

АСИМПТОТИКИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ОБТЕКАНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТЬЮ ПОВЕРХНОСТЕЙ С МАЛЫМИ НЕРОВНОСТЯМИ ПРИ БОЛЬШИХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

Р.К. Гайдуков, В.Г. Данилов

*Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики,
Москва, Россия*

rgaydukov@hse.ru, vgdanilov@mail.ru

Поступила 19.08.2016

В работе исследуются условия существования двухпалубной структуры пограничного слоя в типовых задачах обтекания несжимаемой вязкой жидкостью поверхностей с малыми неровностями (периодическими или локализованными) при больших значениях числа Рейнольдса. Определены характерные масштабы (степени малого параметра, входящие в решение), приводящие к двухпалубной структуре, и получено формальное асимптотическое решение задачи о течении в аксиально-симметричной трубе и двумерном канале с малыми периодическими неровностями на стенке. Доказано существование квазистационарного решения и его устойчивость для уравнения типа Рэлея, описывающего осцилляции течения на верхней палубе пограничного слоя двухпалубной структуры (т.е. в области классического пограничного слоя Прандтля) для задачи обтекания полубесконечной пластины с периодическими неровностями. Для задачи обтекания пластины с локализованной неровностью типа горбика, ступеньки или излома в виде угла получено формальное асимптотическое решение, имеющее также двухпалубную структуру. Для всех полученных уравнений построены алгоритмы численного решения и приведены результаты их применения.

УДК 517.95

1. Введение

1.1. Общая постановка задачи

Данная работа является обобщением работ [3; 6; 10–12; 62–66]. В работе исследуется задача обтекания вязкой несжимаемой жидкостью различных поверхностей с малыми неровностями при больших числах Рейнольдса Re . В качестве обтекаемых поверхностей рассматриваются:

1. полубесконечная пластина с малыми периодическими неровностями на ней;
2. полубесконечная пластина с малой локализованной неровностью типа горбика, ступеньки или излома в виде угла;
3. аксиально-симметричная труба и двумерный канал с малыми периодическими неровностями на стенках.

Неровности на обтекаемой поверхности S для всех рассмотренных случаев имеют следующий вид:

$$y_s = \varepsilon^\alpha \mu(x, x/\varepsilon^\beta), \quad (1.1)$$

где $\varepsilon = \text{Re}^{-1/2}$ — малый параметр, степени малого параметра α и β различны для случаев пластины и канала/трубы (конкретные значения α и β приведены далее, см. начало разделов 2–4), а функция $\mu(x, \xi)$ является либо периодической по аргументу ξ , либо стабилизирующей.

Исследуемые задачи описываются уравнениями Навье–Стокса и неразрывности (см., например, [72]):

$$\begin{cases} \langle \mathbf{U}, \nabla \rangle \mathbf{U} = -\nabla p + \varepsilon^2 \Delta \mathbf{U}, \\ \langle \nabla, \mathbf{U} \rangle = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

где \mathbf{U} — двумерный или трехмерный вектор скорости, p — давление. Система уравнений (1.2) дополняется граничными условиями прилипания к поверхности S :

$$\mathbf{U}|_S = \mathbf{0}, \quad (1.3)$$

а для задач обтекания пластины ставятся дополнительные граничные условия — условия согласования с внешним потоком, см. (2.6).

Особенностью рассмотренных задач является то, что они имеют одну и ту же структуру решения, а именно — двухпалубную структуру пограничного слоя, состоящую из тонкого пристеночного пограничного слоя и классического погранслоя Прандтля. Основной целью данной работы является исследование условий существования двухпалубной структуры пограничного слоя в перечисленных выше типовых задачах обтекания.

Одним из основных результатов этой работы является определение условий существования квазистационарного решения и исследование устойчивости этого решения для уравнения типа Рэлея, возникающего в области классического пограничного слоя Прандтля (на «верхней палубе» пограничного слоя с двухпалубной структурой) в задаче обтекания пластины с периодическими неровностями. Не менее важным полученным результатом является определение геометрических параметров неровностей на поверхности, приводящих к двухпалубной структуре пограничного слоя в задачах о течении в трубах и каналах, а также построение формального асимптотического решения (имеющего двухпалубную структуру) для задачи обтекания пластины с малой локализованной неровностью и для задач о течении жидкости в аксиально-симметричной трубе и двумерном канале с малыми периодическими неровностями на стенке.

1.2. Основные типы решений уравнений Навье–Стокса в задачах обтекания полубесконечных поверхностей

Исследование задач обтекания жидкостью различных поверхностей является одной из наиболее интересных математических задач гидродинамики. При движении вдоль поверхности вязкая жидкость не скользит по ней, а прилипает. Переход от нулевой скорости на поверхности к скорости внешнего течения происходит в очень тонком слое, который называется пограничным слоем. Вне этого слоя вязкость не играет существенной роли.

Теория пограничного слоя была сформулирована Л. Прандтлем более 110 лет назад. Впервые понятие пограничного слоя появилось в его работе [29]. Он исследовал задачу обтекания вязкой несжимаемой жидкостью полубесконечной пластинки при больших значениях числа Рейнольдса и получил, что вязкость оказывает влияние только в тонком слое вблизи поверхности пластины, который он назвал пограничным слоем, см. рис. 1.1. Исходные уравнения Навье–Стокса (1.2) ($\mathbf{U} = (u_B, v_B)$) в области пограничного слоя упрощаются:

$$\begin{cases} u_B \frac{\partial u_B}{\partial x} + v_B \frac{\partial u_B}{\partial \tau} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial^2 u_B}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial \tau} = 0, \\ \frac{\partial u_B}{\partial x} + \frac{\partial v_B}{\partial \tau} = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

где $\tau = y/\varepsilon$, см. также [71; 74; 75; 97]. Эта система уравнений носит название системы уравнений пограничного слоя Прандтля. Заметим, что уравнения (1.4), в отличие от уравнений Навье–Стокса (1.2) (содержащих малый параметр при старших производных), не содержат вязкость (параметра при старших производных), т.е. не зависят от числа Рейнольдса $\mathbf{Re} = LV/\nu$ (L — характерная длина, V — характерная скорость, $\nu = \eta/\rho$ — кинематическая вязкость жидкости, η — динамическая вязкость жидкости, ρ — плотность жидкости), которое входит в уравнения (1.4) только как параметр масштаба по вертикальной, т.е. нормальной к поверхности, переменной τ).

