

О РАСПРОСТРАНЕНИИ ТЕОРИИ НЕРАВНОВЕСНЫХ ФАЗОВЫХ ПЕРЕХОДОВ НА ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНЫЙ ПЕРЕХОД

Е.А. Лукашев³, Н.Н. Яковлев³, Е.В. Радкевич¹, О.А. Васильева²

¹*Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова*

²*Московский Государственный Строительный Университет*

³*Тураевское машиностроительное конструкторское бюро "Союз"*

evrad07@gmail.com, vasiljeva.ovas@yandex.ru
elukashov@yandex.ru, amntksoyuz@mail.ru

Поступила 08.09.2015

Приводится реконструкция начальной стадии ламинарно-турбулентного перехода, механизмом которого является спинодальный распад(диффузионное расслоение)

УДК 517, 517.9, 536

1 Введение

В этой статье мы продолжим провокации[25]-[29] классических моделей, описывающих начальные стадии неравновесных процессов с избыточной энергией на примере проблемы ламинарно-турбулентного перехода. При рассмотрении устойчивости плоскопараллельных течений, течений в трубе и в пограничном слое в [5] отмечается, что именно эти течения являются наиболее важными для приложений. Однако для иллюстрации, например, метода возмущений рассматриваются течения между вращающимися цилиндрами и свободная конвекция между двумя плоскостями постоян-

ной температуры. В этих двух случаях "метод возмущений приводит к относительно простым задачам на собственные значения, позволяющим получить вполне законченные результаты. Что же касается до течений в трубах и в пограничном слое, то здесь применение метода возмущений наталкивается на очень значительные трудности, которые до сих пор никак еще нельзя считать полностью преодоленными" [5]. Эта ситуация связана с тем, что при моделировании этих двух специфических течений в рамках механики сплошной среды введение дополнительных сил (центробежной в первом случае и архимедовой во втором) легко обосновывается на уровне физической модели. В случае же трубы и пограничного слоя трудности возникают на уровне формулировки физической модели, т.е. в данном случае именно в рамках механики сплошной среды. При построении теорий турбулентности преодоление этих трудностей достигается за счет использования кинетических подходов в рамках моделей, которые условно можно отнести к моделям типа "рождения - гибели". Это диктует принятие ряда постулатов, которые на уровне физической модели требуют дополнительного обоснования.

Математические модели, представляющие эволюцию неустойчивых систем, могут быть построены в рамках механики, кинетики и термодинамики. Но при этом каждый из подходов ограничен системой исходных понятий, разработанной применительно к решению конкретных задач: механических и электромеханических, гидродинамических, кинетических и многих других. Наиболее общим среди подходов является термодинамический (энергетический), но его использование должно предполагать, что исследуемую систему можно отнести к разряду термодинамически неустойчивых систем. К таким относятся системы, в которых происходят неравновесные фазовые переходы. В связи с такой постановкой проблемы представляет интерес исследовать возможность использования теории неравновесных фазовых переходов к гидродинамическим явлениям, в частности, к описанию ламинарно-турбулентного перехода.

Следует отметить, что появление новых математических понятий и приемов исследования позволяет по новому взглянуть на известные объекты и открыть неизвестные ранее их стороны. В частности, это относится к турбулентности, для исследования и моделирования которой использовали теорию динамических систем, понятие аттрактора, в особенности, странного аттрактора [1], теории бифуркаций и катастроф, теорию фракталов (для турбулентного горения [2]). Однако, как правило, объектом математического моделирования является развитая и стационарная турбулентность, и для ее описания вводятся исходные понятия: пульсации давления, пульсации скорости и др. В тоже время с точки зрения информативности больше дают математические модели зарождения и дальнейшего формирования объекта - процесса, структуры. В отношении турбулентности это отмечалось Рабиновичем М.И. в обзоре [1].

Если в инженерных приложениях математические модели стационарного турбулентного течения дают определенный результат при проведении расчетных исследований, то в случае геофизической гидродинамики используются такие понятия как накачка, энстрофия и др. [3], позволяющие отразить нестационарный характер турбулентного течения. В связи с этим особое значение (и не только из-за прикладной значимости) приобретает моделирование ламинарно-турбулентного перехода, поскольку именно в ходе него формируются различные промежуточные структуры, только в последствии дающие развитое турбулентное течение [4]. Собственно из опытов О. Рейнольдса [5], с которого берет начало теория турбулентности, следовало,

что на характер течения - ламинарное или турбулентное - оказывают возмущения на входе: при малых числах Рейнольдса (Re) они затухают, а течение остается ламинарным, при больших значениях Re возмущения усиливаются, что переводит поток в турбулентный. Тот же характер эволюции возмущений (затухание с различными временами релаксации наблюдался в опытах Клаузера [6] в разных областях пограничного слоя. Такой характер поведения возмущений позволяет заключить, что для описания ламинарно-турбулентного перехода может быть использован математический аппарат теории неравновесных фазовых переходов, поскольку возмущения концентрации однородных смесей эволюционируют аналогично в зависимости от того, какой области фазовой диаграммы соответствует состояние этой системы: стабильной, метастабильной или лабильной.

Ламинарно-турбулентный переход, а также неравновесные фазовые переходы, характеризуются гистерезисом. На начальных стадиях неравновесного фазового перехода формируются промежуточные структуры: пузыри при кипении, капли при конденсации, дендриты при кристаллизации и т.п. Эти структуры являются аккумуляторами избыточной энергии первоначально однородной системы, которой она обладает в силу изменения внешних условий (нагревание, охлаждение). Примером таких систем является также раствор ограниченно растворимых друг в друге жидкостей, которые характеризуются фазовыми диаграммами с верхней или нижней критическими точками, расслоение в котором на две фазы происходит, соответственно, при понижении и повышении температуры; имеются также растворы с двумя критическими точками расслоения.

Структура турбулентного потока также может быть представлена в форме двухфазной системы, образованной "губчатой" структурой турбулентной и нетурбулентной жидкостей [7]. Для иллюстрации этого тезиса процитируем небольшие отрывки из [7].

1) "Согласно установившейся терминологии будем говорить, что области с малыми значениями градиентов скорости или концентрации заполнены нетурбулентной жидкостью, а области с большими значениями градиентов - турбулентной жидкостью. В литературе вместо термина "нетурбулентная" жидкость часто используется выражение "потенциальная" жидкость, т.е. предполагается, что существуют области, в которых течение потенциально."

2) "Можно предположить, что поверхность разрыва компактна (т.е. ее точки не выходят за пределы ограниченной пространственной области), а ее площадь бесконечно велика. Такая поверхность, в известной мере, напоминает губку, т.е. образование со множеством внутренних пустот, имеющих широкий спектр характерных размеров, и нечетко определенной внешней границей (существуют тонкие "каналы", соединяющие внутренность образования с внешним пространством). С этой точки зрения колебания внешней границы "губки" можно назвать внешней перемежаемостью, а колебания внутренних каналов - внутренней перемежаемостью."

3) "По-видимому, наиболее точно и вместе с тем просто отражает существо дела модель Новикова и Стюарта, в которой предполагается, что поток можно разбить на n^2 одинаковых кубов, таких, что вся диссипация энергии сосредоточена в γn^2 из них ($0 < \gamma < 1$), а в остальных равна нулю. Предполагается также, что каждый из числа кубов можно снова разбить аналогичным образом, а при $Re \rightarrow \infty$ процесс разбиения можно продолжить неограниченно. Таким образом, в любой точке потока можно найти нетурбулентную жидкость. Характерный размер областей, заполненных этой жидкостью, варьируется от нуля до интегрального масштаба турбулентности. Обла-

сти, занятые турбулентной жидкостью, тесно переплетаются с областями, в которых находится нетурбулентная жидкость. Аналогичные соображения высказаны Мандульбротом, в работах которого для описания структуры турбулентной жидкости использовалось понятие о фракталах".

4) "Экспериментальные данные и результаты их теоретического анализа указывают на то, что количественное определение характеристик перемежаемости связано с рядом принципиальных трудностей. Во-первых, неясно, как определить границы турбулентной жидкости (как уже указывалось, внутрь области, которая на первый взгляд целиком заполнена турбулентной жидкостью, могут проникать тонкие каналы, заполненные нетурбулентной жидкостью). Во-вторых, поскольку при $Re \rightarrow \infty$ вязкие эффекты существенны, по-видимому, в области с нулевым объемом, становится неясным, что такое коэффициент перемежаемости, который обычно понимается как относительная величина объема, заполненного турбулентной жидкостью. В-третьих, возникает вопрос, какая гидродинамическая характеристика наилучшим образом подходит для определения перемежаемости. В самом деле, вблизи турбулентной области всегда найдется нетурбулентная. Если размеры обеих областей одного порядка, то энергии пульсаций также одного порядка, что ясно из работ Ландау и Лифшица [10], Филлипса [1955] (пульсации давления приводят к нелокальному переносу энергии). Следовательно, по характеру пульсаций скорости обе жидкости могут оказаться трудно различимыми."

Отмеченная выше постановка вопроса требует отнесения исследуемого объекта - течения - к классу термодинамических систем: неравновесных и открытых (стационарных или нестационарных). Аналогия различных критических явлений, включая гидродинамические, с неравновесными фазовыми переходами отмечалась Хакеном Г. [8]. Эта аналогия строится с использованием понятий параметра порядка (согласно Ландау Л.Д.), потенциала и функционала Гинзбурга-Ландау. Для обобщения, по аналогии с фазовыми переходами в магнитных системах, вместо намагниченности M вводится обобщенная координата q (параметр порядка). Предполагается, что свободная энергия F равна минимальному своему значению при фиксированном значении q . Разложение в ряд по степеням дает

$$F(q, T) = F(0, T) + F'(0, T)q + \dots + \frac{1}{4!}F''''(0, T)q^4 + \dots$$

При симметрии $F' = F''' = 0$, тогда

$$F(q, T) = F(0, T) + \frac{\alpha}{2}q^2 + \frac{\beta}{4!}q^4.$$

Для движущегося потока термодинамический член, отражающий вклад течения, согласно [9], вводится в виде $w dw$ (w - скорость). Поскольку этот член должен представлять собою произведение интенсивной переменной на дифференциал экстенсивной переменной, то точнее будет записать его в виде $w d(\rho w)$ (w в расчете на единицу объема (ρ - плотность)). Здесь обобщенная координата q имеет смысл удельного расхода ρw . Тогда согласно [8] гидродинамические критические явления должны рассматриваться по аналогии с неравновесными фазовыми переходами. При зависимости q от пространственной координаты $q = q(x)$ свободная энергия такой системы представляется в форме функционала Гинзбурга-Ландау

$$F(q(x), T) = F_0(0, T) + \int d^n x \left(\frac{\alpha}{2} q(x)^2 + \frac{\beta}{4} q(x)^4 + \frac{\gamma}{2} (\nabla q(x))^2 \right).$$

Таким образом, задача распространения этой аналогии на объекты гидродинамики и газовой динамики далека от своего завершения. Для постановки и решения этой задачи следует сравнить ламинарно-турбулентный переход с неравновесными фазовыми переходами в ограниченно смешивающихся и расслаивающихся на фазы жидкостях.

2 Энергетический подход

Этот параграф посвящен феноменологии энергетического подхода в теории неравновесных фазовых переходов. Для инженерных приложений, значительный интерес представляют критические явления типа воспламенение, срыв горения, ламинарно-турбулентный переход и другие. Существуют попытки построения аналогий и обобщения этих, на первый взгляд, разнородных явлений, но, в то же время, обладающих некоторыми общими характерными чертами. Это, прежде всего, гистерезис. Эта и другие общие черты проявляются в том, что к ним применим единый математический аппарат теоретического описания. Например, И.Г. Баренблатт [23] предложил математический аппарат теории горения распространить на моделирование других физических процессов, в частности, на течение полимеров под нагрузкой.

Кроме того, существует подход к такого рода обобщениям с использованием математического аппарата теории неравновесных фазовых переходов [8]. Однако, этот подход строится, как правило, с использованием понятий и приемов статистического описания. Это, в частности, относится и к теории турбулентности - статистическая теория турбулентности (Колмогоров, 1941). Однако стремление к построению строгой и обоснованной теории приводит к тому, что рассматриваются простейшие - идеализированные модели. Но даже в этом случае приходится использовать инженерные подходы с применением приемов теории подобия и размерностей.

Статистический подход предполагает разбиение процесса на элементарные стадии и объекты, после чего из них "суммированием" строится рассматриваемый процесс. Однако часто такое построение обрастает столь большим числом деталей, что сам процесс становится практически не представимым целиком. Тогда говорят о большой сложности задачи. Эта констатация является логическим обоснованием дальнейшего углубления в детали, поскольку уже на стадии элементарных актов не все до конца прояснено. На этом направлении требования к "строгости" построений и полученных результатов выстраиваются в последовательность "степеней строгости" (что интуитивно воспринимается как "степень правдивости" или "истинности").

Физическая строгость не удовлетворяет математиков, инженерная строгость не удовлетворяет физиков. Все это приводит к отдалению от практических приложений. Малую значимость подобного рода результатов для приложений (опытной, экспериментальной части науки) отмечал Д.И. Менделеев [31]. Чрезмерное увлечение все большей и большей детализацией, когда "за деревьями перестают видеть лес", приводит, к конечному счету, к необходимости вернуться к исходным позициям.

Рассмотрение ламинарно-турбулентного перехода следует начать с анализа результатов попыток обобщенного описания критических явлений с использованием

математического аппарата теории неравновесных фазовых переходов, например, так как это представлено у Хакена [8]. В первой (фактически, вводной) главе он проводит аналогию между фазовыми переходами между различными фазовыми состояниями, которые происходят достаточно резко, и переходами в ферромагнетике при увеличении и уменьшении температуры, переходом в режим генерации лазера при увеличении мощности накачки (здесь дважды меняется режим лазерного излучения), переходами в гидродинамических системах, например, при увеличении скорости обтекания твердого тела переход через системы регулярных структур типа двух присоединенных вихрей и дорожки Кармана от ламинарного течения к турбулентному, переходами к колебательному поведению и образованию пространственных структур в системах химических реакций типа реакции Белоусова-Жаботинского, колебаниями в биологических системах, описываемых моделями типа модели "хищник - жертва" Лотки-Вольтерра, и формированием клеточных структур по типу морфогенеза.

Рассмотрение гидродинамических неустойчивостей в [8] ограничено двумя примерами: описанием термоконвекции Бенара и неустойчивости Тейлора для течения Куэтта между двумя вращающимися цилиндрами, а предложенная аналогия с фазовыми переходами использовалась косвенно для интерпретации результатов. Этот ограниченный круг примеров из гидродинамики связан с тем, что, как отмечалось во введении, в основе этих математических моделей лежат физически ясные механические модели, которые позволяют увидеть общие черты с фазовыми переходами. Другой гидродинамический пример - переход к сверхтекучему состоянию жидкого гелия рассматривался Ландау, как фазовый переход второго рода [32].

Беглое рассмотрение двух описаний: микроскопического и макроскопического, приводит Хакена к заключению, что "концепция моды имеет огромное преимущество перед микроскопическим описанием. Вместо необходимости знать все "атомные" координаты (пример - колебания струны) очень многих степеней свободы, нам требуется знать только один или несколько параметров, например, амплитуду моды ... амплитуда мод определяет тип и степень упорядоченности. Поэтому мы называем их параметрами порядка и устанавливаем связь с концепцией параметра порядка в теории фазовых переходов".

Вывод Хакена из этого сравнения достаточно категоричен: "ЭВМ выдает нам таблицы чисел, задающие положения точечных масс как функцию времени. Первый существенный момент заключается в следующем. Эти таблицы довольно бесполезны до тех пор, пока наш мозг не выберет определенные типичные свойства."

Отметим, что развиваемый в рамках теории неравновесных фазовых переходов такой подход приводит к тем же проблемам: стремление добиться большей адекватности с реальными системами заставляет углублять детализацию описания, которое по существу становится микроописанием. Это происходит из-за того, что математическую модель (теорию) стремятся построить на основе наиболее ясных и очевидных принципов, которые должны отражать существенные черты элементарного акта - события. После чего из этих элементарных актов простым суммированием (интегрированием) строят процесс (явление) целиком, и по ходу этого построения приходится явно или неявно добавлять, как правило, нелинейные свойства (взаимодействие между элементами, которые по-началу принимаются как независимые; суммирование - аддитивность не может дать нелинейных свойств, взаимодействие - это мультипликативность).

