений Хартри, сосредоточенные вблизи маломерных подмногообразий. I. Модель с логарифмической особенностью // Изв. РАН, Сер. матем., 2001, **65** (5), 33–72.
- [17] Карасев М. В., Перескоков А. В. Асимптотические решения уравнений Хартри, сосредоточенные вблизи маломерных подмногообразий. II. Локализация в плоских дисках // Изв. РАН, Сер. матем., 2001, **65** (6), 57–98.

- [18] Перескоков А. В. Асимптотические решения двумерных уравнений Хартри, локализованные вблизи отрезков // ТМФ, 2002, **131** (3), 389–406.
- [19] Белов В. В., Литвинец Ф. Н., Трифонов А. Ю. Квазиклассические спектральные серии оператора типа Хартри, отвечающие точке покоя классической системы Гамильтона-Эренфеста // ТМФ, 2007, **150** (1), 26–40.
- [20] Перескоков А. В. Квазиклассическая асимптотика спектра оператора типа Хартри вблизи верхних границ спектральных кластеров // ТМФ, 2014, **178** (1), 88–106.
- [21] Перескоков А. В. Квазиклассическая асимптотика спектра вблизи верхних границ спектральных кластеров для оператора типа Хартри // НМФМ, 2014, **10** (1), 77–112.
- [22] Karasev M. V. Noncommutative algebras, nano-structures, and quantum dynamics generated by resonances. I. // In book: Karasev M. (ed), *Quantum Algebras and Poisson Geometry in Mathematical Physics*, Amer. Math. Soc. Trans. Ser. 2, Providence, RI, 2005, **216**, 1–18; II. // *Adv. Stud. Contemp. Math.*, 2005, **11** (1), 33–56; III. // *Russ. J. Math. Phys.*, 2006, **13** (2), 131–150.
- [23] Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции // Наука, М., Т. 2, 1974, 296 стр.
- [24] Сеге Г. Ортогональные многочлены // Физматлит, М., 1962, 500 стр.
- [25] Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. Элементарные функции // Наука, М., 1981, 800 стр.

**SEMICLASSICAL ASYMPTOTICS OF THE HARTREE
OPERATOR SPECTRUM NEAR THE UPPER
BOUNDARIES OF SPECTRUM CLUSTERS.
ASYMPTOTIC SOLUTIONS
CONCENTRATED NEAR CIRCLE**

A.V. Pereskokov

*NRU "Moscow Power Engineering Institute", MIEM NRU
"Higher School of Economics"*

pereskokov62@mail.ru

Received 05.08.2014

The eigenvalue problem for the Hartree operator with Coulomb interaction and with a small parameter at the nonlinearity is considered. The asymptotic eigenvalues and eigenfunctions near the upper boundaries of the spectral clusters are calculated. The leading term of expansion is a solution of the two-dimensional oscillator problem near the circle, where the solution is concentrated.