Решение системы уравнений (1.4) с граничным условием (1.3) для случая обтекания полубесконечной плоской пластинки было найдено Г. Блазиусом, см. [1]. Он свел систему уравнений (1.4) к краевой задаче для обыкновенного дифференциального уравнения на функцию тока $f(\gamma)$:

$$2f''' + f \cdot f'' = 0, \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad f|_{\gamma \rightarrow \infty} \rightarrow 1. \quad (1.5)$$

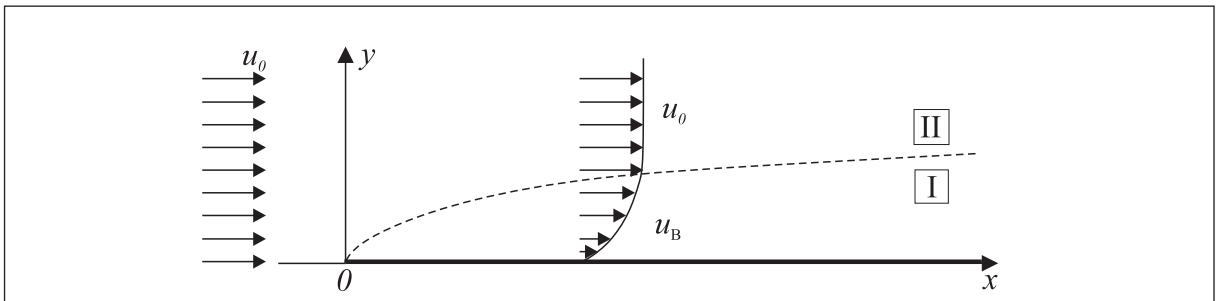


Рис. 1.1. Обтекание полубесконечной пластинки: I — пограничный слой Прандтля, II — внешний поток

Решение исходной системы (1.4), если принять что внешний поток $u_0 = 1$, см. рис. 1.1 (а это всегда можно сделать с помощью обезрамеривания), выражается через функцию $f(\gamma)$, которая называется функцией Блазиуса, следующим образом:

$$u_B = f'(\gamma), \quad v_B = \frac{1}{2\sqrt{x}}(\gamma f'(\gamma) - f(\gamma)), \quad (1.6)$$

где $\gamma = \frac{y}{\varepsilon\sqrt{x}}$, более подробно см. в [72; 74; 97].

Теория пограничного слоя Прандтля была большим шагом в исследовании задач обтекания различных тел и внесла огромный вклад в развитие аэродинамики, а также оказалась чрезвычайно полезным и практическим инструментом в инженерных приложениях. Математически эта теория была строго формализована значительно позже с помощью метода сращивания (или согласования) асимптотических разложений, см. [58; 70], который был развит и строго обоснован позднее М.А. Ильиным, см. [69].

Вопросы существования, единственности и устойчивости решений системы уравнений пограничного слоя Прандтля были рассмотрены в работах Г. Вейля [50], Н.С. Пискунова [84], О.А. Олейник [79; 80] и др. Позже все полученные результаты были обобщены в монографии О.А. Олейник и В.Н. Самохина [81], в которой наряду с вопросами существования, единственности и устойчивости решений также представлены их качественные свойства и асимптотическое поведение.

Отметим, что пограничный слой возникает не только в задачах обтекания поверхности, но и в других задачах течения жидкости, например, в задаче о стационарном истечении осесимметричной струи вязкой несжимаемой жидкости из трубы круглого сечения в свободное пространство, см. работу В.В. Пухначева и В.С. Белоносова [85].

После появления теории пограничного слоя было предпринято много попыток решения различных задач обтекания, однако не все они увенчались успехом. Трудность заключалась в том, что при неблагоприятном градиенте давления величина трения жидкости о стенку уменьшалась и становилась равной нулю, и в этой точке нулевого трения x_s решение имеет особенность. С. Гольдштейн показал (см. [13]), что, если в точке x_s производная скорости на стенке равна нулю, то решение уравнений пограничного слоя Прандтля имеет неустранимую особенность и не может быть непрерывно продолжено на область ниже по потоку от точки x_s . Л.Д. Ландау установил, что при приближении к точке нулевого трения нормальная составляющая вектора скорости (т.е. компонента v в наших обозначениях) неограниченно возрастает, а производная тангенциальной составляющей вектора скорости (т.е. компоненты u в наших обозначениях) $\partial u/\partial y$ на поверхности обтекаемого тела в точке x_s равна нулю, см. [72]. В точке нулевого трения наблюдается отрыв ламинарного пограничного слоя от поверхности обтекаемой пластины, а за ней образуется турбулентная (вихревая) область возвратного течения, см. рис. 1.2 и [72].

Однако, при отрыве пограничного слоя происходит его вытеснение в область внешнего потока, и возникает задача о взаимодействии пограничного слоя с внешним потоком. Эта задача исследуется в работах Дж. Лайтхилла, см. [16; 17]. Он изучал эффекты, оказывающие влияние на внешнее течение и эффект отрыва пограничного слоя в задачах обтекания тел сверхзвуковым потоком. Задача заключается в исследовании влияния малых возмущений на пограничный слой, когда внешний поток является сверхзвуковым. Он рассматривал взаимодействие (с математической

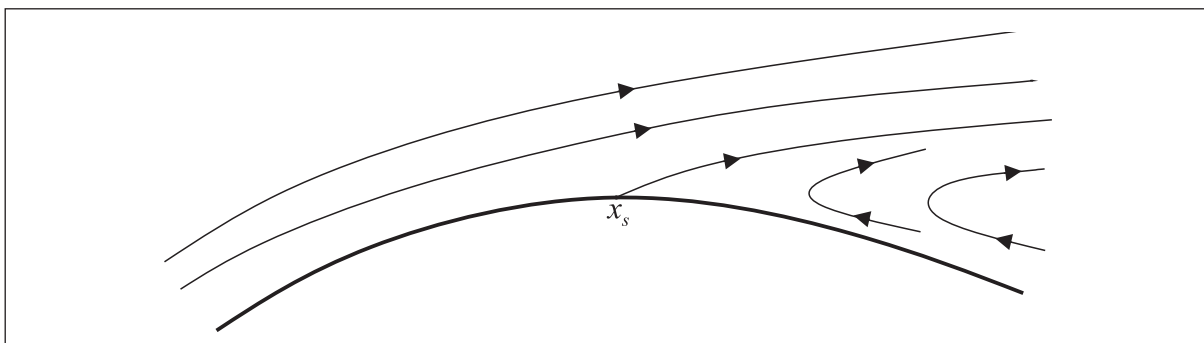


Рис. 1.2. Схематичное изображение отрыва пограничного слоя, x_s — точка нулевого трения

точки зрения) с помощью малых возмущений плоскопараллельного потока и линеаризации уравнений Навье–Стокса вокруг него. В результате своих исследований он пришел к гипотезе о том, что область, в которой происходит взаимодействие, разделяется на 3 части: область невязкого течения, лежащая вне пограничного слоя, в которой возмущения описываются линеаризованными уравнения невязкого сверхзвукового течения; область соответствующая классическому пограничному слою; и область около поверхности обтекаемого тела, в которой проявляются эффекты вязкости. Важным результатом в работе [17] является найденный там масштаб ширины области в которой происходит взаимодействие: она порядка $\mathcal{O}(\varepsilon^{3/4})$.