Кратко перечислим примеры, рассмотренные Хакеном, для того, чтобы провести аналогию между различными явлениями и фазовыми переходами. Для построения

этой аналогии нужно сконструировать потенциал (кривую зависимости энергии объекта от параметра состояния, который фиксируется значением экстенсивной переменной).

ПРИМЕР 1 (Накачка лазера). Для распространения теории фазовых переходов на лазеры Хакен использует феноменологический подход, исходя из известных фактов, установленных экспериментально: изменение со временем числа фотонов или скорость "рождения" (производства) фотонов, определяется уравнением "Прирост" - "Потери":

$$\dot{n} = \text{Прирост} - \text{Потери}. \quad (1)$$

Прирост вызывается стимулированным излучением (энергия извне); прирост пропорционален числу имеющихся фотонов и числу возбужденных атомов: N : Прирост = GNn , где G - коэффициент усиления (может быть получен из микроскопической теории).

Потери обусловлены уходом фотонов через торцы лазера; принимается допущение, что скорость ухода фотонов пропорциональна числу имеющихся фотонов: Потери Потери = $2\kappa n$, где $2\kappa = \frac{1}{t_0}$, t_0 - время жизни фотона в лазере. Это уравнение (уравнение для потерь) делает нелинейным следующее обстоятельство: число возбужденных атомов уменьшается за счет испускания фотонов; в отсутствие лазерной генерации число возбужденных атомов поддерживается внешней накачкой на постоянном уровне N_0 , но при лазерной генерации число возбужденных атомов будет меньше. Это уменьшение ΔN пропорционально числу имеющихся фотонов (число рождающихся фотонов равно числу погибающих возбужденных атомов), поскольку эти фотоны производятся за счет возвращения возбужденных атомов в основное состояние, поэтому число возбужденных атомов равно $N = N_0 - \Delta N$, $\Delta N = \alpha n$.

Из приведенных выше соотношений получаем упрощенную модель лазерной генерации

$$\dot{n} = -kn - k_1 n^2, \quad (2)$$

где $k = 2\kappa - GN_0$, $k_1 = \alpha$. Если N_0 - мало, то $k > 0$, а при N_0 достаточно большом $k < 0$.

Равенство $GN_0 = 2\kappa$ ($k = 0$) определяет порог лазерной генерации, т.е. $k = 0$ определяет бифуркацию.

Этот ход рассуждений при построении упрощенной модели лазера полностью соответствует формальной химической кинетике. Дополнение модели деталями приведет к ее усложнению, но характерные черты качественного поведения останутся такими же. Здесь активными частицами, накопителями энергии являются фотоны, которые, возбуждая атомы, производят другие фотоны - размножение с коэффициентом усиления G (или с коэффициентом размножения как в цепных реакциях: $K > 1$, $K = k + 1$, т.е. из условия $k > 0$ следует $K > 1$, а из условия $k < 0$ следует $K < 1$; здесь фиксируется либо преобладание производства над гибелью активных частиц, либо наоборот, преобладание гибели над производством; т.е. либо - двигатель идет в разнос, либо - двигатель глохнет [33], достичь равновесия этих процессов или стационарности можно только, если ввести прогрессивную "гибель", так, чтобы число имеющихся активных частиц сильно уменьшалось при росте числа частиц).

ПРИМЕР 2 (Автокаталитическая реакция). В химической реакции, проходящей через стадию образования промежуточных соединений: $A + B \Rightarrow 2A$, $A \Rightarrow C$; накопление частиц A приводит к ускорению реакции (A -промежуточные активные частицы). Одна частица A перед своей "гибелью" $A \rightarrow C$ производит две частицы себе подобных $A + B = 2A$.

ПРИМЕР 3 (Модель "хищник - жертва" Лотки-Вольтерра). Эта модель относится к тому же классу феноменологических кинетических моделей. К этому же классу принадлежит также модель лампового генератора Ван-дер-Поля (накопитель - индуктивность, или в RC -генераторе - конденсатор; усилитель - электронная лампа; здесь вместо фотонов лазера электроны; обеспечивается та же закономерность: больше ток, больше электронов, с последующим ограничением анодного тока лампы - тока насыщения).

Эти примеры иллюстрируют следующую ситуацию в области математического моделирования. Первична феноменологическая модель, которая может быть далее использована, первое, в уточнении постановки физической задачи - переход к большей детализации (как правило, это переход на статистический язык), или, второе, при постановке инженерной задачи - построение качественной картины, представляющей характерные черты поведения объекта моделирования (как правило, это достаточно сложная конструкция, в которой должен быть реализован моделируемый процесс).

Эти примеры приведены еще и для того, чтобы показать, что построение некоторого теоретического описания стартует с модели макросистемы, для которой уравнения (движения, потенциал) выводятся феноменологически (например, из механики). То же и для кинетической теории газов: упругое столкновение шаров (упругое - чтобы система была консервативной). Если от описания столкновения шаров удастся прийти к уравнению состояния идеального газа, то это - большой прогресс, но в нем присутствует только одно: от одной феноменологии пришли к другой. Это доказывает только единство мира, но не более того.

Кроме того, для иллюстрации этой методологии можно привести пример из теории горения. Раушенбах Б.В. [34], чтобы объяснить неустойчивость горения - переход в режим вибрационного горения, вводит обратную связь, что явным образом оговаривает. Но он отказывается дать, что также явно оговаривает, физический механизм ее определяющий. Кроме того, Раушенбах для построения модели вибрационного горения принимает модель осциллятора Гельмгольца, т.е. изначально постулируется наличие накопителя энергии, который затем получает энергию от процесса горения. Модель вибрационного горения Раушенбаха - это макроскопическая модель для процесса целиком, которая строится с помощью известных уравнений, т.е. изначально предполагается (постулируется), что объект и его эволюция этими уравнениями описываются. Правомочность принятия постулата обосновывается апостериори, т.е. если поведение объекта качественно подобно поведению модели, то постулат считается обоснованным (и здесь нет нужды прибегать к "строгим" доказательствам, например, используя приемы статистической физики; объект "сам говорит за себя").

Эта методология близка к решению практически важных задач (что отмечал Раушенбах Б.В.) - обеспечение устойчивой работы камер сгорания воздушно-реактивных и ракетных двигателей. В последующем изложении станет ясно, что при распространении аналогии неравновесных фазовых переходов на ламинарно-турбулентный переход, в целом, мы будем придерживаться такого же подхода. Однако, при этом мы не

пойдем по пути выбора подходящей физической модели из числа имеющихся, а будем строить обобщенную физическую модель, которая предполагает использование системы физических понятий, пригодных для любого физического (или другого) явления, характерными свойствами которого являются гистерезис и "срывные" (гашение пламени) или "взрывные" (воспламенение) свойства.

Первоначально обобщенную физическую модель таких явлений будем строить на примере ламинарно-турбулентного перехода. При этом попытаемся избежать того, чтобы аналогию подменить "похожестью", если даже в случае последней используются похожие уравнения (поскольку уравнения всегда есть уравнения сохранения, даже если какая-то величина и не сохраняется, но при этом сохраняется другая, как в уравнении для импульса).

Кроме уравнений, для обобщенной физической модели должны быть введены общие для всех систем понятия. Из этого ясно, что такими понятиями могут быть только энергетические (термодинамические); все другие понятия: механические в механике, химические в химии, этому условию не удовлетворяют. Кроме того, ясно, что термодинамическое описание изначально отказывается от детальности, т.е. часть специфической информации теряется, но за счет этого достигается общность. После получения решения обобщенной задачи оно - это решение - может быть "насыщено" требуемой спецификой.

Здесь, кроме того, следует кратко остановиться на приемах исследования подобных систем, нашедших описание в литературе. В окрестности точек, где нарушается линейная устойчивость, строится потенциал, который затем разлагается в ряд Тейлора с сохранением членов до четвертого порядка. Далее анализируется при каких условиях на коэффициенты членов будет реализован тот или иной сценарий поведения модели. Однако, при таком анализе формы потенциала дается только математическая трактовка получаемых результатов, но для инженерных приложений важно именно то, что физически означает, например, подчинение коэффициентов ряда тем или иным неравенствам. В этом отношении можно констатировать, что таким путем демонстрируются не результаты, а инструментарий. Исходная модель для построения инструментария - модель осциллятора, получившая название "мода". Интенсивная эксплуатация этого понятия связана с простым представлением решения для линейных систем дифференциальных уравнений в виде суперпозиции нескольких решений.

2.1 Переходы неравновесно фазовый и ламинарно-турбулентный

Продолжим наши исследования возможности распространения теории неравновесных фазовых переходов в форме теории спиноподобного распада Кана-Хилларда на ламинарно-турбулентный переход. Для наибольшей наглядности рассмотрим наиболее простой пример: плоскопараллельный поток [10]. Все слои плоскопараллельного потока имеют скорость либо большую (ближе к ядру потока), либо меньшую (ближе к стенке канала) средней, и только (условно) два слоя будут иметь скорость, равную средней. Такая система с термодинамической точки зрения является неоднородной, и поэтому обладает избыточной свободной энергией. Как любая термодинамическая система движущийся поток стремится к минимуму свободной энергии. В общем случае это стремление может быть реализовано либо за счет уменьшения внутренней энергии или энтальпии, либо за счет увеличения энтропии.

Поскольку ламинарно-турбулентный переход является самопроизвольным процессом, то, как любой термодинамический процесс, он переводит термодинамическую систему из одного устойчивого состояния, характеризуемого F_{max} , в другое устойчивое состояние, также характеризуемое F'_{max} . Так как при приближении к ламинарно-турбулентному переходу избыточная свободная энергия $F = \Delta F = F_{max} - F$ достаточно велика, то данный переход должен быть отнесен к разряду неравновесных переходов.

Кроме того, поскольку, как отмечалось выше, согласно [7], структуру потока после перехода, т.е. потока с развитой турбулентностью, можно представить как двухфазную систему (смесь турбулентной и нетурбулентной жидкостей с размытой границей между фазами и образующую губчатую - пористую, дисперсную структуру с размытым распределением по размерам и по энергиям), то и поэтому признаку ламинарно-турбулентный переход должен быть отнесен к классу неравновесных фазовых переходов. Это является обоснованием использования для его теоретического описания формализма (математического аппарата) теории неравновесных фазовых переходов.

Неравновесный фазовый переход может происходить либо по механизму нуклеации, либо по механизму спиnodального распада, соответственно, когда исходная термодинамическая система находится в метастабильном или в лабильном состоянии. Для описания фазового перехода, реализующегося по механизму нуклеации, используется подход Дж. Гиббса, центральным понятием которого является критический зародыш (гиббсовский зародыш). Критический зародыш, как флуктуация состава (плотности), характеризуется малым размером, но большой разницей в составе с маточной фазой (амплитудой флуктуации состава или плотности). Фазовый переход из лабильного состояния не требует наличия зародышей, превышающих по размеру критический, и реализуется по механизму спиnodального распада путем роста флуктуаций малых по отклонению от состава исходной однородной системы, но больших по размеру.

В гидродинамической системе затухание флуктуаций свидетельствует о нахождении потока, как термодинамической системы, либо в области стабильного состояния однородной системы, либо в области метастабильности, но при этом возмущения не превышают по интенсивности некоторый критический уровень - критический зародыш "турбулентной" жидкости. Если возмущения течения способствуют переходу потока из ламинарного состояния в турбулентное, то это говорит о том, что либо возмущения велики по интенсивности и поток находится в метастабильном состоянии, либо поток находится в лабильном состоянии. В последнем случае турбулизация потока происходит по механизму спиnodального распада.

Описание турбулентного течения, как двухфазной системы, состоящей из двух взаимопроникающих жидкостей (турбулентной и нетурбулентной) [7] с диффузными границами, соответствует описанию структур, формирование которых протекает по механизму спиnodального распада. В теории спиnodального распада Кана-Хилларда термодинамическими переменными являются концентрация и градиент концентрации; для потока это будет соответствовать скорости и градиенту скорости.

Ламинарно-турбулентный переход наступает при увеличении скорости потока, т.е. при увеличении гидродинамической составляющей полной энтальпии. Этому соответствуют фазовые переходы в системах ограниченно растворимых жидкостей с нижней критической точкой расслоения (в таких системах расслоение наступает при повышении температуры, что аналогично повышению энтальпии).

Кратко, термодинамика процесса расслаивания в терминах фазовых диаграмм и термодинамических неравенств может быть представлена следующим образом. Однородная система - раствор из двух ограниченно смешивающихся жидкостей может самопроизвольно образовываться при реализации следующих термодинамических соотношений: (1) $\Delta H > 0$, $\Delta S > 0$ -возрастания энтальпии и энтропии по потоку; в этом случае процесс растворения эндотермический, т.е. сопровождается поглощением теплоты, и реализуется за счет увеличения энтропии, при этом в силу соотношения Гиббса-Гельмгольца для приращения свободной энергии Гиббса $\Delta G = \Delta H - TdS$ должно выполняться неравенство $TdS > \Delta H$; эти системы имеют на фазовой диаграмме верхнюю критическую точку расслоения (ВКТР); (2) $\Delta H < 0$, $\Delta S < 0$; в этом случае процесс растворения экзотермический, т.е. сопровождается выделением теплоты, и реализуется за счет снижения энтальпии системы, при этом должно выполняться неравенство $|\Delta H| > |TdS|$; эти системы имеют на фазовой диаграмме нижнюю критическую точку расслоения (НКТР).

Обратные процессы - расслоения на фазы однородной системы, если система при изменении внешних условий (понижение или повышение температуры), также будут самопроизвольными и должны подчиняться условию $\Delta G < 0$. Для систем типа(1) с ВКТР процесс расслоения на фазы с понижением температуры сопровождается выделением теплоты ($\Delta H < 0$) и уменьшением энтропии ($\Delta S < 0$), при этом должно выполняться условие $|\Delta H| > |TdS|$, т.е. самопроизвольность процесса обеспечивается ростом упорядоченности системы в целом. Для систем типа(2) с НКТР процесс расслоения на фазы с ростом температуры сопровождается поглощением теплоты ($\Delta H > 0$) и увеличением энтропии ($\Delta S > 0$), при этом должно выполняться условие $TdS > \Delta H$, т.е. самопроизвольность этого процесса обеспечивается снижением упорядоченности системы в целом.

Эти расслаивающиеся двухкомпонентные системы имеют аналоги среди однокомпонентных систем, в которых реализуются неравновесные фазовые переходы: для систем вида (1) это конденсация переохлажденного пара или кристаллизация переохлажденной жидкости ($\Delta H < 0$, $\Delta S < 0$), для систем вида (2) это вскипание перегретой жидкости ($\Delta H > 0$, $\Delta S > 0$).

Переход от ламинарного течения к турбулентному происходит при росте скорости потока, т.е. при увеличении гидродинамической составляющей энтальпии и аналогичен росту температуры для расслаивающихся систем с НКТР. Эта аналогия позволяет заключить, что при переходе от ламинарного течения к турбулентному $\Delta H > 0$ и $\Delta S > 0$, т.е. происходит "поглощение" энтальпии потока (гидродинамической составляющей) и преобразование ее в форму хаотического вихревого движения: снижение энтальпии и увеличение энтропии потока. Увеличение суммарной энтропии потока происходит не только в результате увеличения молекулярной составляющей энтропии при его торможении, но и за счет увеличения вихревой составляющей энтропии - хаотической формы аккумулялирования энергии.

Таким образом, в формулируемом термодинамическом подходе для характеристики движущегося потока используется не только гидродинамическая составляющая полной энтальпии, но и вводится гидродинамическая составляющая "полной"энтропии (последняя включает хаотическую форму аккумулялирования энергии в виде двух составляющих молекулярной и вихревой).

Развиваемый подход корреспондируется с концепцией термодинамики иерархических систем, общие принципы построения которой разработаны в работах Г.П. Гладышева [11]. Правомерность этой концепции обусловлена тем, что фазовые переходы

происходят не только в молекулярных системах: жидкость - пар (испарение, конденсация), жидкость - твердое тело (плавление, кристаллизация), пар - твердое тело (возгонка, конденсация), но и в системах надмолекулярного структурного уровня: критическая опалесценция, коалесценция, коагуляция и золь-гель переход в дисперсных системах [15], переход клубок-глобула в полимерных системах [16, 17], расслаивание в полимерных системах с формированием надмолекулярных структур и структур типа взаимопроникающих сеток [18–19], спиноподобный распад твердых растворов [20], критическая опалесценция [22]. В рамках этого обобщения "переходные" и развитые (хаотичные) турбулентные структуры должны быть отнесены к надмолекулярным структурам мезомасштабного структурного уровня.

Для фазовых переходов, протекающих с формированием надмолекулярных структур, как хорошо известно, применимы принципы термодинамики. В связи с этим представляет интерес распространить эти принципы на ламинарно-турбулентный переход. На первом этапе необходимо изучить потенциальные возможности рассматриваемой системы, т.е. термодинамическую обусловленность процесса (в данном случае - расслоения на фазы турбулентной и нетурбулентной жидкостей первоначально однородной системы). На втором этапе следует исследовать кинетические "траектории" эволюции системы от начального к конечному состоянию.

Чтобы изначально не загромождать исследуемый объект деталями, следует выделить из него только гидродинамическую составляющую, т.е. в терминах термодинамики из полной энтальпии потока выделить гидродинамическую составляющую, оставив вне рассмотрения (на этом этапе) физическую и химическую (для горения) составляющие.

В последующем, естественно, необходимо будет ввести взаимодействие между подсистемами молекулярной и гидродинамической. Если такой иерархический подход окажется работоспособным (в рамках своих возможностей), то его можно будет распространить и на более сложные системы (сжимаемый газ, реагирующие газы). Результатом на этом этапе, как предполагается, должно стать качественно верное описание эволюции гидродинамических систем. В случае положительного результата предполагается изучить вопрос о том, как данный (термодинамический) подход корреспондируется с другими подходами, используемыми в теории турбулентности в рамках механики сплошной среды.

Таким образом, предполагается, что существует глубокая аналогия между неравновесными фазовыми переходами и ламинарно-турбулентным переходом. Это позволяет распространить термодинамический подход, в частности подход теории Кана-Хилларда, на это гидродинамическое явление. В связи с этим возникает задача построения потенциала Гинзбурга-Ландау для гидродинамической системы. Этот потенциал ниже конструируется феноменологически. В последующем, для обоснования формы такого представления могут быть использованы статистические приемы.

2.2 Гидродинамический потенциал (случай адиабатического процесса)

Под адиабатическим гидродинамическим процессом в данном случае понимается процесс, который не имеет источников и стоков теплоты, т.е. теплота не участвует в формировании хаотической вихревой структуры потока ("механизм Крокко") и вихревая структура путем диссипации не дает вклада в теплоту потока ("меха-

низм Ричардсона"). Эти механизмы в последующем должны быть отражены, но для тестирования возможностей формулируемого подхода их следует исключить.

Исходные положения энергетического подхода, проиллюстрированные выше на простейшем примере, далее использованы для построения математической модели ламинарно-турбулентного перехода.

Для неоднородного плоскопараллельного потока, имеющего скорости слоев w , можно определить усредненную макроскорость потока U , определяемую моделью сплошной среды, и относительную локальную микроскорость $u = w - U$, которую по аналогии с функцией в уравнении Шредингера, мы не можем определить детерминированно, но кинетическую энергию $\frac{1}{2}u^2 = E$, равную внутренней энергии, мы определяем как переменную сплошной среды.

Термодинамическую систему "движущийся поток" глобально следует характеризовать кинетической энергией $\frac{1}{2}U^2$ ламинарного потока. Величина $\frac{1}{2}\rho U^2$ дает ту часть энтальпии потока, которая характеризует его как термодинамическую систему ламинарного потока. Грубо говоря, инструментом замера неоднородного потока у нас служат параметры механики сплошной среды. В этих параметрах неоднородной среде отвечает ламинарный поток с избыточной энергией ("беременный" турбулизацией).

В адиабатическом процессе работа затрачивается на увеличение внутренней энергии рабочего тела, т.е.

$$E = c_v(T - T_0)$$

другая форма уравнение адиабатического процесса:

$$\frac{P}{\rho^\gamma} = \frac{P_0}{\rho_0^\gamma} = \text{const}, \quad \frac{P}{P_0} = \frac{\rho^\gamma}{\rho_0^\gamma}, \quad \frac{\rho}{\rho_0} = \frac{P^{1/\gamma}}{P_0^{1/\gamma}}.$$

Здесь

$$U_0, \rho_0, P_0, T_0, \quad (3)$$

параметры однородного потока (скорость, плотность, давление и температура).

Используем первую форму уравнения адиабатического процесса. Уравнение состояния идеального газа

$$\frac{P}{\rho} = RT,$$

где $R = c_p - c_v$, $\frac{c_p - c_v}{c_v} = \gamma - 1$, откуда

$$\frac{c_v}{R} = \frac{1}{\gamma - 1}.$$

Таким образом,

$$T = \frac{1}{R} \frac{P}{\rho}, \quad E = \frac{c_v}{R} \left(\frac{P}{\rho} - \frac{P_0}{\rho_0} \right) = \frac{1}{\gamma - 1} \left(\frac{P}{\rho} - \frac{P_0}{\rho_0} \right) = \frac{1}{(\gamma - 1)\rho} \left(P - \frac{P_0}{\rho_0} \rho \right).$$

Отсюда получаем уравнением состояния адиабатического процесса

$$P = (\gamma - 1)\rho E + \frac{P_0}{\rho_0} \rho, \quad (4)$$

которое мы используем ниже, где γ - показатель адиабаты.

Глобальную неоднородность системы можно характеризовать как неоднородность распределения энтальпии по потоку

$$\begin{aligned}(\gamma - 1)\rho dE - \rho P dV &= d((\gamma - 1)\rho E) - (\gamma - 1)\rho E \frac{1}{\rho} d\rho + \frac{1}{\rho} P d\rho = \\ &= d((\gamma - 1)\rho E) + \left(P - (\gamma - 1)\rho E\right) \frac{1}{\rho} d\rho,\end{aligned}$$

откуда

$$(\gamma - 1)\rho dE - \rho P dV = d\left((\gamma - 1)\rho E + \frac{P_0}{\rho_0}(\rho - \rho_0)\right)$$

$\rho_0 = \text{const}$ плотность однородного потока. Нормируя, по аналогии с параметром порядка [10], [8], введем параметр турбулизации ξ и параметр β , порожденный сжимаемостью:

$$\xi^2 = \frac{\rho E}{\frac{1}{2}\rho U^2}, \quad \beta = \frac{2P_0}{\rho_0} \frac{(\rho - \rho_0)}{\rho U^2} = \frac{2P_0}{\rho_0 U_0^2} \frac{(\frac{\rho}{\rho_0} - 1)}{\frac{\rho}{\rho_0} \left(\frac{U}{U_0}\right)^2}.$$

Тогда

$$\frac{(\gamma - 1)\rho E + \frac{P_0}{\rho_0}(\rho - \rho_0)}{\frac{1}{2}\rho U^2} = (\gamma - 1)\xi^2 + \beta.$$

Феноменологическое определение энтальпии и энтропии. Распределения увеличение энтропии системы при переходе от ламинарного состояния к турбулентному представим в форме энтропии смешения удельных объемов (слоев), имеющих разные значения гидродинамической составляющей энтальпии, при образовании идеальной смеси изменений (при переходе от турбулентного состояния к ламинарному), и составляющей, порожденной сжимаемостью.

$$\begin{aligned}s(\xi) &= -((\gamma - 1)\xi^2 + \beta) \ln \left((\gamma - 1)\xi^2 + \beta\right) - \\ &- (1 - (\gamma - 1)\xi^2 - \beta) \ln \left(1 - (\gamma - 1)\xi^2 - \beta\right),\end{aligned}\tag{5}$$

Распределение

$$h(\xi) = (\gamma - 1)\xi^2\tag{6}$$

представляет собой избыточную энтальпию неоднородной термодинамической системы турбулентного потока по сравнению с однородным. Здесь U, ρ - скорость и плотность ламинарного потока, h, s - удельные величины.

Удельная свободная энергия Гиббса

$$g(\xi) = h(\xi^2) - \alpha(\beta)\xi^2 s(\xi^2),\tag{7}$$

задается в форме уравнения Гиббса-Гельмгольца $\Delta G = \Delta H - T\Delta S$, где роль температуры играет параметр $\alpha(\beta)\xi^2$, отражающий корреляцию между температурой и энтальпией. Условие турбулизации потока $\xi^2 < \frac{1-\beta}{(\gamma-1)}$.

Заметим, что $\beta \ll 1$, т.е. чем больше $|U|^2$, тем возможна более развитая турбулентность (в этом смысле $\frac{1}{\beta}$ - аналог числа Рейнольдса). Приведем графики удельных энтальпии, энтропии и свободной энергии Гиббса. Эти зависимости проиллюстрированы на рис. 1а-1б. Они даны в безразмерных переменных.

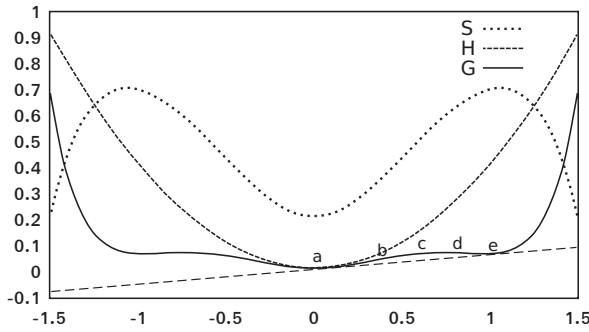


Рис.1a, $\beta=0.05$, $\alpha=0.4$

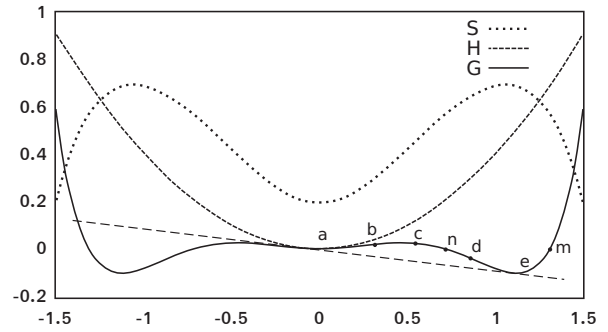


Рис.1b, $\beta=0.05$, $\alpha=0.6$

Какова зависимость свободной энергии Гиббса от параметра β ? Существует критическое β_{cr} , $\beta_{cr} < \frac{1}{2}$, такое, что для $\beta < \beta_{cr}$, на интервале $\xi \in (0, \sqrt{\frac{1-\beta}{\gamma-1}})$ существуют две стационарные точки: максимум и минимум графика $g(\xi)$ для значений α из интервала $(\alpha_1(\beta), \alpha_2(\beta))$. Для предельного значения $\alpha = \alpha_1(\beta)$ график $g(\xi)$ имеет вид параболы с изломом типа рис. 1b.

Внутри интервала $(\alpha_1(\beta), \alpha_2(\beta))$ график $g(\xi)$ имеет вид потенциала Ландау-Гинзбурга. При фиксированном $\beta < \beta_{cr}$ и $\alpha \rightarrow \alpha_2$ точка максимума ξ_{max} графика $g(\xi)$ стремится $\xi_{max} \rightarrow 0$ и потенциал Ландау-Гинзбурга становится потенциалом ЖКоботинского с точкой уплощения $(0, 0)$. Более того, интервал $(\alpha_1(\beta), \alpha_2(\beta))$ расширяется при $\beta \rightarrow 0 (\alpha_2(\beta) \rightarrow \infty)$.

Приведенное выше построение иллюстрирует тот факт, что термодинамический метод позволяет установить принципиальные возможности эволюции системы (в данном случае стремление к расслоению на турбулентную и нетурбулентную жидкости). Следует отметить, что использованный термодинамический анализ может только обозначить тенденции развития процесса (принципиальную возможность реализации) - выбор траектории эволюции системы, но не скорость этого процесса. Но, в тоже время, этот анализ позволяет заключить, что в потоке существуют области устойчивости ламинарного течения, а также метастабильные и лабильные области, где ламинарное течение неустойчиво.

Это не означает, что в области устойчивости не будут наблюдаться признаки турбулентности при ее развитом состоянии; просто, в этих областях диффузия возмущений будет их размывать, тогда как в областях неустойчивости процесс "отрицательной" (кановской) диффузии будет их концентрировать. Можно предположить, что области неустойчивости гомогенной системы являются источниками возмущений, а области устойчивости - стоками.

Все эти предположения могут быть проверены путем численного эксперимента путем расчетов с использованием математической модели, приведенной ниже, включающей, кроме уравнений гидродинамики (первоначально в самой простой форме), математическую модель неравновесного фазового перехода, сформулированную в терминах теории спинодального распада Кана-Хилларда. Эта математическая модель ламинарно-турбулентного перехода, как аналога неравновесного фазового перехода, может усложняться, начиная с исходной термодинамической модели.

Отметим на графике $g(\xi)$: $a = (\xi_a, g_a)$, $e = (\xi_e, g_e)$ - точки касания двойной касательной, $c = (\xi_c, g_c)$ - максимум, $b = (\xi_b, g_b)$, $d = (\xi_d, g_d)$ - точки перегиба, $n = (\xi_n, 0)$, $m = (\xi_m, 0)$ - точки пересечения кривой с нулевым уровнем свободной энергии Гиббса

$g(\xi)$. Интервал (ξ_a, ξ_e) будем называть областью лабильности параметра ξ турбулизации. **Итак, нам предстоит подтвердить или опровергнуть следующее:**

1) При малых скоростях потока (рис. 1а), малых значений β , кривая свободной энергии полностью лежит в области положительных значений и ламинарное течение для всех слоев жидкости является термодинамически устойчивым. Здесь опорная касательная (двойная касательная), проходящая через точки a, e , имеет положительный наклон, тогда как при больших скоростях (рис. 1б) этот наклон отрицателен.

2) Увеличение скорости потока (уменьшении значений β) наклон двойной касательной становится отрицательным, слои жидкости со значениями параметра турбулизации, лежащими между ξ_b, ξ_d становятся способными к генерации собственных возмущений. Это приводит к самовозбуждению турбулентности (диффузионному расслоению по механизму спиноподобного распада).

Самопроизвольно образующиеся возмущения при этих скоростях являются внешними по отношению к слоям жидкости со значениями параметра турбулизации, лежащими между ξ_d, ξ_e и ξ_a, ξ_b , в которых диффузионно проникающие из соседних слоев возмущения будут нарастать по причине метастабильного неустойчивого состояния этих слоев. Левее ξ_b и правее ξ_d эти "спиноподобные" возмущения должны будут затухать, но в силу своей высокой интенсивности и "концентрации" они, по видимому, могут заполнить все слои жидкости, лежащие непосредственно у стенок канала. Этот процесс будет определяться скоростью диссипации кинетической энергии турбулентности.

Таким образом, генерация энергии турбулентности в форме завихренности происходит самопроизвольно в слоях жидкости, имеющих значения параметра турбулизации между ξ_b, ξ_d , (по механизму спиноподобного распада). Нарастание энергии турбулентности или завихренности (также как и при спиноподобном распаде за счет энергии потока) по нуклеационному механизму (когда возмущения образоваться самопроизвольно не могут, но могут расти, если их размер или интенсивность превышают некоторый критический уровень), происходит в слоях жидкости, имеющих значения параметра турбулизации между ξ_a, ξ_b и ξ_d, ξ_e ; дисперсия - размывание возмущений (завихренности) происходит в слоях жидкости, имеющих значения параметра турбулизации между ξ_e, ξ_m и диссипация энергии турбулентности (затухание возмущений) происходит в слоях, лежащих вблизи стенки канала, а также в ядре потока.

3) Рис. 1б представляет также ситуацию, когда $\xi_b < \xi_n$. В этом случае турбулентность может возникать в слоях жидкости со скоростями, лежащими между точками n, m , но только за счет возмущений извне. В то же время, при ξ , лежащих в интервале ξ_n, ξ_e , эти внешние возмущения будут нарастать (механизм нуклеации), а при значениях ξ , лежащих между ξ_e, ξ_m , возмущения привносимые извне, нарастать не могут, но при этом они не могут и затухать, т.е. они будут диффузионно "размазываться" по этим слоям жидкости.

При диффузионном выходе этих возмущений в интервал скоростей, лежащих правее точки m , они должны будут стремиться к однородному состоянию, поэтому возмущения, диффундирующие от интервала значений ξ_e, ξ_m , должны затухать (хотя кинетика процесса этого затухания может быть сложной из-за немонотонности характера кривой свободной энергии между точками e и m).