Работа Дж. Лайтхилла [17] была основой для появившейся позже в работе К. Стюартсона и П.Г. Вильямса [47] и работе В.Я. Нейланда [78] трехпалубной теории пограничного слоя. В работе [47] рассмотрена задача обтекания полубесконечной пластины сверхзвуковым потоком и, используя метод сращивания асимптотик (см. [58]), построено асимптотическое решение уравнений Навье–Стокса (1.2) при $\mathbf{Re} \rightarrow \infty$. В этих работах обнаружено, что пограничный слой имеет трехпалубную структуру, состоящую из: «нижней палубы» — области пристеночного течения, «средней палубы» — области классического пограничного слоя Прандтля и «верхней палубы» — области вытеснения, находящейся во внешнем потоке (область взаимодействия течения пограничного слоя с внешним потоком), см. рис. 1.3. В рамках этой теории результаты Лайтхилла [17] являются ее линеаризацией. Взаимодействие устроено следующим образом. Возмущение вязкого течения в нижней палубе, проходя через среднюю палубу приводит к возмущению давления в верхней палубе, которое индуцирует градиент давления в нижней палубе. В пристеночной области (т.е. в нижней палубе) течение описывается уравнениями Прандтля, но с индуцированным давлением, т.е. градиент давления в них не является заранее заданной величиной, как в теории Л. Прандтля [29], а определяется в процессе решения задачи во всей области. В средней палубе компоненты скорости потока выражаются через скорость Блазиуса (1.6). Более подробно это будет описано ниже. Теория трехпалубного пограничного слоя нашла отражение во множестве работ Ф.Т. Смита [33; 36–41; 43; 44], К. Стюартсона [45–47], О.С. Рыжова [31; 90–94], А.И. Рубана [87; 88], В.В. Сычева [54; 89], В.Я. Нейланда [57; 76–78] и многих других [23–26].

Одной из первых работ по изучению задач обтекания тел с малыми неровностями на поверхности является работа Ф.Т. Смита [36]. Он рассматривал задачу обтекания полубесконечной плоской пластины с локализованной неровностью на ней — малым горбиком цилиндрической формы, находящимся на некотором расстоянии L от ее края, см. рис. 1.3, имеющий следующий вид (в обозначениях, которые используются

в данной работе, $\varepsilon = \mathbf{Re}^{-1/2}$):

$$y_s = \varepsilon^{5/4} \mu(x/\varepsilon^{3/4}), \quad (1.7)$$

где $\mu(\xi)$ — функция солитонного типа: $\mu|_{\xi \rightarrow -\infty} = \mu|_{\xi \rightarrow \infty} = 0$. До этой работы такую задачу рассматривал Дж. Хант [14], однако полученная им модель верна только для горбиков очень малой высоты и ширины, а сами эти результаты являются частным случаем решения, полученного в [36], имеющего трехпалубную структуру, подобную [47]: пограничный слой разделяется на 3 области: «нижняя палуба», «среднюю палуба» и «верхняя палуба», см. рис. 1.3.

Полученное в [36] асимптотическое решение описанной выше задачи имеет следующий вид (ниже используются следующее обозначение: верхний индекс над функцией обозначает номер палубы согласно рис. 1.3, в которой эта функция определена).

- На верхней палубе (III):

$$u = 1 + \varepsilon^{1/2} u_1^{\text{III}}(\xi, \rho) + \dots, \quad v = \varepsilon^{1/2} v_1^{\text{III}}(\xi, \rho) + \dots, \quad p = \varepsilon^{1/2} p_1^{\text{III}}(\xi, \rho) + \dots, \quad (1.8)$$

где $\xi = x/\varepsilon^{3/4}$, $\rho = y/\varepsilon^{3/4}$, а функции u_1^{III} , v_1^{III} , p_1^{III} являются решением следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial u_1^{\text{III}}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1^{\text{III}}}{\partial \rho} = 0, \quad \frac{\partial u_1^{\text{III}}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial v_1^{\text{III}}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1^{\text{III}}}{\partial \rho} = 0. \quad (1.9)$$

- В средней палубе (II):

$$u = u_B(\tau) + \varepsilon^{1/4} u_1^{\text{II}}(\xi, \tau) + \dots, \quad v = \varepsilon^{1/2} v_1^{\text{II}}(\xi, \tau) + \dots, \quad p = \varepsilon^{1/2} p_1^{\text{II}}(\xi, \tau) + \dots, \quad (1.10)$$

где $\xi = x/\varepsilon^{3/4}$, $\tau = y/\varepsilon$, u_B — профиль течения Блазиуса (см. (1.6)), а функции u_1^{II} , v_1^{II} , p_1^{II} являются решением следующей системы уравнений:

$$\frac{\partial u_1^{\text{II}}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0, \quad u_B \frac{\partial u_1^{\text{II}}}{\partial \xi} + v_1^{\text{II}} \frac{\partial u_B}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial p_1^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0. \quad (1.11)$$

- На нижней палубе (I):

$$u = \varepsilon^{1/4} u_1^{\text{I}}(\xi, \theta) + \dots, \quad v = \varepsilon^{3/4} v_1^{\text{I}}(\xi, \theta) + \dots, \quad p = \varepsilon^{1/2} p_1^{\text{I}}(\xi, \theta) + \dots,$$

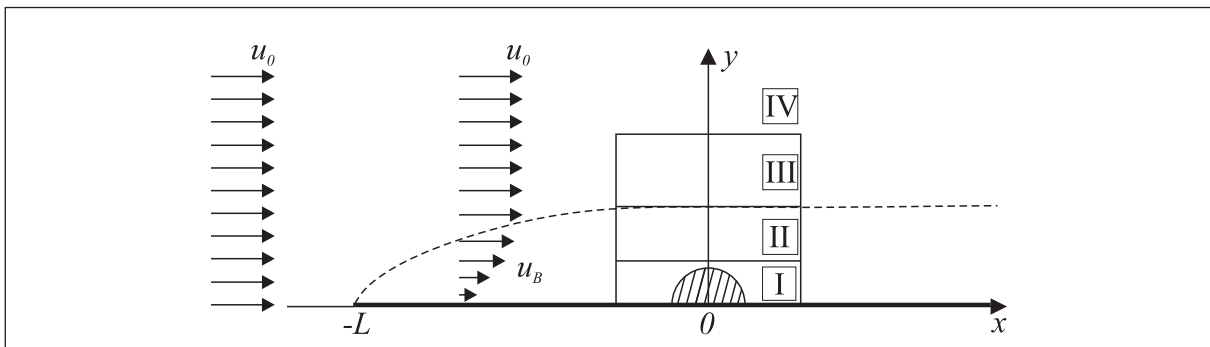


Рис. 1.3. Трехпалубная структура в задаче обтекании локализованного горбика: I — нижняя палуба (пристеночный слой); II — средняя палуба; III — верхняя палуба; IV — область внешнего потока; $u_0 = 1$, u_B — профиль течения Блазиуса, см. (1.6)