3 Ламинарно-турбулентный переход для адиабатического процесса

Перейдем к построению модели ламинарно-турбулентного перехода для адиабатического процесса с уравнениями состояния

$$P = (\gamma - 1)\tilde{\varrho}\tilde{E} + P_0\frac{\tilde{\varrho}}{\varrho_0}, \quad \tilde{T} = \frac{P}{R\tilde{\varrho}}, \quad (8)$$

E - внутренняя энергия, γ - показатель адиабатты, ϱ_0 , U_0 , P_0 , T_0 - плотность, скорость, давление и температура однородной среды, \tilde{T} - температура, R - универсальная газовая постоянная.

Построение опирается, по аналогии с [34], [35], на модель механики сплошных сред - для адиабатического процесса

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\varrho} + \tilde{\varrho}\tilde{\text{div}}\tilde{U} &= 0, \\ \tilde{\varrho}\frac{d}{dt}\tilde{U} + \tilde{\nabla}\tilde{P} &= \tilde{\varrho}\frac{d}{dt}\tilde{U} + \tilde{\nabla}((\gamma - 1)\tilde{\varrho}\tilde{E} + \frac{P_0}{\varrho_0}\tilde{\varrho}), \\ \tilde{\varrho}\frac{d}{dt}\tilde{E} + \tilde{P}\tilde{\text{div}}\tilde{U} &= \tilde{\varrho}\frac{d}{dt}\tilde{E} + ((\gamma - 1)\tilde{\varrho}\tilde{E} + \frac{P_0}{\varrho_0}\tilde{\varrho})\tilde{\text{div}}\tilde{U} = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\frac{d}{dt}F = \partial_t F + (U \cdot \partial_x)F$, $\tilde{E} = \frac{1}{2}\tilde{U}^2\xi^2$.

Перейдем к безразмерным переменным

$$x = \frac{\tilde{x}}{L_0}, \quad t = \frac{\tilde{t}}{t_0}, \quad U = \frac{\tilde{U}}{U_0}, \quad \varrho = \frac{\tilde{\varrho}}{\varrho_0}, \quad E = \frac{\tilde{E}}{U_0^2},$$

где $L_0 = U_0 t_0$. В безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varrho + \varrho \text{div} U &= 0, \\ \varrho\frac{d}{dt}U + \nabla\left(\frac{P}{\varrho_0 U_0^2}\right) &= \varrho\frac{d}{dt}U + \nabla((\gamma - 1)\varrho E + \frac{P_0}{\varrho_0 U_0^2}\varrho), \\ \varrho\frac{d}{dt}E + \frac{P}{\varrho_0 U_0^2} \text{div} U &= \varrho\frac{d}{dt}E + ((\gamma - 1)\varrho E + \frac{P_0}{\varrho_0 U_0^2}\varrho) \text{div} U = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Здесь $E = \frac{1}{2}U^2\xi^2$.

Вводя вязкость ν во второе уравнение и накачку внутренней энергии в третье, в переменных (ϱ, U, ξ) получим моделирование ламинарно-турбулентного перехода

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\varrho + \varrho \text{div} U &= 0, \\ \frac{d}{dt}U + \frac{1}{\varrho}\nabla\left(\frac{1}{2}\varrho(\gamma - 1)\xi^2|U|^2 + \frac{P_0}{\varrho_0 U_0^2}\varrho\right) &= \frac{\varepsilon}{\varrho}\Delta U, \\ \xi|U|^2\left\{\varrho\left[\frac{d}{dt}\xi - (\gamma - 1)\xi^2 U \cdot \nabla\xi - \frac{1}{2}(\gamma - 1)\xi^3 \frac{1}{|U|^2} U \cdot \nabla(|U|^2) - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \xi U \cdot \left(\frac{1}{2}(\gamma - 1) + \frac{P_0}{\varrho_0 U_0^2} \frac{1}{\varrho|U|^2}\right)\nabla\varrho + \left(\frac{1}{2}(\gamma - 1)\xi + \frac{P_0}{\xi U^2 \varrho_0 U_0^2}\right)\text{div} U\right]\right\} = \\ &= \xi|U|^2 \text{div}\left(\frac{D}{\varrho T}\nabla\mu\right) = \xi|U|^2 \text{div}\left(\frac{RD}{\varrho\left((\gamma - 1)E + \frac{P_0}{\varrho_0 U_0^2}\right)}\nabla\mu\right), \end{aligned} \quad (11)$$

где $\varepsilon = 1/Re_0$, $Re_0 = \frac{\varrho_0 L_0 U_0}{\nu}$ - число Рейнольдса однородного потока, ν - динамическая вязкость среды, $D = \frac{D_*}{L_0 U_0}$, D_* - коэффициент подвижности (см. [24]) и температура

$$\tilde{T} = U_0^2 T, \quad T = \frac{1}{R}((\gamma - 1)E + \frac{P_0}{\varrho_0 U_0^2}) = \frac{(\gamma - 1)}{R}E + \frac{T_0}{U_0^2}.$$

Согласно Ландау-Гинзбургу, химический потенциал

$$\mu = A \varrho^2 U^2 \partial_\xi \left(h(\xi) - \alpha(\beta) \xi^2 s(\xi) \right) - \varepsilon^2 \Delta \xi,$$

где A - подборочный параметр. Таким образом

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \varrho + \varrho \operatorname{div} U &= 0, \\ \frac{d}{dt} U + \frac{1}{\varrho} \nabla \left(\frac{1}{2} \varrho (\gamma - 1) \xi^2 |U|^2 + \frac{P_0}{\varrho_0 U_0^2} \varrho \right) &= \frac{\varepsilon}{\varrho} \Delta U, \\ \varrho \left[\partial_t \xi + (1 - (\gamma - 1) \xi^2) U \cdot \nabla \xi - \frac{1}{2} (\gamma - 1) \xi^3 \frac{1}{|U|^2} U \cdot \nabla (|U|^2) - \right. \\ &\left. - \xi U \cdot \left(\frac{1}{2} (\gamma - 1) + \frac{P_0}{\varrho_0 U_0^2} \frac{1}{\varrho |U|^2} \right) \nabla \varrho + \left(\frac{1}{2} (\gamma - 1) \xi + \frac{P_0}{\xi U^2 \varrho_0 U_0^2} \right) \operatorname{div} U \right] = \\ &= \operatorname{div} \left(\frac{D}{\varrho \left(\frac{(\gamma-1)}{R} E + \frac{T_0}{U_0^2} \right)} \nabla \left(A \varrho^2 U^2 \partial_\xi \left(h(\xi) - \alpha(\beta) \xi^2 s(\xi) \right) - \varepsilon^2 \Delta \xi \right) \right), \end{aligned} \quad (12)$$

Как видим, предельная ситуация $\xi = 0$ соответствует несжимаемому $\operatorname{div} U = 0$ (однородному) потоку. В безразмерных переменных $\beta = \frac{2P_0}{\varrho_0 U_0^2} \frac{\varrho - 1}{\varrho U^2}$.

Какие можно сделать выводы: Как видно из третьего уравнения турбулизация тем больше замедляет турбулентный поток, чем больше параметр турбулизации. Это качественно подтверждается экспериментом. Хорошо известно, что ламинарно-турбулентный переход приводит к существенному увеличению сопротивления и сильному локальному нагреву теплонагруженных поверхностей летательных аппаратов [35, 36]. Ниже мы приведем численный эксперимент одномерной модели, подтверждающий термодинамический прогноз 1)-3) сформулированный выше (стр. 17-18).

Как мы отмечали выше, рассмотрение гидродинамических неустойчивостей в [8] ограничилось описанием термоконвекции Бенара и неустойчивости Тейлора для течения Куэтта между вращающимися цилиндрами, а предложенная аналогия с фазовыми переходами использовалась косвенно для интерпретации результатов. Численный эксперимент в приведенной выше модели позволяет прояснить ситуацию относительно одного гидродинамического примера у Хакена - неустойчивости Бенара. Неустойчивость возникает за счет нахождения системы в потенциальном поле тяготения, поэтому добавляется еще одна термодинамическая степень свободы - конвективное движение из-за разницы плотностей при температурном градиенте поперек слоя жидкости (стратификация). Характерным для неустойчивости Бенара является потеря регулярности и переход к нерегулярному режиму конвекции - аналогичному турбулентности.

4 Численный эксперимент

Для простоты будем считать, что

$$\frac{P_0}{\varrho_0 U_0^2} = 1 \quad \implies \quad \beta = \frac{2(\varrho - 1)}{\varrho U^2}.$$

На интервале $(0, 1)$ рассмотрим начально-краевую задачу для одномерной системы (12)

$$\begin{aligned} (\partial_t + U\partial_x)\varrho + \varrho\partial_x U &= 0, \\ (\partial_t + U\partial_x)U + \frac{1}{\varrho}\partial_x(\varrho(\gamma - 1)\xi^2 U^2 + \varrho) &= \frac{\varepsilon}{\varrho}\partial_x^2 U, \\ \varrho\left[\partial_t \xi + U(1 - (\gamma - 1)\xi^2)\partial_x \xi - \xi\frac{1}{\varrho}\left(\frac{1}{2}(\gamma - 1)U + \frac{1}{U}\right)\partial_x \varrho + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{1}{2}(\gamma - 1)\xi + \frac{1}{\xi U^2} - (\gamma - 1)U\xi^3\right)\partial_x U\right] = \\ &= \partial_x\left(\frac{RD}{\varrho((\gamma - 1)E + 1)}\partial_x\left(A\varrho^2 U^2 \partial_\xi\left(h(\xi) - \alpha(\beta)\xi^2 s(\xi)\right) - \varepsilon^2 \partial_x^2 \xi\right)\right), \end{aligned} \quad (13)$$

Данные Коши и граничные условия

$$\xi|_{t=0} = \xi^0(x), \quad \varrho|_{t=0} = \varrho^0(x), \quad U|_{t=0} = U^0(x), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \varrho|_{x=0} = \varrho_0^b, \quad U|_{x=0} = U_0^b, \quad \varrho|_{x=1} = \varrho_1^b, \quad U|_{x=1} = U_1^b, \\ \partial_x \xi|_{x=0} = \partial_x \xi|_{x=1} = 0, \quad \partial_x \mu|_{x=0} = \partial_x \mu|_{x=1} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Требуются условия согласования $\varrho^0(0) = \varrho_0^b(0)$, $\varrho^0(1) = \varrho_1^b(0)$, $U^0(0) = U_0^b(0)$, $U^0(1) = U_1^b(0)$.

Мы решаем смешанную задачу (13), (14) численно и исследуем неустойчивые решения с хаотическим поведением. Для численного решения используется разностная схема. Условия численной устойчивости выполнены, поэтому мы изучаем неустойчивости, возникающие из-за самих физических процессов.

По аналогии с [30] доказывается, что на конечном, не зависящем от ε интервале справедлива оценка $\frac{|\operatorname{div} U|}{|\xi|} \leq \operatorname{const}$. Это утверждение позволяет перейти при численном счете к регуляризации

$$\frac{1}{\xi} = \begin{cases} \frac{1}{\xi}, & \text{при } |\xi| \geq \varepsilon^3, \\ \frac{1}{\varepsilon^3 \operatorname{sign} \xi}, & \text{при } |\xi| < \varepsilon^3. \end{cases}$$

Теперь вернемся к приведенному выше прогнозу развития турбулизации потока, полученному исследованием структуры потенциала свободной энергии Гиббса. На приводимых ниже рисунках каждые две точки соединяются отрезком прямой, начальное условие тоже самое, а последующие сглаживаются кубическим сплайном. Мы покажем, что при разных сценариях развития турбулентности (слабой или развитой турбулизации) в адиабатическом потоке результирующий процесс приводит к нагреванию ламинарного течения.

В первом численном эксперименте в качестве данных Коши $\varrho^0(x)$, $U^0(x)$, $\xi^0(x)$ рассматривается локальное возмущение однородного потока $(\xi_0^0, \varrho_0^0, U_0^0)$:

$$\begin{aligned} \varrho^0(x) &= \varrho_0^0 = \text{const}, \quad U^0(x) = U_0^0 = \text{const}, \\ \xi^0(x) &= \xi_0^0 + (\xi_1^0 - \xi_0^0)(\theta(x - x_1) - \theta(x - x_2)), \end{aligned} \quad (16)$$

где $0 < x_1 < x_2 < 1$ и $0 < \xi_0^0 < \xi_1^0 < \sqrt{\frac{1-\beta}{\gamma-1}}$. Это определяет начальное значение

$$\beta^0 = \frac{2(\varrho_0^0 - 1)}{\varrho_0^0(U_0^0)^2}$$

и предельные значения $\xi^\pm(\beta^0)$, $|\xi^\pm(\beta^0)| \leq \sqrt{\frac{1-\beta}{\gamma-1}}$, определяемые опорной касательной (см. Рис. 1а).

Для симметричного потенциала (см. Рис. 1б) опорная касательная горизонтальна и ξ^\pm определяются отрицательными точками минимума $(\xi^-, g(\xi^-))$, $(\xi^+, g(\xi^+))$.

Выше мы уже приводили аналогию с уравнением Шредингера. Физический смысл имеет $|\xi| = \sqrt{2E/U^2}$. Условие согласования

$$\max(\xi^-, 0) < \xi_0^0 < \xi_1^0 < \xi^+.$$

В дальнейшем будем считать $\varepsilon = 0, 1$. Представленная на Рис. 1а ($U_0^0 = 1, 4$, $\xi_0^0 = 0, 5$, $\xi_1^0 = 0, 6$, $\varrho_0^0 = 2$) ситуация скоростей потока, когда кривая свободной энергии $g(\xi)$ полностью лежит в области положительных значений и ламинарное течение для всех слоев жидкости является термодинамически устойчивым.

Здесь двойная касательная (опорная касательная), проходящая через точки a, e , имеет положительный наклон и для определяемых ею предельных значений ξ^\pm для ξ в модели Кана-Хилларда имеем $\xi^- > 0$. В этом первом численном эксперименте для задачи (13)-(15) мы задаем начальным условием (16) затравку параметра турбулизации ξ (затравку турбулентности), т.е. рассматриваем возмущение однородного состояния

$$\varrho_0^b = \varrho_1^b = 2, \quad U_0^b = U_1^b = U_0^0 = 1, 4, \quad \xi_0^0 = 0, 5. \quad (17)$$

На Рис. 1б видно, что в рассматриваемом нами случае $g(\xi) > 0$ для всех $|\xi| < \sqrt{\frac{1-\beta}{\gamma-1}}$. В этом случае значения ξ_0^0, ξ_1^0 параметра турбулизации лежат между ξ_a и ξ_e , в зоне лобильности, потенциал в случае когда двойная касательная имеет положительный наклон. В этом случае есть возмущение внутренней энергии за счет возмущения извне, которое переходит в возмущение ламинарного потока. Как мы покажем ниже в этом случае достаточно быстро слабо $\xi(x, t) \rightarrow 0$ стремиться к нулю, таким образом, возмущение однородного потока диффундирует к его начальному состоянию. Такой набор параметров будем называть глобально устойчивым.

На Рис. 2ab четыре временных сечения ($t = 0, 00001$, $t = 0, 0001$, $t = 0, 001$, $t = 0, 01$, $t = 0, 02$) графика ξ , на Рис. 2cd те же четыре временных сечения графиков ϱ и U соответственно.

Как мы видим, возмущения, привносимые извне, нарастать не могут, они диффузионно "размазываются" по этим слоям жидкости, затухая достаточно быстро. Таким образом, мы в этом случае подтверждаем сформулированную выше гипотезу. Более того, видно (см. Рис. 2a,c,d), что фронты едут направо, тормозясь при увеличении модуля $|\xi|$ параметра турбулизации, т.е. с развитием турбулентности, что соответствует эксперименту. С возрастанием времени слабо $\xi(x, t) \rightarrow 0$, таким образом, возмущение однородного потока диффундирует к его начальному состоянию.