где $\xi = x/\varepsilon^{3/4}$, $\theta = y/\varepsilon^{5/4}$, а функции u_1^I , v_1^I , p_1^I являются решением системы уравнений Прандтля с индуцированным давлением:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1^I}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1^I}{\partial \theta} = 0, \\ u_1^I \frac{\partial u_1^I}{\partial \xi} + v_1^I \frac{\partial u_1^I}{\partial \theta} = -\frac{\partial p_1^I}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u_1^I}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial p_1^I}{\partial \theta} = 0. \end{cases} \quad (1.12)$$

Система уравнений на функции, описывающие течение в средней палубе (1.11) легко разрешима:

$$u_1^{\text{II}} = A(\xi)u'_B(\tau), \quad v_1^{\text{II}} = -A'(\xi)u_B(\tau), \quad (1.13)$$

где функция $A(\xi)$ (т.н. функция вытеснения) — константа интегрирования, которая должна удовлетворять условию $A|_{\xi \rightarrow -\infty} \rightarrow 0$. Все уравнения дополняются условиями согласования ($\lambda = u'_B(0)$):

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} (u_1^I - \lambda\theta) = \lambda A, \quad (1.14)$$

$$v_1^{\text{III}}(\xi, 0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} v_1^{\text{II}} = -A'(\xi), \quad (1.15)$$

$$p_1^{\text{II}}(\xi, 0) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} p_1^I, \quad p_1^{\text{III}}(\xi, 0) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} p_1^{\text{II}}. \quad (1.16)$$

Из последних уравнений систем (1.11), (1.12) и условий согласования (1.16) следует, что

$$p_1^{\text{III}}(\xi, 0) = p_1^{\text{II}}(\xi) = p_1^I(\xi). \quad (1.17)$$

Решение системы уравнений на верхней палубе (1.9) имеет вид (см. [20])

$$u_1^{\text{II}}(\xi, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_1^{\text{II}}(q, 0)(\xi - q)}{(\xi - q)^2 + \tau^2} dq, \quad v_1^{\text{II}}(\xi, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_1^{\text{II}}(q, 0)\tau}{(\xi - q)^2 + \tau^2} dq, \quad (1.18)$$

где $\tau \neq 0$, а

$$u_1^{\text{II}}(\xi, 0) = -p_1^{\text{II}}(\xi, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_1^{\text{II}}(q, 0)}{\xi - q} dq, \quad v_1^{\text{II}}(\xi, 0) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_1^{\text{II}}(q, 0)}{\xi - q} dq. \quad (1.19)$$

Индуцированное давление выражается следующим образом:

$$p_1^I(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{A'(\xi)}{\xi - q} dq. \quad (1.20)$$

Система уравнений на нижней палубе (1.12) дополняется условиями прилипания к обтекаемой поверхности (1.7):

$$u_1^I|_{\theta=\mu} = v_1^I|_{\theta=\mu} = 0.$$

Отметим, что трехпалубная структура пограничного слоя является сильно связанной системой. Течение на верхней палубе зависит от течения в нижней палубе

через функцию вытеснения $A(\xi)$, а течения на нижней и средней палубах зависят от течения на верхней палубе через давление. Роль средней палубы заключается лишь в посредничестве переноса давления и эффекта вытеснения между нижней и верхней палубы. Данная задача может быть решена только во всей совокупности, т.е. невозможно найти решение, например, только в нижней палубе, не находя решений в остальных областях. Более подробно трехпалубная структура представлена в работах [20; 26; 45].

Трехпалубная структура была также обнаружена при исследовании задачи обтекания пластины с малыми периодическими неровностями при больших значениях числа Рейнольдса в работе В.Г. Данилова и К.Ю. Россинского [68]. В этой работе рассматривалось обтекание вязкой несжимаемой жидкостью полубесконечной пластины с периодической неровностью, параметры которой точно такие же, как и в работе Ф.Т. Смита [36]:

$$y_s = \varepsilon^{5/4} \mu(x, \xi), \quad \xi = x/\varepsilon^{3/4},$$

но функция $\mu(x, \xi)$ отличается от [36]: она является 2π -периодической по аргументу ξ и имеет нулевое среднее, т.е. $\int_0^{2\pi} \mu(x, \xi) d\xi = 0$, в то время, как уже было написано выше, в работе [36] функция $\mu(x, \xi)$ была солитонного типа. Отметим, что периодичность функции μ приводит к необходимости применения помимо метода погранслоного разложения еще и метода осреднения, см. ниже.

В работах Ж. Мосса [18; 19] исследовались масштабы, приводящие к возникновению трехпалубной структуры. Важным результатом, полученным в [19] является тот факт, что наряду с трехпалубной структурой пограничного слоя возможна и двухпалубная, но при других масштабах неровности.

Независимо от работы Ж. Мосса [19] и раньше нее, в работе В.Г. Данилова и М.В. Макаровой [6] (см. также [7]) изучалась задача обтекания вязкой несжимаемой жидкостью пластины с малыми периодическими неровностями при больших значениях числа Рейнольдса. Неровности имели следующий вид:

$$y_s = \varepsilon^{4/3} \mu(x, x/\varepsilon), \tag{1.21}$$

где $\mu(x, \xi)$ — 2π -периодическая функция с нулевым средним. Как уже было написано выше, одна из особенностей решения такой задачи заключается в применении, помимо метода погранслоного разложения, еще и метода осреднения, более подробно см. в разделе 2.

Как видно из уравнения (1.21), параметры неровности (масштаб) отличен от параметров из работ, в которых получена трехпалубная структура [36; 68] и совпадает с параметрами из работы [19]. Эти параметры выбраны не случайным образом: длина волны неровности ($\xi = x/\varepsilon$) совпадает с масштабом классического пограничного слоя ($\tau = y/\varepsilon$). В работе [6] получена структура пограничного слоя, отличная от классической трехпалубной структуры — двухпалубная структура, см. рис. 1.4. Взаимодействие устроено схожим образом: возмущение течения в нижней палубе (возникающее из-за неровностей на поверхности) приводит к возмущению давления в средней палубе, которое индуцирует градиент давления в нижней палубе. Однако, основное отличие заключается в том, что возмущения, возникшие в нижней палубе, затухают в классическом пограничном слое (средней палубе), не оказывая влияния на внешний поток. Тем самым, исчезает задача о взаимодействии пограничного слоя с основным потоком.

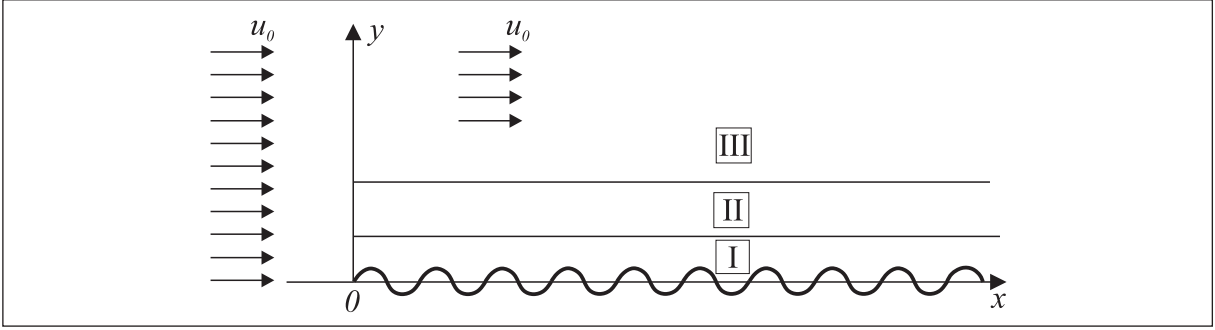


Рис. 1.4. Двухпалубная структура в задаче обтекания пластины с периодическими неровностями: I — нижняя палуба (пристеночный пограничный слой); II — средняя палуба (классический пограничный слой); III — область внешнего течения; $u_0 = 1$

Приведем кратко результаты, полученные в работе [6], с целью сравнения с приведенными выше (и ниже) результатами из других работ. Далее используются следующие обозначения: для любой функции $g(x, \xi)$ через $\bar{g}(x)$ обозначается ее среднее (т.е. $\bar{g}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x, \xi) d\xi$), а через $\tilde{g}(x, \xi) = g(x, \xi) - \bar{g}(x)$ — осциллирующая часть, подробнее см. определение 2.1. Верхние индексы над функциями обозначают номер области (согласно рис. 1.4), в которых они определены (согласно определению 2.3).

В работе [6] получена следующая теорема.

Теорема 1.1. Пусть $x \geq \delta > 0$. Тогда формальное асимптотическое решение имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= u_B(x, \tau) + \varepsilon^{1/3} (u_1^I(x, \xi, \theta) + u_1^{II}(x, \xi, \tau)) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}), \\ v(x, y) &= \varepsilon^{2/3} (v_2^I(x, \xi, \theta) + \tilde{v}_2^{II}(x, \xi, \tau)) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ p(x, y) &= p_0 + \varepsilon^{2/3} \tilde{p}_2^{II}(x, \xi, \tau) + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (1.22)$$

где $\theta = -\mu + y/\varepsilon^{4/3}$, $\tau = y/\varepsilon$, $\xi = x/\varepsilon$, а u_B — профиль течения Блазиуса (см. (1.6)). Функции u_1^I и v_2^I определяются следующими соотношениями:

$$u_1^I = u_1^* - u_1^{II}|_{\tau=0} - \theta \frac{\partial u_B}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0}, \quad v_2^I = v_2^* - \tilde{v}_2^{II}|_{\tau=0},$$

где функции u_1^* и v_2^* являются решением краевой задачи

$$\begin{cases} u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} + v_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} - u_1^* \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} = - \frac{\partial p_2^{II}}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2^*}{\partial \theta} = 0, \end{cases} \quad (1.23)$$

$$u_1^*|_{\theta=0} = v_2^*|_{\theta=0} = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \bar{v}_2^* = 0, \quad u_1^*|_{\xi} = u_1^*|_{\xi+2\pi}, \quad v_2^*|_{\xi} = v_2^*|_{\xi+2\pi},$$

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} - \frac{\partial u_B}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \right) = 0, \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u_B}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \right) = 0.$$

Система уравнений (1.23) есть не что иное, как система уравнений Прандтля с индуцированным давлением (слагаемые с множителями $\partial \mu / \partial \xi$ обусловлены заменой переменных, в которых поверхность пластины будет плоской, см. [6]).

Функция \tilde{v}_2^{II} удовлетворяет задаче

$$u_0 \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \xi^2} \right) - \tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{\partial^2 u_{\text{B}}}{\partial \tau^2} = 0, \quad (1.24)$$

$$\tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau=0} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^*, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^{\text{II}} = 0, \quad \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\xi} = \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\xi+2\pi}.$$

Функция \tilde{u}_1^{II} имеет вид $\tilde{u}_1^{\text{II}} = \mu \frac{\partial u_{\text{B}}}{\partial \tau}$. Функция \bar{u}_1^{II} является решением следующей задачи (линеаризованных уравнений Прандтля)

$$\begin{cases} u_{\text{B}} \frac{\partial \bar{u}_1^{\text{II}}}{\partial x} + \bar{u}_1^{\text{II}} \frac{\partial u_{\text{B}}}{\partial x} + \bar{v}_3^* \frac{\partial \bar{u}_1^{\text{II}}}{\partial \tau} + \bar{v}_4^* \frac{\partial u_{\text{B}}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \bar{u}_1^{\text{II}}}{\partial \tau^2} = 0, \\ \frac{\partial \bar{u}_1^{\text{II}}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_4^*}{\partial \tau} = 0 \end{cases}$$

с некоторыми естественными граничными условиями, однако она не играет роли, при исследовании характера течения в пограничном слое. Давление определяется соотношением

$$\frac{\partial \tilde{p}_2^{\text{II}}}{\partial \xi} = u_{\text{B}} \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} - \tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{\partial u_{\text{B}}}{\partial \tau}, \quad p_0 = \text{const}. \quad (1.25)$$

Уравнение (1.24) называется уравнением типа Рэлея (см. [53]) и ранее не было исследовано в литературе. В разделе 2 доказывается существование и единственность его решения, а также его устойчивость для нестационарного случая.

Также отметим, что построение асимптотического решения в работе [6] является строгим, в отличие от вывода решения в работе [36], ввиду того что в работе [6] асимптотическое решение строится во всей области (см. (1.22)), а в работе [36] (см. также [20]) асимптотические разложения выводятся отдельно в каждой области (см. (1.8), (1.10), (1.12)), тем самым при их подстановке в уравнения Навье–Стокса не учитываются произведения вида $f_i^{\text{I}} g_j^{\text{II}}$ и подобные им.

Помимо асимптотических решений, имеющих многопалубные структуры пограничных слоев, в литературе известны другие погранслойные структуры, например, теория асимптотических решений с внутренними пограничными слоями, развиваемая А.Б. Васильевой, В.Ф. Бутузовым, Н.Н. Нефедовым и др., см. [27; 59; 60].