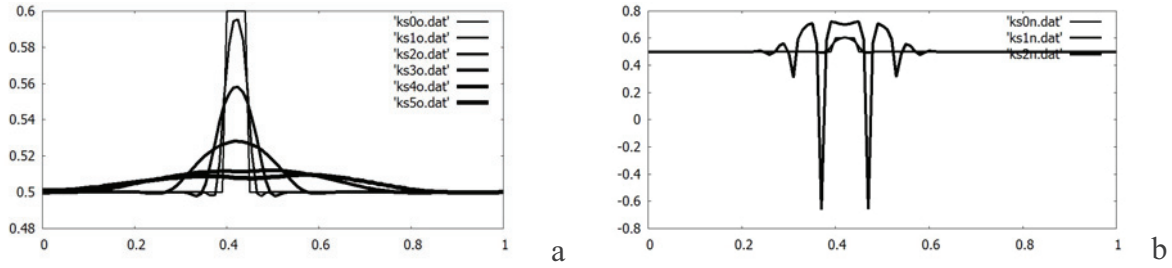
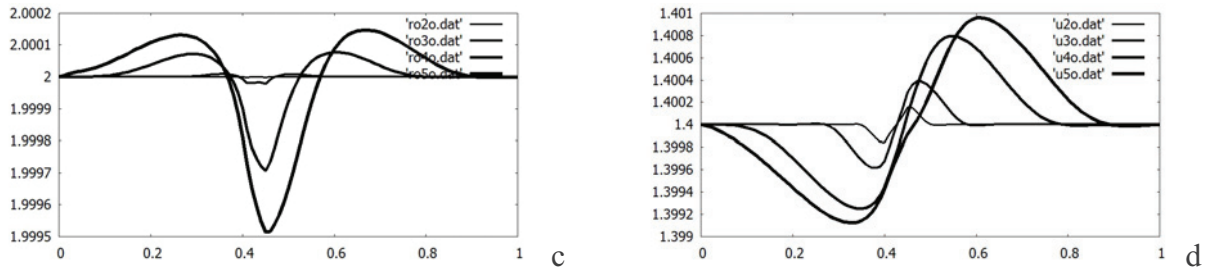


Рис. 2.

(а) Численное решение системы (ξ) для малого временного интервала с $U_0^0 = 1.4$, соответствие времен $t = 0, 0,00001, t = 0, 0,0001, t = 0, 0,001, t = 0, 0,01, t = 0, 0,02$. Так что, все ρ и u , фактически, - константы, (б) Численное решение системы (ξ) для малого времен с $U_0^0 = 1,5$ (см. Рис. 2ab).



(с) Численное решение системы (ρ) для малого временного интервала с $U_0^0 = 1.4$, соответствие времен $t = 0, 0,00001, t = 0, 0,0001, t = 0, 0,001, t = 0, 0,01, t = 0, 0,02$, (d) Численное решение системы (U) с теми же параметрами, что и (а) (см. Рис. 2cd).

4.1 Коррекция потенциала

Теперь отметим, что на Рис. 2ab приведены четыре временных сечения ($t = 0, 0,00001, t = 0, 0,0001, t = 0, 0,001, t = 0, 0,01, t = 0, 0,02$) графика ξ для значений

$$\varrho_0^b = \varrho_1^b = 2, \quad U_0^b = U_1^b = U_0^0 = 1,5, \quad \xi_0^0 = 0,5, \quad \xi_1^0 = 0,6., \quad (18)$$

которые отвечают численному эксперименту той же смешанной задачи (16), (15) для системы (13) в случае симметричного потенциала (см. Рис. 1b), когда опорная касательная горизонтальна и предельные значения ξ^\pm определяются отрицательными точками минимума ($(\xi^-, g(\xi^-))$), ($(\xi^+, g(\xi^+))$).

Из эксперимента известна полостчатая структура турбулентного потока, в котором перемежаются зоны с большой и малой турбулизацией (см. [35], [36]). Для симметричного потенциала $g(\xi)$ накачка внутренней энергии, вводимая оператором Кана-Хилларда в правой части третьего уравнения а (13), предельные значения $\xi^- = -\xi^+$ определяются отрицательными минимумами ($(\xi^\pm, g(\xi^\pm))$) потенциала $g(\xi)$. Это определяет одинаковые, по сути, амплитуды $|\xi(x, t)|$ в соседних областях полостчатой структуры решения. Этот факт требует коррекции потенциала.

Определим коррекцию $\tilde{g}(\xi)$ потенциала $g(\xi)$, при которой возрастание скорости U (убывание параметра $\beta(|U|)$) приводит к отрицательному наклону опорной касательной (см. Рис. 1b).

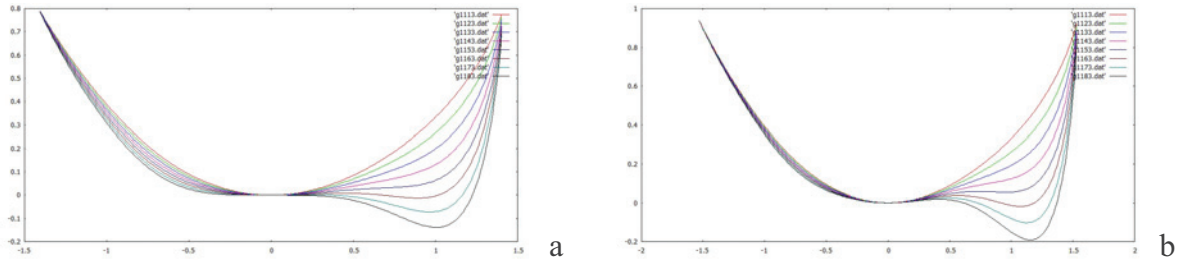


Рис. 3.

(а) Потенциал свободной энергии \hat{g} для $\beta = 0, 1$, $\alpha = 0, 1, \dots, 0, 8$, (б) Потенциал свободной энергии \hat{g} для $\beta = 0, 05$, $\alpha = 0, 1, \dots, 0, 8$ (см. Рис. 3аb).

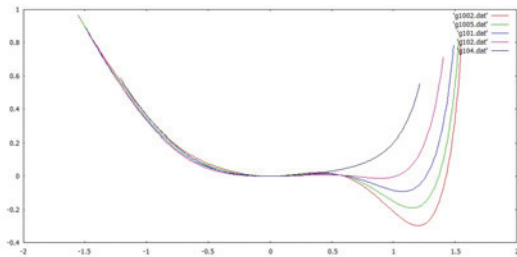


Рис. 4.

Сечения графика результирующего потенциала \tilde{g} для $\beta = 0, 4; 0, 2; 0, 1; 0, 05; 0, 02$.

Положим

$$\tilde{g}(\xi) = \begin{cases} g(\xi), & \xi \geq 0, \\ (\gamma - 1)\xi^2 + \alpha\xi^2(\beta \ln((\gamma - 1)\xi^2 + \beta) + \frac{(1-\beta-(\gamma-1)\xi^2)^6}{(1-\beta)^5} \ln(1 - (\gamma - 1)\xi^2 - \beta)), & \xi < 0. \end{cases} \quad (19)$$

В дальнейшем будем считать что в операторе Кана-Хилларда вместо $g(\xi)$ стоит $\tilde{g}(\xi)$.

Приведем зависимость графиков $\tilde{g}(\xi)$ при фиксированных $\beta = 0, 2$ и $\beta = 0, 005$ от $\alpha = 0, 1, \dots, 0, 8$

По пяти точкам: $(\beta = 0, 4, \alpha = 0, 4)$, $(\beta = 0, 2, \alpha = 0, 6)$, $(\beta = 0, 1, \alpha = 0, 7)$, $(\beta = 0, 05, \alpha = 0, 8)$, $(\beta = 0, 02, \alpha = 0, 9)$ строим функцию $\alpha = \alpha(\beta)$. Подставляем построенное $\alpha(\beta)$ в (19). Приведем графики результирующего потенциала \tilde{g} :

Теперь приведем результаты численного эксперимента для задачи (13)-(15), для подборочного параметра $A = 0.1$, с начальным условием (16) затравки параметра турбулизации ξ (затравку турбулентности) с новым потенциалом \hat{g} свободной энергии Гиббса, т.е. рассматриваем возмущение однородного состояния вида

$$\varrho_0^b = \varrho_1^b = 2, \quad \beta = 0.1 \Rightarrow U_0^b = U_1^b = U_0^0 = \sqrt{\frac{1}{10}}, \quad \xi_0^0 = 0, 5, \xi_1^0 = 0, 6., \quad (20)$$

когда двойная касательная имеет отрицательный наклон.

Из приведенного ниже численного эксперимента в этом случае получаем развитую турбулентность (процесс типа перекристаллизации [28]), порожденную внешним

воздействием избыточной внутренней энергии начальной затравки параметра турбулизации (затравки внутренней энергии). Затравка порождает развитую турбулентность в которой в последствии идет укрупнение мод осцилляций (как в процессе "хищник-жертва").

В слабом смысле $\xi(t, x)$ при возрастании t стремится к константе ξ_{∞}^+ . Таким образом, в этом случае поток разогревается и стремится к ламинарному потоку с температурой

$$T(x, t) = \frac{\gamma - 1}{R} E + \frac{T_0}{U_0^2} = \frac{\gamma - 1}{R} \frac{1}{2} U^2 \xi^2 + \frac{T_0}{U_0^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\gamma - 1}{2R} U_{\infty}^2 (\xi_{\infty}^+)^2 + \frac{T_0}{U_0^2} > \frac{\gamma - 1}{2R} (U_0^0)^2 (\xi_0^0)^2 + \frac{T_0}{U_0^2}$$

Ниже, на Рис. 5abcdeh шесть временных сечений ($t = 0$; $t = 0,0002$; $t = 0,0004$; $t = 0,001$; $t = 0,002$; $t = 0,01$) графика ξ :

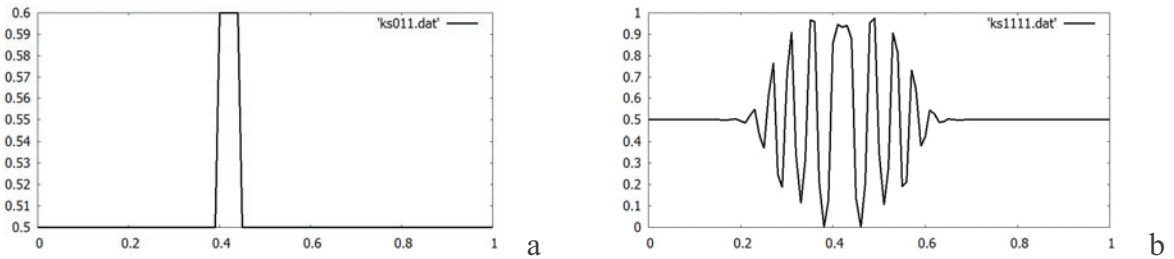
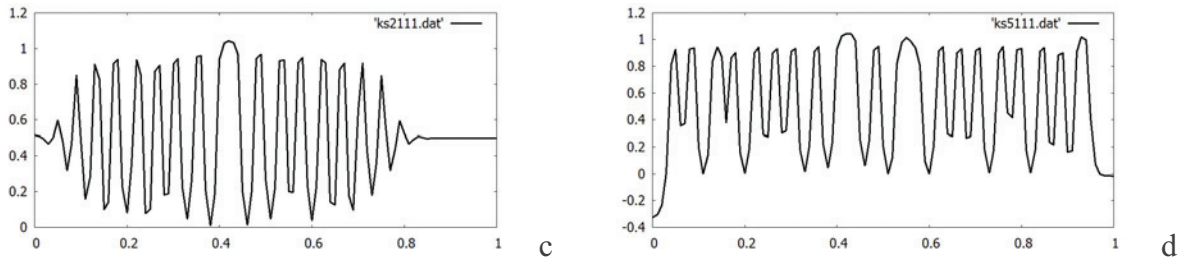
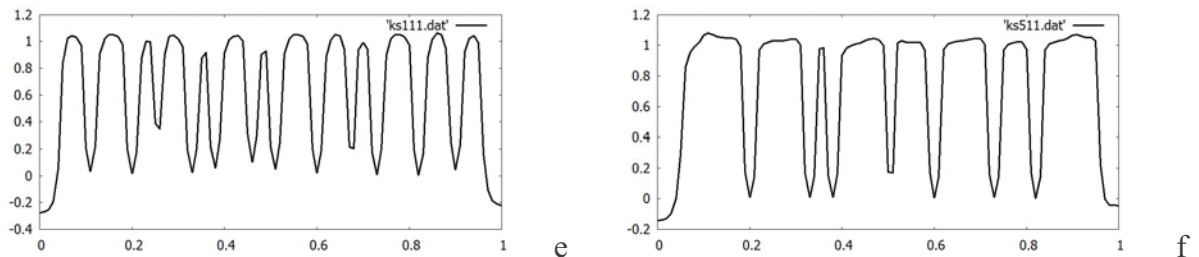


Рис. 5.

(a) Численное решение системы (ξ) для $U_0^0 = \sqrt{10}$, временное сечение $t = 0$, (b) Численное решение системы (ξ) временное сечение $t = 0,0002$ (см. Рис. 5ab).



(c) Численное решение системы (ξ) с $U_0^0 = \sqrt{10}$, временное сечение $t = 0,0004$, (d) Численное решение системы (ξ) временное сечение $t = 0,001$ (см. Рис. 5cd).



(e) Численное решение системы (ξ) с $U_0^0 = \sqrt{10}$, временное сечение $t = 0,002$, (f) Численное решение системы (ξ) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 5ef).

На Рис. 6abcdehfg четыре временных сечения ($t = 0; 0,0004; 0,006; 0,01$) графиков ϱ и U соответственно:

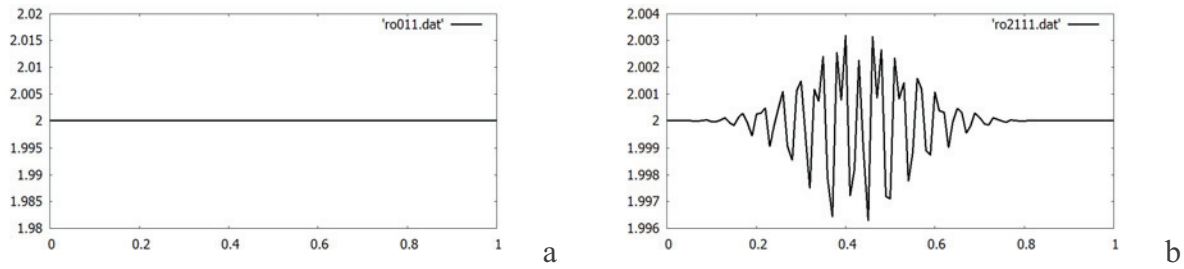
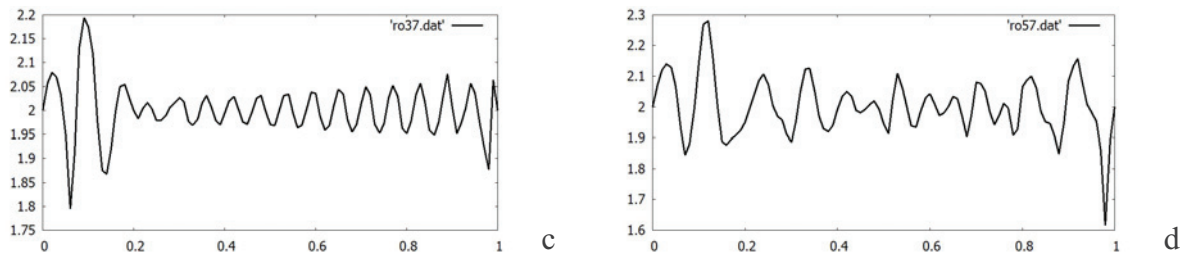
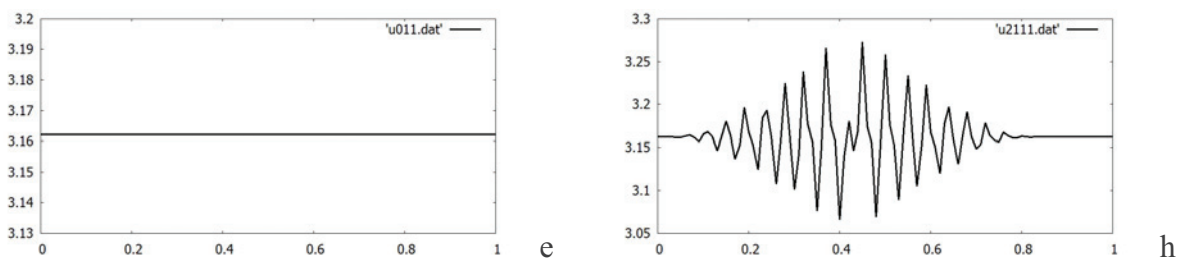


Рис. 6.