В работах [22; 32; 42; 51; 52] рассматривалась задача о течении струи вдоль пластины («затопленная струя»), поверхность на поверхности которой имелись малые неровности, подобные рассматриваемым нами (локализованный горбик, ступенька, угол), но с другими параметрами: $y_s = \varepsilon^{9/7} \mu(\xi)$, $\xi = (x - x_0)/\varepsilon^{6/7}$, $\varepsilon = \mathbf{Re}^{-1/2}$. Асимптотическое решение задачи, рассматриваемой в работе [42] имеет вид

$$\begin{aligned} u &= u_0^{\text{II}}(\tau) + \varepsilon^{2/7} (u_1^{\text{II}}(\xi, \tau) + u_1^{\text{I}}(\xi, \theta)) + \mathcal{O}(\varepsilon^{8/7}), \\ v &= \varepsilon^{3/7} v_1^{\text{II}}(\xi, \tau) + \varepsilon^{5/7} v_1^{\text{I}}(\xi, \theta) + \mathcal{O}(\varepsilon^{8/7}), \\ p &= \varepsilon^{4/7} (p_1^{\text{II}}(\xi, \tau) + p_1^{\text{I}}(\xi)) + \mathcal{O}(\varepsilon^{8/7}), \end{aligned} \quad (1.26)$$

где $\tau = y/\varepsilon$, $\theta = y/\varepsilon^{9/7}$, а функция u_0^{II} обладает следующими свойствами:

$$u_0^{\text{II}} \rightarrow 0.5k\tau, \quad y \rightarrow 0, \quad u_0^{\text{II}} \rightarrow 0, \quad y \rightarrow \infty.$$

Полученное решение имеет двухпалубную структуру пограничного слоя, однако она имеет ряд серьезных отличий от структуры, полученной в данной работе.

В классическом пограничном слое (II) в работе [42] получаются уравнения, отличные от полученного в [6] уравнения типа Рэлея (1.24):

$$\begin{cases} u_0^{\text{II}} \frac{\partial u_1^{\text{II}}}{\partial \xi} + v_1^{\text{II}} \frac{\partial u_0^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0, \\ \frac{\partial u_1^{\text{II}}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0, \\ u_0^{\text{II}} \frac{\partial v_1^{\text{II}}}{\partial \xi} = -\frac{\partial p_1^{\text{II}}}{\partial \tau} \end{cases} \quad (1.27)$$

Эта система легко разрешается:

$$v_1^{\text{II}} = -A'(\xi)u_0^{\text{II}}(\tau), \quad u_1^{\text{II}} = A(\xi)\frac{\partial u_0^{\text{II}}}{\partial \tau}, \quad p_1^{\text{II}} = A''(\xi) \int_0^\tau (u_0^{\text{II}})^2 d\tau' + p_1^{\text{I}}(\xi),$$

где $A(\xi)$ и $p_1^{\text{I}}(\xi)$ — константы интегрирования. Для $A(\xi)$ ставится условие $A(-\infty) = 0$, а $p_1^{\text{I}}(\xi)$ определяется из условия $p_1^{\text{II}}|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0$:

$$p_1^{\text{I}}(\xi) = -A''(\xi) \int_0^\infty (u_0^{\text{II}})^2 d\tau',$$

откуда следует, что

$$p_1^{\text{II}} = -A''(\xi) \int_\tau^\infty (u_0^{\text{II}})^2 d\tau'. \quad (1.28)$$

Однако, это решение не годится для задачи обтекания пластины, где основное течение есть течение Блазиуса, т.е. в случае когда $u_0^{\text{II}} = u_{\text{B}}$. В этом случае интеграл в (1.28) расходится ($\int_\tau^\infty (u_{\text{B}})^2 d\tau' = \infty$).

В тонком пограничном слое (I) уравнения, полученные в [42] (см. также [51; 52]):

$$\begin{cases} u_1^{\text{I}} \frac{\partial u_1^{\text{I}}}{\partial \xi} + v_1^{\text{I}} \frac{\partial u_1^{\text{I}}}{\partial \theta} = -\frac{\partial p_1^{\text{I}}}{\partial \xi} + \frac{\partial^2 u_1^{\text{I}}}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial u_1^{\text{I}}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_1^{\text{I}}}{\partial \theta} = 0, \end{cases}$$

$$u_1^{\text{I}}|_{\theta=0} = v_1^{\text{I}}|_{\theta=0} = 0, \quad u_1^{\text{I}}|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow 0.5k(\theta + A(\xi)), \quad u_1^{\text{I}}|_{\xi \rightarrow -\infty} \rightarrow 0.5k\theta, \\ v_1^{\text{I}}|_{\xi \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad p_1^{\text{I}}|_{\xi \rightarrow -\infty} \rightarrow 0$$

аналогичны полученным в работе [6] уравнениям (1.23). Роль функции $A(\xi)$ в нашем случае играет слагаемое $\tilde{v}_1^{\text{II}}|_{\theta \rightarrow \infty}$, похожим образом формирующее давление в пристеночной области, см. (1.25).

Двухпалубная структура, аналогичная [42], была также обнаружена в работе [9], где изучалось течение слоя жидкости вдоль поверхности, имеющей форму выпуклого угла при больших значениях числа Рейнольдса. Им также были получены линейаризованные решения для малых углов. В работе [22] рассмотрено течение вдоль

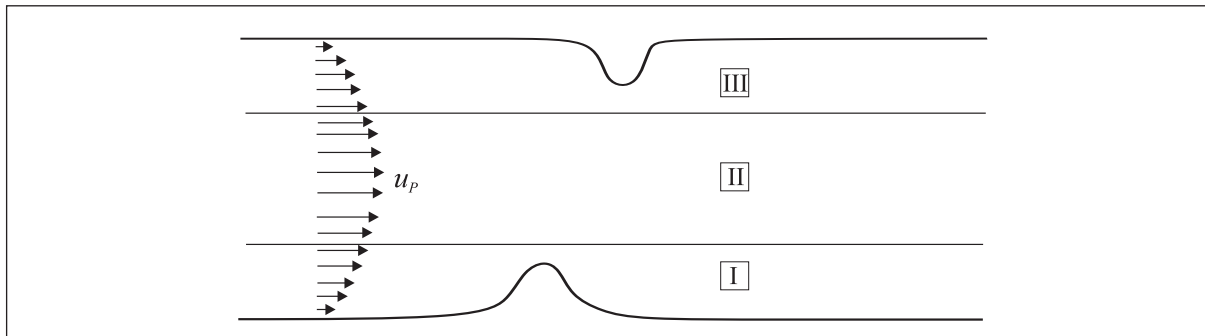


Рис. 1.5. Структура пограничного слоя в двумерном канале с неровностями из [34]:
I, III — пристеночные слои, II — основное течение

вертикальной поверхности с малыми неровностями типа горбика и ступеньки. В результате получено, что решение имеет двухпалубную структуру, аналогичную [32; 42]. Для совсем малых неровностей (высота которых $\ll 1$) получены аналитические и численные решения.

В разделе 3 получено асимптотическое решение такой задачи для случая обтекания пластины течением Блазиуса, имеющее двухпалубную структуру, похожую на полученную в задаче обтекания пластины с периодическими неровностями в [6].