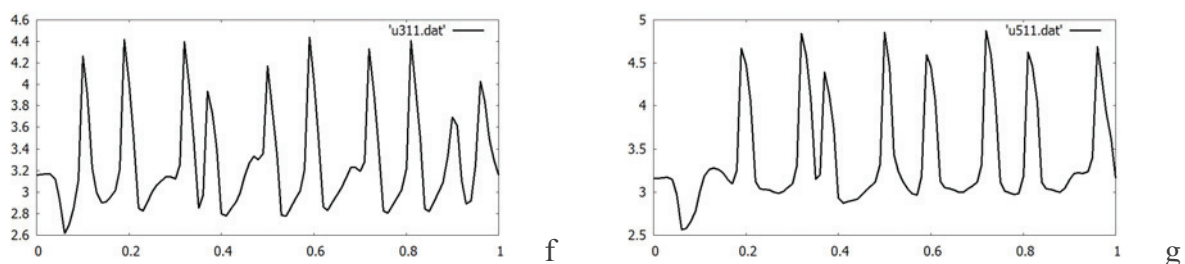
- (a) Численное решение системы (ϱ) с $U_0^0 = \sqrt{10}$, временное сечение $t = 0,0004$,
 (b) Численное решение системы (ϱ) для временного сечения $t = 0,0006$ (см. Рис. 6ab).



- (c) Численное решение системы (ϱ) с $U_0^0 = \sqrt{10}$, временное сечение $t = 0,0004$,
 (d) Численное решение системы (ϱ) для временного сечения $t = 0,0006$ (см. Рис. 6cd).



- (e) Численное решение системы (U) с $U_0^0 = \sqrt{10}$, временное сечение $t = 0,0004$,
 (h) Численное решение системы (U) для временного сечения $t = 0,0006$ (см. Рис. 6eh).



- (f) Численное решение системы (U) с $U_0^0 = \sqrt{10}$, временное сечение $t = 0,0004$,
 (g) Численное решение системы (U) для временного сечения $t = 0,0006$ (см. Рис. 6fg).

Как видим, мы получили развитую турбулентность (процесс типа перекристаллизации [28]), порожденную внешним воздействием избыточной внутренней энергии начальной затравки параметра турбулизации (затравки внутренней энергии), что соответствует приведенному выше термодинамическому прогнозу. Затравка порождает развитую турбулентность, в которой в последствии идет укрупнение мод осцилляций (как в процессе "хищник-жертва").

В слабом смысле $\xi(t, x)$ при возрастании t стремится к константе ξ_∞^+ . Таким образом, в этом случае поток разогревается и стремится к ламинарному потоку с температурой

$$\begin{aligned} T(x, t) &= \frac{\gamma - 1}{R} E + \frac{T_0}{U_0^2} = \frac{\gamma - 1}{R} \frac{1}{2} U^2 \xi^2 + \frac{T_0}{U_0^2} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\gamma - 1}{2R} U_\infty^2 (\xi_\infty^+)^2 + \frac{T_0}{U_0^2} > \frac{\gamma - 1}{2R} (U_0^0)^2 (\xi_0^0)^2 + \frac{T_0}{U_0^2} \end{aligned}$$

4.2 Управляющие параметры самовозбуждения ξ_0^0 и V

В этом параграфе рассмотрим второй случай возмущения однородного потока управлением краевым условием слева, связанный с возможным самовозбуждением турбулизации.

Приведем численный эксперимент смешанной задачи для системы (13) с граничными условиями (15) и

$$U|_{x=0} = U_0^0(1 + Vt), \quad U|_{x=1} = U_0^0, \quad \varrho|_{x=0} = \varrho|_{x=1} = 2, \quad (21)$$

при однородных начальных данных:

$$\xi|_{t=0} = \xi_0^0, \quad \varrho|_{t=0} = 2, \quad U|_{t=0} = U_0^0, \quad (22)$$

U_0^0, V - константы, т.е. возмущение однородного начального состояния управлением $U|_{x=0} = U_0^0(1 + Vt)$ скоростью на входе и начальными данными ξ_0^0 из ядра зоны лабильности и окрестности ее границы.

Увеличение скорости потока приводит к возникновению зоны отрицательных значений потенциала $\hat{g}(\xi)$ (аналог. рис.1b), так что слои жидкости со значениями параметра турбулизации, лежащими между ξ_n и ξ_e (см. рис.1b) становятся способными к генерации собственных возмущений. Это приводит к самовозбуждению турбулентности (диффузионному расслоению по механизму спиnodального распада). Такой набор параметров будем называть неустойчивым. Для потока в случае неустойчивого набора параметров небольшие ошибки при моделировании системы (13), (14) по схеме конечных разностей приводит к разрушению ламинарного потока.

Самопроизвольно образующиеся возмущения при этих скоростях являются внешними по отношению к слоям жидкости со значениями параметра турбулизации, где $g(\xi) > 0$, в которых диффузионно проникающие из соседних слоев возмущения будут диффузионно "размазываться". Численный эксперимент показал, что начальные значения ξ_0^0 параметра турбулизации являются управляющими параметрами входа в лобильную зону.

(I) Для начальных значений ξ_0^0 из ядра лабильной зоны, вне ее границы (вне окрестности бинодали, $A = 0,05, \xi_0^0 = 0,6, U_0^0 = \sqrt{10}, V = 20$) процесс сильно турбулизуется и в развитии имеет характер процессов "хищник-жертва". Поток

стабилизируется при $t \rightarrow \infty$ к течению, в котором $\xi(x, t) \rightarrow \xi_\infty(\frac{x-U_\infty t}{\varepsilon})$ стремится к бегущей волне $\xi_\infty(\frac{x-U_\infty t}{\varepsilon})$, где $\xi_\infty(x)$ - строго монотонно убывающая функция (типа кинка) с граничными значениями $\xi|_{x=0} = \xi_\infty^+ > 0$, $\xi|_{x=1} = \xi_\infty^- < 0$, (аналог КПП решения).

Для рассматриваемого численного эксперимента $U_\infty > 0$, т.е. фронт бегущей волны движется на лево и, с возрастанием t , бегущая волна слабо стремится к константе $\xi_\infty(\frac{x-U_\infty t}{\varepsilon}) \rightarrow \xi_\infty^+$. Таким образом, результиивно, поток разогревается и стремится к ламинарному потоку с температурой

$$T(x, t) = \frac{\gamma - 1}{R} E + \frac{T_0}{U_0^2} = \frac{\gamma - 1}{R} \frac{1}{2} U^2 \xi^2 + \frac{T_0}{U_0^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\gamma - 1}{2R} U_\infty^2 (\xi_\infty^+)^2 + \frac{T_0}{U_0^2} > \frac{\gamma - 1}{2R} (U_0^0)^2 (\xi_0^0)^2 + \frac{T_0}{U_0^2}.$$

Ниже, на Рис. 7abcdef приводим шесть временных сечений ($t = 0, 0,002; 0,004; 0,006; 0,008; 0,01$) графика ξ :

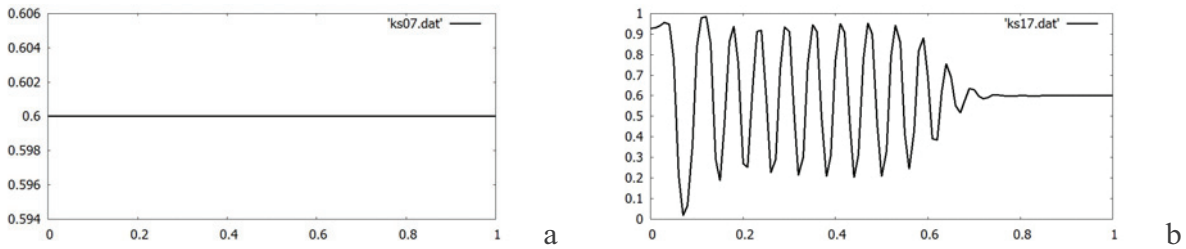
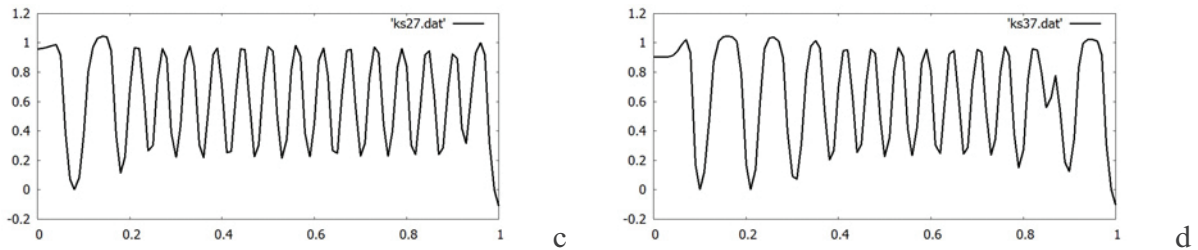
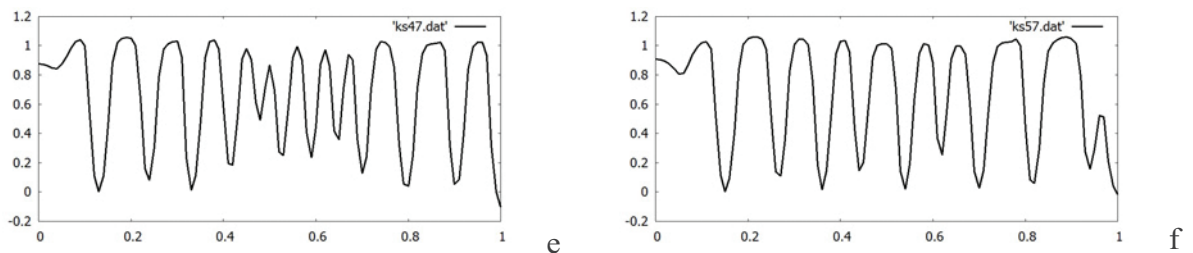


Рис. 7.

(а) Численное решение системы (ξ) для $A = 0,05$, $\xi_0^0 = 0,6$, $U_0^0 = \sqrt{10}$, $V = 20$, временное сечение $t = 0$, (б) Численное решение системы (ξ) временное сечение $t = 0,002$ (см. Рис. 7ab).



(с) Численное решение системы (ξ) с $A = 0,05$, $\xi_0^0 = 0,6$, $U_0^0 = \sqrt{10}$, $V = 20$, временное сечение $t = 0,004$, (д) Численное решение системы (ξ) временное сечение $t = 0,006$ (см. Рис. 7cd).



(е) Численное решение системы (ξ) с $A = 0,05$, $\xi_0^0 = 0,6$, $U_0^0 = \sqrt{10}$, $V = 20$, временное сечение $t = 0,008$, (ф) Численное решение системы (ξ) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 7ef).

На Рис. 8abcdefgh четыре временных сечения ($t = 0, 0002, t = 0, 0004$) графиков ρ и U :

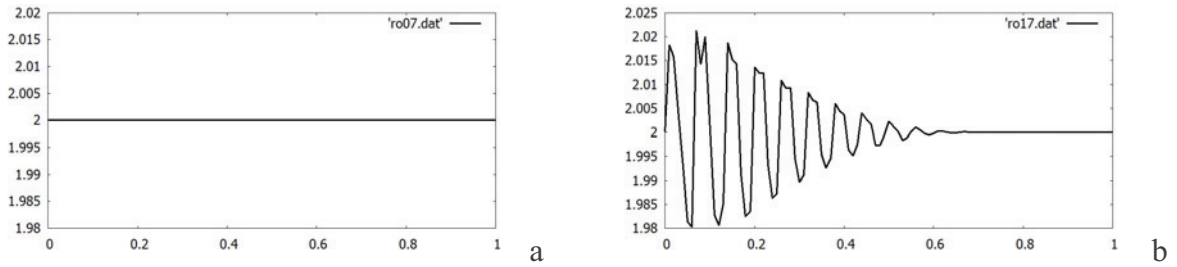
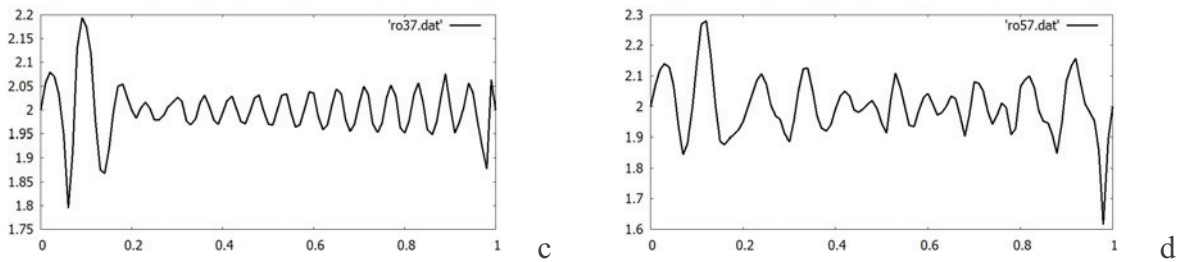
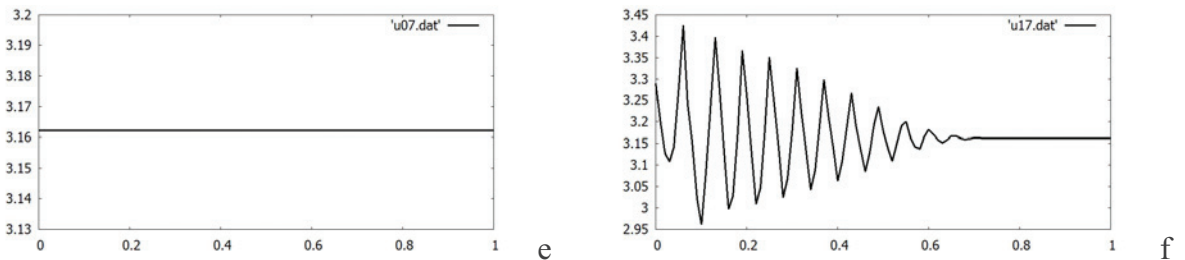


Рис. 8.

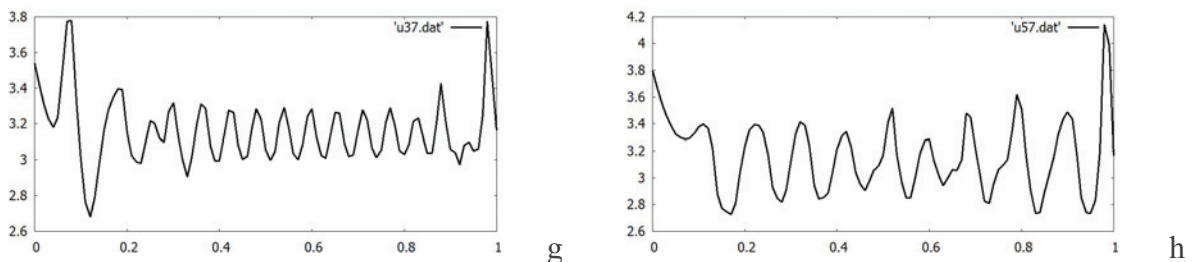
(a) Численное решение системы (ρ) с $A = 0,05, \xi_0^0 = 0,6, U_0^0 = \sqrt{10}, V = 20$, временное сечение $t = 0$, (b) Численное решение системы (ρ) для временного сечения $t = 0,002$ (см. Рис. 8ab).



(c) Численное решение системы (ρ) с $A = 0,05, \xi_0^0 = 0,6, U_0^0 = \sqrt{10}, V = 20$, временное сечение $t = 0,006$, (d) Численное решение системы (ρ) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 8cd).



(e) Численное решение системы (U) с $A = 0,05, \xi_0^0 = 0,6, U_0^0 = \sqrt{10}, V = 20$, временное сечение $t = 0$, (f) Численное решение системы (U) для временного сечения $t = 0,002$ (см. Рис. 8ef).



(g) Численное решение системы (U) с $A = 0,05, \xi_0^0 = 0,6, U_0^0 = \sqrt{10}, V = 20$, временное сечение $t = 0,006$, (h) Численное решение системы (U) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 8gh).

Мы видим на приведенных выше рисунках самовозбуждение развитой турбулизации для начальных значений ξ_0^0 из ядра лабильной зоны, имеющее характер процесса "хищник-жертва".

II) Теперь исследуем возможность самовозбуждения в случае положительного наклона опорной касательной к графику свободной энергии Гиббса \tilde{g} .

Рассмотрим следующий набор параметров: $A = 1$, $V = 10$, $\beta = 0,3 \Rightarrow U_0^0 = \sqrt{\frac{10}{3}}$ и $\xi = 0,5$. В этом случае самовозбуждение турбулизация развивается на порядок быстрее, чем в случае отрицательного наклона опорной касательной к графику \tilde{g} . Процесс стремится к однородному распределению параметра турбулизации $\xi(x, t) \rightarrow \xi_\infty$. Таким образом, процесс стремится к ламинарному ($\xi \equiv \text{const}$) потоку с избыточной внутренней энергией $\xi_\infty > \xi_0^0$.