Задача о течении вязкой несжимаемой жидкости при больших значениях числа Рейнольдса в каналах изучается в разных ситуациях разными авторами. Например, течение жидкости с нелинейной вязкостью исследовано в работах А.М. Блохина и др., см. [2; 56], а течение в двумерном канале (а также в симметричной трубе) с малыми локализованными неровностями на стенках было рассмотрено в работах Ф.Т. Смита [34; 35] и работах Ж. Мосса [5; 21]. Структура течения, полученная в [34] приведена на рис. 1.5.

В данной работе рассматривается аналогичная задача, но для случая периодических неровностях на стенках. Ввиду нелинейности задачи, периодические неровности не могут рассматриваться как суперпозиция уединенных (локализованных) неровностей. Более того, в работе [34] решение устроено так, что каждая из неровностей на стенке вносит свой вклад в основное течение («core flow»), т.е. возмущение в пограничном слое от неровности на одной стенке передается через основной поток в пограничный слой у другой стенки канала, что требует изменения граничного условия, и это изменение достигает другой стенки и т.д. Очевидно, что в случае периодических неровностей на стенках канала, такая структура течения приводит к задаче о бесконечных отражениях.

Отметим, что возмущения течения могут быть вызваны не только неровностями на стенке, но и, например, инъекцией жидкости через проницаемую стенку, см. [15]. В этом случае наблюдается похожая структура течения, но с другим аналитическим описанием.

Задача о течении в канале была также рассмотрена в [48]. Однако, полученное в [48] решение найдено в виде линейной аппроксимации при условии что течение ламинарное. Также задача о течении в канале с волнообразными стенками, но с учетом конвективного теплопереноса, была рассмотрена в [8], где авторы, в отличие от представленного в работе подхода, построили математическую модель исследуемой задачи не используя напрямую систему уравнений Навье–Стокса, а используя некоторую модификацию модели $k - \varepsilon$ турбулентного течения. Для численного решения они использовали метод конечных элементов на неортогональной разностной сетке.

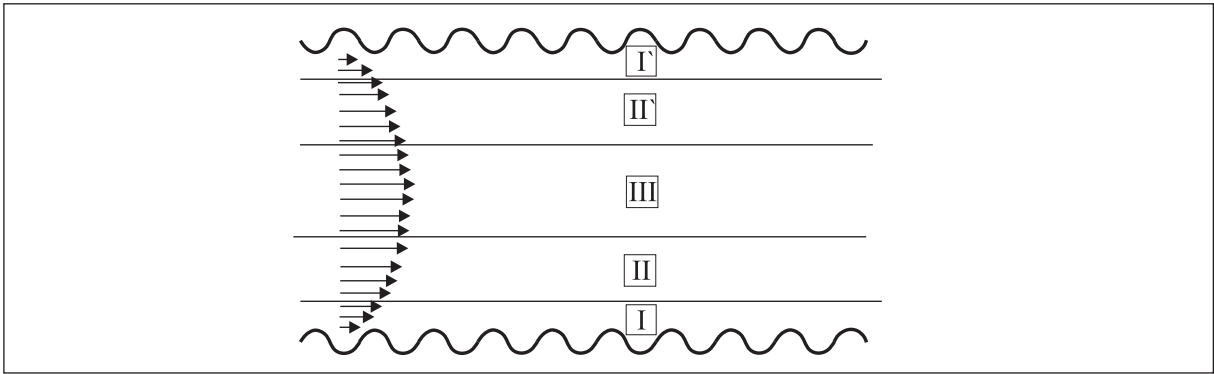


Рис. 1.6. Двухпалубная структура пограничного слоя в двумерном канале с периодическими неровностями I, Γ — нижние палубы, II, II¹ — верхние палубы, III — основное невозмущенное течение

В разделе 4 получено асимптотическое решение, имеющее двухпалубную структуру (см. рис. 1.6), в которой возмущение от неровности на стенке, возникающее в пристеночном пограничном слое, не вносит вклад в основной поток (который есть течение Пуазейля), а затухает в толстом пограничном слое, т.е. пограничный слой у одной стенки не взаимодействует с пограничным слоем у другой стенки.

Полученное в разделе 4 решение похоже на решение, полученное для задачи обтекания пластинки с периодическими неровностями в работе [6]: уравнения, описывающее течение в тонком пристеночном слое совпадают (с точностью до коэффициентов), а отличие заключается лишь в уравнениях, описывающих течение в толстом пограничном слое: для случая канала получено хорошо известное уравнение Лапласа, а для случая пластинки, как уже было сказано ранее, — уравнение типа Рэлея (1.24), исследование которого проводится в разделе 2. Однако, параметры (масштаб), описывающие неровность, и приводящие к двухпалубной структуре решения различны для случаев канала и пластинки.

Это позволяет сделать вывод о том, что двухпалубная структура является свойством модели Навье–Стокса, так же как и трехпалубная структура.

Перечисленные результаты были обсуждены и суммированы в диссертационной работе [61], тексту которой мы ниже в значительной степени следуем.

2. Задача обтекания пластины с малыми периодическими неровностями

2.1. Постановка задачи

Будем рассматривать нестационарное двумерное течение несжимаемой вязкой жидкости вдоль зафиксированной в начале координат полубесконечной пластины с малыми периодическими неровностями на поверхности при больших значениях числа Рейнольдса Re , см. рис. 2.1. Будем считать, что набегающий поток плоскопараллельный со скоростью $\mathbf{U}_0 = (1, 0)$.

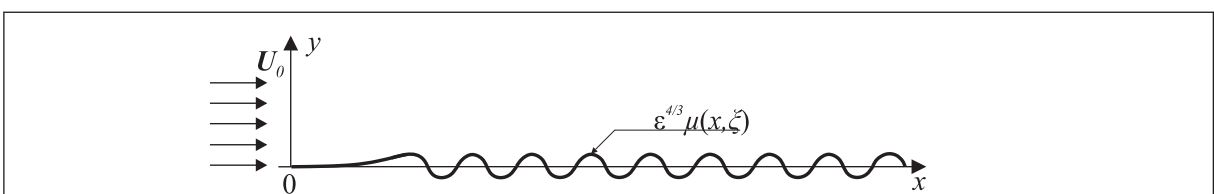


Рис. 2.1

Как уже было сказано в разделе 1, эта задача описывается системой уравнений Навье–Стокса и неразрывности, которая в нестационарном случае имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \varepsilon^{-2/3} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \langle \mathbf{U}, \nabla \rangle \mathbf{U} = -\nabla p + \varepsilon^2 \Delta \mathbf{U}, \\ \langle \nabla, \mathbf{U} \rangle = 0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\mathbf{U} = (u, v)$ — это вектор скорости, p — давление и $\varepsilon = \mathbf{Re}^{-1/2}$ — малый параметр. Наличие коэффициента $\varepsilon^{-2/3}$ перед производной по времени в (2.1) связано с тем, что течение в окрестности поверхности имеет двухслойную структуру (см. рис. 2.2), которая порождает специальную иерархию времен. Масштаб времени для флуктуаций скорости в тонком пограничном слое существенно меньше, чем масштаб времени для флуктуаций в пограничном слое Прандтля, см. ниже Теорему 2.1.