Для температуры в этом случае имеем

$$T(x, t) = \frac{\gamma - 1}{R} E + \frac{T_0}{U_0^2} = \frac{\gamma - 1}{R} \frac{1}{2} U^2 \xi^2 + \frac{T_0}{U_0^2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{\gamma - 1}{2R} U_\infty^2 \xi_\infty^2 + \frac{T_0}{U_0^2} > \frac{\gamma - 1}{2R} (U_0^0)^2 (\xi_0^0)^2 + \frac{T_0}{U_0^2},$$

что соответствует разогреву потока. Ниже, на Рис. 9abcdef шесть временных сечения ($t = 0$, $t = 0,002$, $t = 0,004$, $t = 0,006$, $t = 0,008$, $t = 0,01$) графика ξ

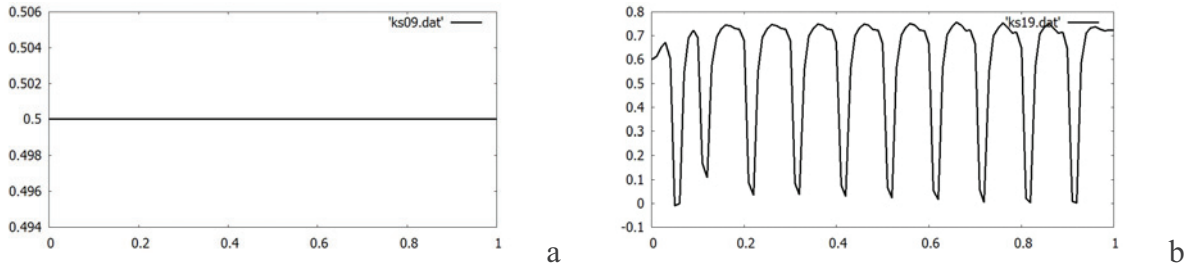
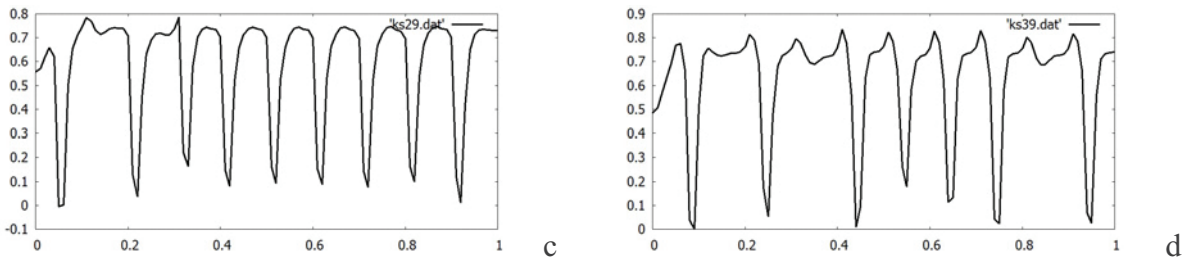
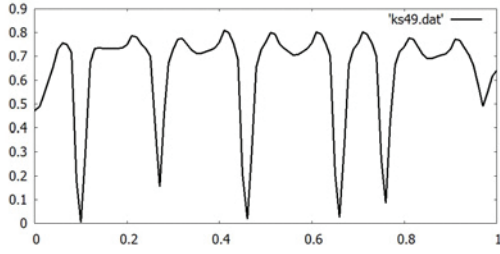


Рис. 9.

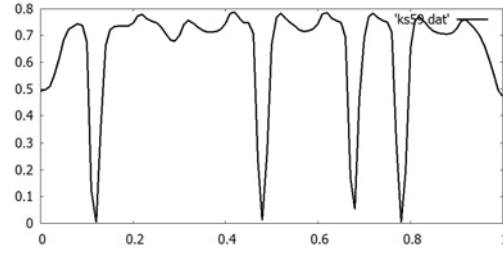
- (a) Численное решение системы (ξ) для $U_0^0 = \sqrt{\frac{10}{3}}$, $V = 10$, временное сечение $t = 0$,
 (b) Численное решение системы (ξ) временное сечение $t = 0,0004$ (см. Рис. 9ab).



- (c) Численное решение системы (ξ) с $U_0^0 = \sqrt{\frac{10}{3}}$, $V = 10$, временное сечение $t = 0,0006$, (d) Численное решение системы (ξ) временное сечение $t_3 = 0,0015$ (см. Рис. 9cd).



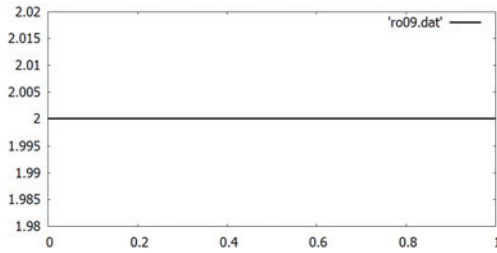
e



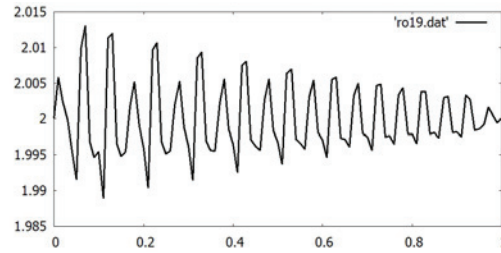
f

(e) Численное решение системы (ξ) с $U_0^0 = \sqrt{\frac{10}{3}}$, временное сечение $t = 0,004$,
 (f) Численное решение системы (ξ) для временного сечения $t = 0,005$ (см. Рис. 9ef).

На Рис. 10abcd и 10efgh четыре временных сечения ($t = 0; 0,002; 0,006; 0,01$) графиков ρ и U



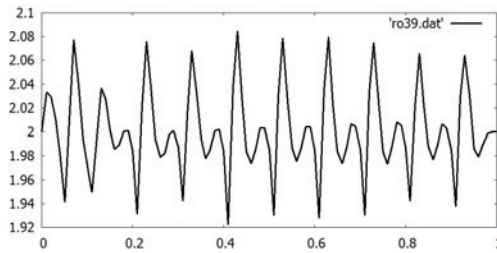
a



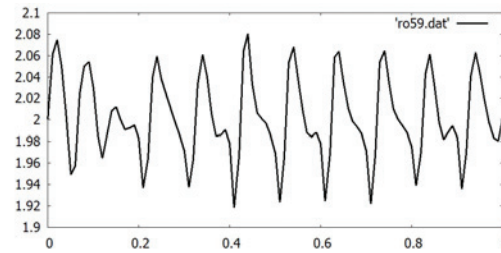
b

Рис. 10.

(a) Численное решение системы (ρ) с $U_0^0 = \sqrt{\frac{10}{3}}$, $V = 10$, временное сечение $t = 0$, (b) Численное решение системы (ρ) для временного сечения $t = 0,002$ (см. Рис. 10ab).

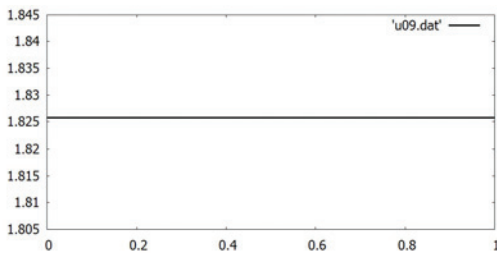


c

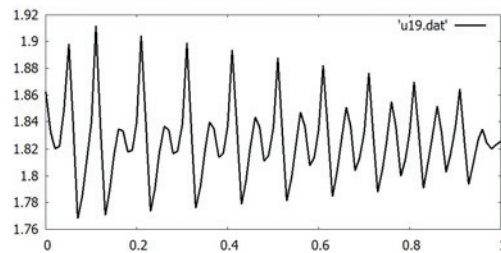


d

(c) Численное решение системы (ρ) с $U_0^0 = \sqrt{\frac{10}{3}}$, $V = 10$, временное сечение $t = 0,006$, (d) Численное решение системы (ρ) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 10cd).

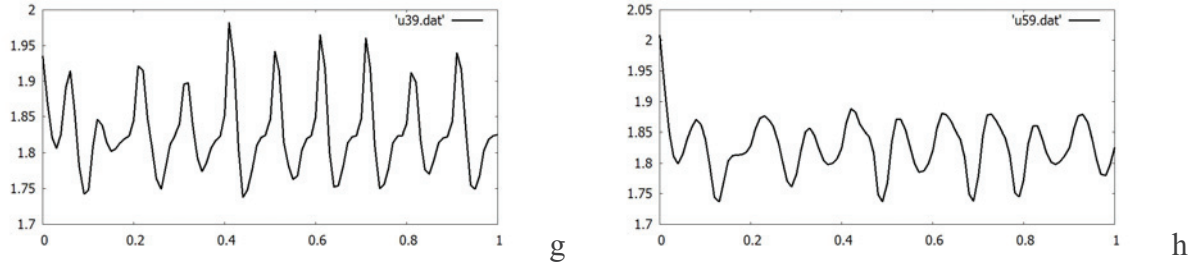


e



f

(e) Численное решение системы (U) с $U_0^0 = \sqrt{\frac{10}{3}}$, $V = 10$, временное сечение $t = 0$, (f) Численное решение системы (U) для временного сечения $t = 0,002$ (см. Рис. 10ef).



(г) Численное решение системы (U) с $U_0^0 = \sqrt{\frac{10}{3}}$, $V = 10$, временное сечение $t = 0,006$, (h) Численное решение системы (U) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 10gh).

III) Теперь исследуем зависимость решения задачи о самовозбуждении от выбора скорости V в граничном условии на входе. Для этого сравним два численных эксперимента с параметрами $\xi_0^0 = 0,6$, $A = 0,05$, $V = 10$, $u_0^b(t) = \sqrt{10}(1 + 10t)$ и $\xi_0^0 = 0,6$, $A = 0,05$, $V = 20$, $u_0^b(t) = \sqrt{10}(1 + 20t)$:

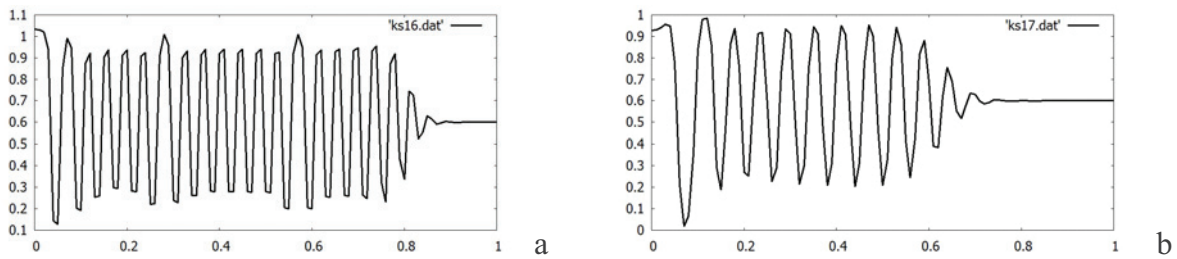
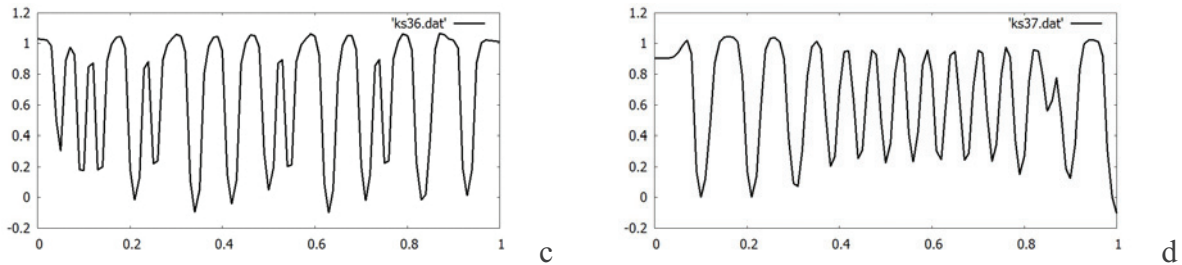


Рис. 11.

(а) Численное решение системы (ξ) с $\xi_0^0 = 0,6$, $U_0^0 = \sqrt{10}$, $V = 10$, временное сечение $t = 0,002$, (b) Численное решение системы (ξ) с $\xi_0^0 = 0,6$, $U_0^0 = \sqrt{10}$, $V = 20$ для временного сечения $t = 0,002$ (см. Рис. 11ab).

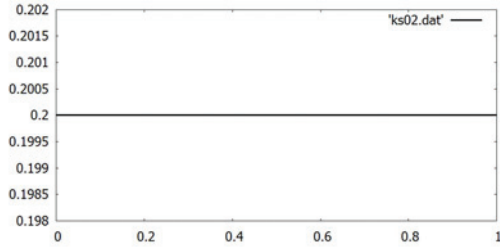


(с) Численное решение системы (ξ) с $\xi_0^0 = 0,6$, $U_0^0 = \sqrt{10}$, $V = 10$, временное сечение $t = 0,006$, (d) Численное решение системы (ξ) с $U_0^0 = \sqrt{10}$, $V = 20$ для временного сечения $t = 0,006$ (см. Рис. 11cd).

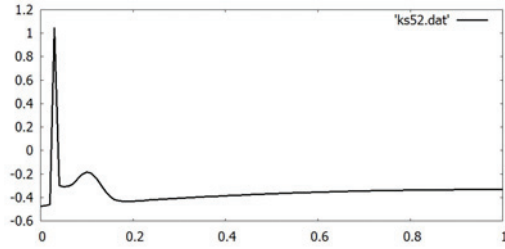
Как видим, есть разница частот, с большей скоростью V более мелкозернистая структура и быстрее переход от мелких мод к крупным, т.е. имеем разную динамику развития турбулизации.

IV) Теперь исследуем начальные значения ξ_0^0 из лабильной зоны, в окрестности ее границы (в окрестности бифуркации). Численный эксперимент показывает слабое развитие турбулентности переходящее в диффузию при больших значениях начальной скорости U_0^0 .

IVa) Рассмотрим $\xi_0^0 = 0,2$ для $U_0^b = \sqrt{50}$, $\varrho^0 = 2$ с граничным условием $U_0^b(t) = \sqrt{50}(1 + 2t)$. Ниже, на Рис. 12abcd приводим четыре временные сечения ($t = 0, 0,01, 0,016, 0,02$) графика $\xi(x, t)$, на Рис. 12efgh два временных сечения ($t = 0,01, 0,02$) графиков $\varrho(x, t)$, и $U(x, t)$ соответственно:



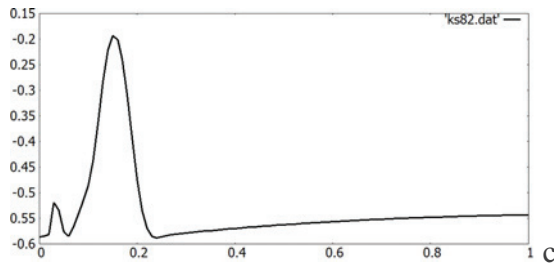
a



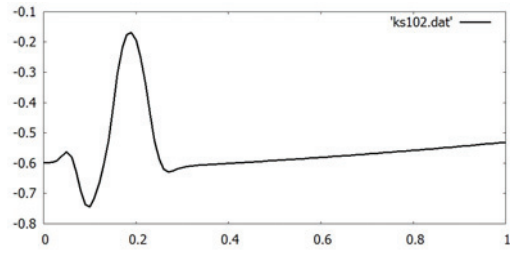
b

Рис. 12.

- (a) Численное решение системы (ξ) с $U_0^b = \sqrt{50}(1 + 2t)$, временное сечение $t = 0$,
 (b) Численное решение системы (ξ) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 12ab).

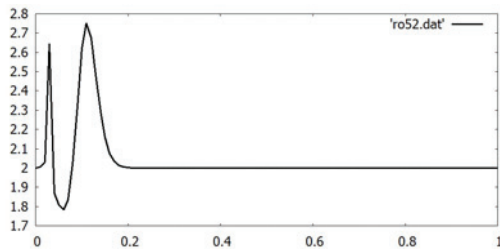


c

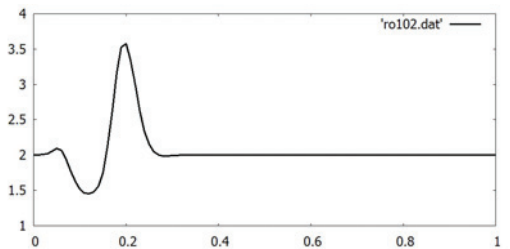


d

- (c) Численное решение системы (ξ) с $U_0^b = \sqrt{50}(1 + 2t)$, временное сечение $t = 0,016$,
 (d) Численное решение системы (ξ) для временного сечения $t = 0,02$ (см. Рис. 12cd).

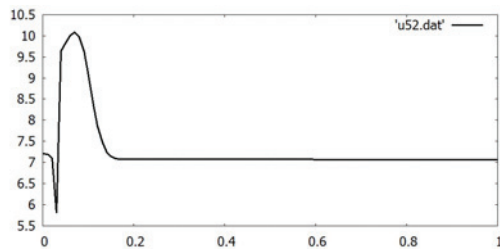


e

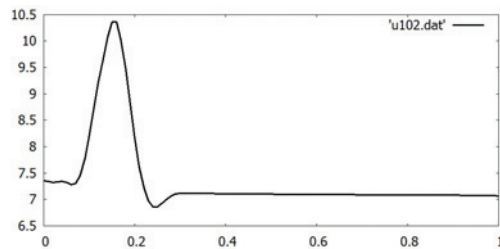


f

- (e) Численное решение системы (ϱ) с $U_0^b = \sqrt{50}(1 + 2t)$ временное сечение $t = 0,01$,
 (f) Численное решение системы (ϱ) для временного сечения $t = 0,02$ (см. Рис. 12ef).



g



h

- (g) Численное решение системы (U) с $U_0^b = \sqrt{50}(1 + 2t)$, временное сечение $t = 0,01$, (h) Численное решение системы (U) для временного сечения $t = 0,02$ (см. Рис. 12gh).

IVb) Рассмотрим $\xi_0^0 = 1$ для тех же значений $U_0^0 = \sqrt{50}$, $\varrho^0 = 2$ и граничном условии $U_0^b(t) = \sqrt{50}(1 + 2t)$. Ниже приводим временные сечения графиков $\xi(x, t)$, $\varrho(x, t)$, и $U(x, t)$: На Рис. 13abcd приводим четыре временные сечения ($t = 0$; 0,004; 0,006; 0,01) графика $\xi(x, t)$, на Рис. 13efgh два временных сечения ($t = 0,004$; $t = 0,01$) графиков $\varrho(x, t)$, и $U(x, t)$ соответственно:

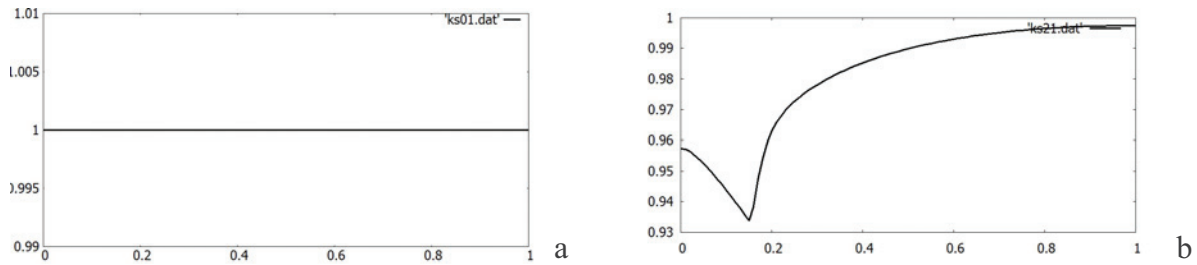
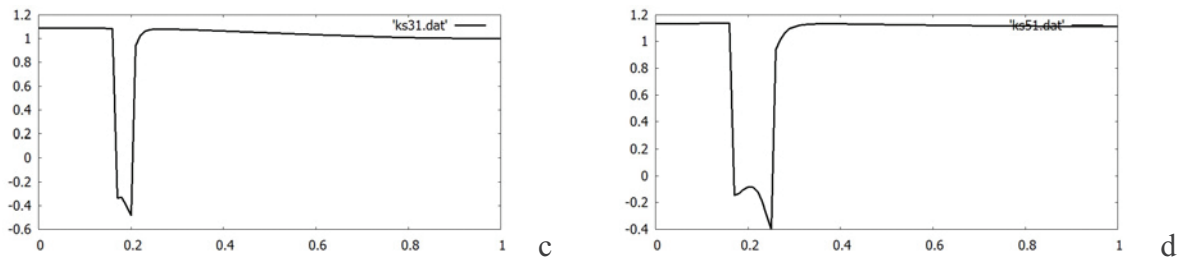
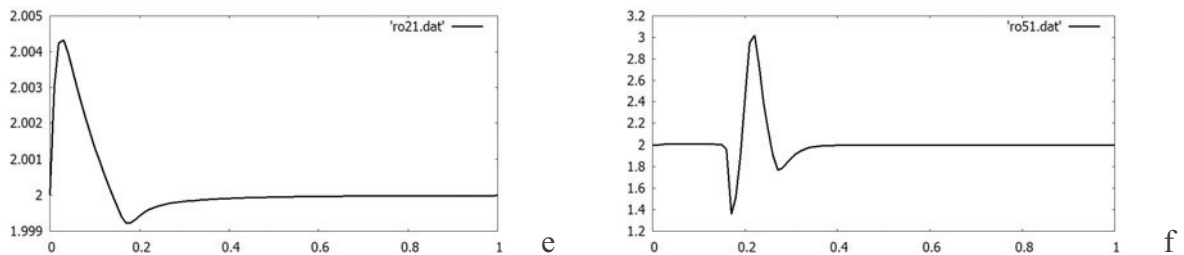


Рис. 13.

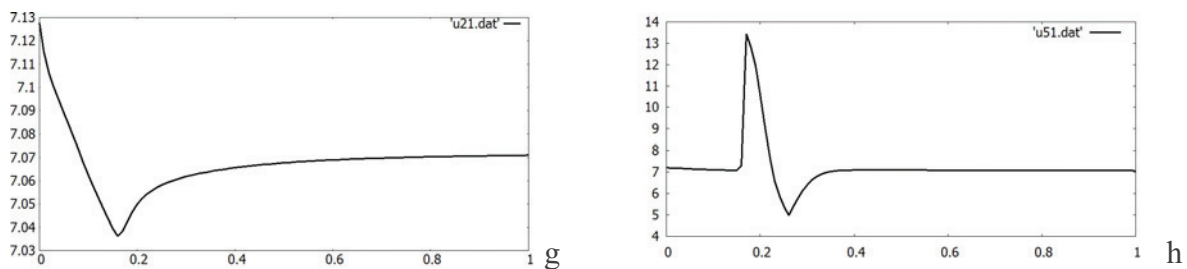
(а) Численное решение системы (ξ) с $U_0^0 = \sqrt{50}$, временное сечение $t = 0$, (б) Численное решение системы (ξ) для временного сечения $t = 0,004$ (см. Рис. 13ab).



(с) Численное решение системы (ξ) с $U_0^0 = \sqrt{50}$, временное сечение $t = 0,006$, (d) Численное решение системы (ξ) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 13cd).



(е) Численное решение системы (ϱ) с $U_0^0 = \sqrt{50}$, временное сечение $t = 0,004$, (f) Численное решение системы (ϱ) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 13ef).



(g) Численное решение системы (U) с $U_0^0 = \sqrt{50}$, временное сечение $t = 0,004$, (h) Численное решение системы (U) для временного сечения $t = 0,01$ (см. Рис. 13gh).

4.3 Комментарий

1) Мы рассмотрели первый шаг - адиабатический процесс, т.е. постоянная температура и нет источников и стоков. Следующий шаг - включение в свободную энергию Гиббса температуры и энтропии механики сплошных сред (горение). Необходимо построить потенциал свободной энергии Гиббса и энтропию для микро потока в этом случае.

2) В основе статьи лежит концепция ламинарно-турбулентного перехода как фазового перехода. Термодинамические соображения, основанные на этом предположении. Очень существенно предположение о существовании поверхности раздела: турбулентная нетурбулентная жидкость, которая представляется как губка.

3) К этому же относится теория Гинзбурга-Ландау ("губка" - аналог промежуточного состояния в сверхпроводниках). Стоит иметь в виду, что упоминание теории Г-Л означает, что утверждается наличие физической аналогии рассматриваемого явления со сверхпроводниками. Понимаем, что это очень сильное утверждение. Сразу много вопросов; например, есть ли аналог температуры, что такое его критическое значение и т.д. Эта аналогия полезна эвристически, но она не доказательна; если рассматривать физику явления серьезно, то **надо ставить эксперимент с самой "живой" системой**.

Полученные в численном эксперименте результаты действительно интересны, но поскольку они основываются только на правдоподобных соображениях и, по сути, являются формульным описанием сформулированной раньше физической картины, которая сама требует исследования, то их необходимо проверять **ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО**.

4) Приведенный численный эксперимент подтвердил термодинамический прогноз причин зарождения и развития турбулентности. Численный анализ - вещь полезная, но она только подтверждает, что с формулами все в порядке и иллюстрирует последнее, облегчая анализ эксперимента. Если картина губки, аналога промежуточного состояния сверхпроводников, имеет место, то это само по себе очень важно. Но в данный момент, это, все же, - гипотеза.

5) Необходимо сравнение результатов предложенной модели с хорошо известными и распространенными реконструкциями турбулентности и, прежде всего, с рассмотренными в [8] гидродинамическими неустойчивостями: описанием термоконвекции Бенара и неустойчивости Тейлора для течения Куэтта между вращающимися цилиндрами.

6) Следующим шагом в моделировании ламинарно-турбулентного перехода является учет геометрии. Как, например, геометрия влияет на турбулизацию потока при обтекании тела? Фактом является то, что гладкую границу хорошо отражает скорость U в модели сплошной среды, поэтому свойства гладкой границы уже учитываются параметром β в свободной энергии Гиббса.

Остается проблема учета "шероховатостей" границы. Можно ли этот фактор учесть модификацией формы потенциала (7)?

Литература

- [1] Rabinovich M.I., Stochastic self-oscillations and turbulence// *Advances of Physical Sciences*, 1978, 125 (1), pp 123 - 168.
- [2] Sabdenov K.O., Fractal theory is a slow transition from combustion to detonation in gases// *The physics of combustion and explosion*, in 1995, 32 (6), pp 106 - 112.
- [3] Monin A.S., Theoretical basis of geophysical fluid dynamics// *Gidrometeoizdat*, M., 1988, 424 p.
- [4] Grek G.R., Kozlov V.V. Chernorai V.G., Hydrodynamic instability of the boundary layer and separated flows (current state of research)// *Success Mechanics*, 2006, 1, pp 52 - 89.
- [5] Monin A.S., Yaglom A.M., *Statistical Fluid Mechanics. Part 1*// Science, M., 1965, 640 p.
- [6] Lapin Yu. The turbulent boundary layer in supersonic gas flows// *Nauka*, M., 1982, 312 pp.
- [7] Kuznetsov V.R., Sabel'nikov V.A., *Turbulence and Combustion*// *Nauka*, M., 1986, 288 pp.
- [8] Haken G., *Synergetics*// *Mir*, M., 1980, 400 pp.
- [9] Smirnov B.M., Fractal tangle - a new state of matter// *Advances of Physical Sciences*, 1991, 161 (8), pp. 141 - 153.
- [10] Landau L.D., Lifshitz E.M., *Theoretical physics. T. 6.*// *Hydrodynamics*, *Nauka*, M., 1988, 736 p.
- [11] Gladyshev G.P., *Thermodynamics and macrokinetics natural hierarchical processes*// *Nauka*, M., 1988, 287 pp.
- [12] Sychev V.V., *Complex thermodynamic systems*// *Energoatomizdat*, M, 1986, 208pp.
- [13] Cahn J.W., Hilliard J.E., Free energy of a nonuniform system. III. Nucleation in a two-component incompressible fluid. // *J. Chem. Physics*, 1959, 31 (3), pp. 688 - 699.
- [14] Cahn J.W., Phase separation by spinodal decomposition in isotropic solids// *J. Chem. Phys.*, 1965, 42 (1), pp. 93- 99.
- [15] Rehbinder P.A., *Selected works. Surface phenomena in disperse systems. Colloid chemistry*// *Nauka*, M., 1978 368 pp.
- [16] Lifshitz I.M., Grosberg A.U., Khokhlov A.R., The bulk of cooperation in statistical physics of polymer macromolecules// *Advances of Physical Sciences*, 1979, 127 (3), pp 353 - 389.
- [17] Smirnov B.M., Fractal tangle - a new state of matter// *Advances of Physical Sciences*, 1991, 161 (8), pp. 141 - 153.
- [18] De Gennes P.G., Dynamics of fluctuation and spinodal decomposition in polymer blends. // *J. of Chemical Physics*, 1980, 72 (9), pp. 4756 - 4763
- [19] Manevitch L.I., Shahinian Sh., Spinodal decomposition of binary mixtures of oligomers in a chemical reaction// *Nauka*, M, 1994, 124 pp
- [20] Savin A.V., Manevitch L.I., Christiansen P.L., Zolotaryuk A.V., Nonlinear dynamics of zigzag molecular chains// *Advances of Physical Sciences*, 1999, 169 (3), pp 255 - 270.
- [21] Erukhimovich I.J., *Weak super crystallization and other effects of fluctuation in rigid-chain concentrated polymer systems with complex architecture*// *Doctor Thesis. Sci. Sciences*, Moscow, 1994.
- [22] Barenblatt G.I., *Methods of the theory of combustion in the mechanics of polymers (combustion and explosion)*// *Nauka*, M., 1972, pp 15 -. 23)

- [23] Haise. I., Fundamentals of gas dynamics// Ed. G. Emmons, Fundamentals of the theory of gasdynamic discontinuities, 1963, 170 pp
- [24] Dreyer W., Wagner B., Sharp-Interface Model for Eutectic Alloys, Part I, //Concentration Dependent Surface Tension, Preprint, 2003
- [25] Lukashov E.A., Radkevich E.V., Solidification and Structurization of Instability Zones// Applied Mathematics, 2010, 1, 159-178
- [26] Lukashov E. A., Yakovlev N. N., Radkevich E. V. and Palin V. V., On the Possibility of the Cahn-Hilliard Approach Extension to the Solution of Gas Dynamics Problems (Inner Turbulence)//40th International Conference Applications of Mathematics in Engineering and Economics (AMEE'14), AIP Conference Proceedings 1631, 197 (2014); doi: 10.1063/1.4902477, pp. 197-207
- [27] Radkevich E. V., Palin V. V., On the Riemann-Hugoniot Catastrophe// Russian Journal of Mathematical Physics, 22 (2), 2015, pp. 227-236
- [28] Yakovlev N. N., Lukashov E. A., Radkevich E. V., On the reconstruction to the initial crystallization stage of binary alloys// Nanostructures, mathematical physics and modeling, 2014, 11 (2), pp. 5-36
- [29] Lukashov E. A., Radkevich E. V., Yakovlev N. N., On the reconstruction to the initial stage of inner turbulence//Nanostructures, mathematical physics and modeling, 2014, 11 (1), pp. 73-99.
- [30] Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V., Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase field system // Eur. J. Appl. Math. 10, 1999, pp. 55-77
- [31] Менделеев Д.И., О сопротивлении жидкостей и воздухоплавании// Санкт-Петербург, 1880, 104 с.
- [32] Паташинский А.З., Покровский В.Л., Флуктуационная теория неравновесных фазовых переходов// Наука, М., 1982, 382 с.
- [33] Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э., Теория колебаний// Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1959, 916 с.
- [34] Раушенбах Б.В., Вибрационное горение// Гос. изд. физ.-мат. лит., М., 1961, 500 с.
- [35] Бредшоу П., Введение в турбулентность и ее измерение// Мир, М., 1974, 210 с.
- [36] Лалин Ю.В., Статистическая теория турбулентности (прошлое и настоящее - краткий очерк идей)//Научно технические ведомости 2' 2004, Проблемы турбулентности и вычислительная гидродинамика (к 70-летию кафедры "Гидроаэродинамика")

ON THE THEORY OF NONEQUILIBRIUM PHASE TRANSITION TO THE LAMINAR-TURBULENT TRANSITION

Lukashev E.A.¹, Yakovlev N.N.¹, Radkevich E.V.², O.A. Vasil'eva³

¹*TMKB " SOYUZ ", Russia*

²*Lomonosov Moscow State University,*

³*Moscow State University of Civil Engineering*

evrad07@gmail.com, vasiljeva.ovas@yandex.ru
elukashov@yandex.ru, amntksoyuz@mail.ru

Received 08.09.2015

We present the reconstruction of the initial stage of the laminar-turbulent transition, a mechanism which is spinodal decomposition (diffusion separation).