Мы считаем, что поверхность пластины описывается следующим уравнением:

$$y_s = \varepsilon^{4/3} \mu(x, x/\varepsilon), \quad (2.2)$$

где функция $\mu(x, \xi)$ является 2π -периодической по аргументу ξ , имеет нулевое среднее (в смысле Определения 2.1 ниже):

$$\int_0^{2\pi} \mu(x, \xi) d\xi = 0, \quad (2.3)$$

и удовлетворяет следующему свойству:

$$\left. \frac{\partial^k \mu}{\partial x^k}(x, \xi) \right|_{x=0} = 0, \quad k \leq 2. \quad (2.4)$$

Система уравнений (2.1) дополняется граничным условием прилипания к поверхности (2.2), которое имеет следующий вид:

$$\mathbf{U} \Big|_{\substack{y=y_s \\ x>0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

и условиями согласования с внешним потоком:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{\substack{y=0 \\ x<0}} = 0, \quad \left. v \right|_{\substack{y=0 \\ x<0}} = 0, \quad \mathbf{U} \Big|_{y \rightarrow \pm\infty} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} \Big|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Задача (2.1), (2.5), (2.6) в стационарном случае была подробно изучена в [6] (см. также [7]), и в разделе 1.2 были подробно приведены результаты из этой работы, см. Теорему 1.1.

В этой задаче мы имеем дело с двумя типами быстрых переменных: периодической переменной и переменной типа пограничного слоя. Хорошо известно, что в случае периодической быстрой переменной необходимо разделять осциллирующую часть и среднее значение. Это необходимо ввиду того, что граничные условия для средней и осциллирующей частей компонент скорости являются различными для величин одного порядка. Например, в тонком пограничном слое (см. (2.25) ниже) граничное условие для осциллирующей части функции v_2^* отсутствует, но присутствует граничное условие для средней. Эта особенность, в частности, приводит к особенностям построения алгоритма решения задачи в пристеночной области. Введем следующие определения.

Определение 2.1. Для любой 2π -периодической гладкой функции $g(x, \xi)$, определенной на $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, определим

(i) *среднее значение* формулой

$$\bar{g}(x) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x, \xi) d\xi, \quad (2.7)$$

(ii) и *осциллирующую часть* формулой

$$\tilde{g}(x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} g(x, \xi) - \bar{g}(x). \quad (2.8)$$

Справедливы следующие очевидные утверждения:

$$1. \bar{\tilde{g}} = 0; \quad 2. \overline{\tilde{g}} = 0; \quad 3. \frac{\partial g}{\partial \xi} = 0 \Leftrightarrow \tilde{g} = 0; \quad 4. \overline{\tilde{g} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \xi}} = 0. \quad (2.9)$$

Первое и второе соотношения из (2.9) позволяют нам разделить среднее значение и осциллирующую часть.

Доказательство утверждений (2.9) очевидно:

$$1. \bar{\tilde{g}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x, \xi) d\xi - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{g}(x) d\xi = \bar{g} - \frac{1}{2\pi} \bar{g} 2\pi = 0;$$

$$2. \overline{\tilde{g}} = \bar{g} - \bar{\bar{g}} = \bar{g} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \bar{g}(x) d\xi = \bar{g} - \frac{1}{2\pi} \bar{g} 2\pi = 0;$$

$$3. \text{«}\Rightarrow\text{»}: \frac{\partial g}{\partial \xi} = 0 \Rightarrow g = g(x) \Rightarrow \bar{g}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(x) d\xi = \frac{1}{2\pi} g(x) 2\pi = g(x) \Rightarrow \tilde{g} = 0;$$

$$\text{«}\Leftarrow\text{»}: \tilde{g} = 0 \Rightarrow g = \bar{g}(x) \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial \xi} = 0;$$

$$4. \overline{\tilde{g} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \xi}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g} \frac{\partial \tilde{g}}{\partial \xi} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{g} d\tilde{g} = \frac{1}{2\pi} \frac{\tilde{g}^2}{2} \Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{4\pi} (\tilde{g}^2(x, 2\pi) - \tilde{g}^2(x, 0)) = \\ = \frac{1}{4\pi} (\tilde{g}(x, 2\pi) - \tilde{g}(x, 0)) (\tilde{g}(x, 2\pi) + \tilde{g}(x, 0)) = 0, \text{ т.к. в силу периодичности} \\ \text{функции } g: \tilde{g}(x, 2\pi) = g(x, 2\pi) - \bar{g}(x) = g(x, 0) - \bar{g}(x) = \tilde{g}(x, 0).$$

Определение 2.2. Для любой 2π -периодической гладкой функции $g(x, \xi)$, определенной на $\mathbb{R} \times [0, 2\pi]$, и такой, что $\bar{g}(x) = 0$, определим функцию

$$G(x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\xi} \tilde{g}(x, \xi) d\xi \quad (2.10)$$

такую, что $\overline{G}(x) = 0$.

Теперь перейдем к построению решения задачи (2.1), (2.5), (2.6). Введем пограничные переменные (характерный масштаб):

$$\theta = y/\varepsilon^{4/3}, \quad \tau = y/\varepsilon, \quad \xi = x/\varepsilon. \quad (2.11)$$

Будем искать решение задачи (2.1), (2.5), (2.6) в виде

$$\begin{aligned} u(t, x, y) &= u_0^{\text{II}}(t, x, \tau) + u_0^{\text{III}}(t, x, y) + \\ &+ \sum_{i \geq 1} \varepsilon^{i/3} (u_i^{\text{I}}(t, x, \xi, \theta) + u_i^{\text{II}}(t, x, \xi, \tau) + u_i^{\text{III}}(t, x, \xi, y)), \\ v(t, x, y) &= \sum_{i \geq 2} \varepsilon^{i/3} (v_i^{\text{I}}(t, x, \xi, \theta) + v_i^{\text{II}}(t, x, \xi, \tau) + v_i^{\text{III}}(t, x, \xi, y)), \\ p(t, x, y) &= p_0^{\text{III}}(t, x, y) + \\ &+ \sum_{i \geq 1} \varepsilon^{i/3} (p_i^{\text{I}}(t, x, \xi, \theta) + p_i^{\text{II}}(t, x, \xi, \tau) + p_i^{\text{III}}(t, x, \xi, y)). \end{aligned} \quad (2.12)$$

Мы предполагаем, что начальные условия для (2.1) имеют вид

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= f'(\tau/\sqrt{x}) + \varepsilon^{1/3} (U_1^{\text{I}}(x, \xi, \theta) + \bar{U}_1^{\text{II}}(x, \xi, \tau)) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}), \\ v|_{t=0} &= \varepsilon^{2/3} (V_2^{\text{I}}(x, \xi, \theta) + \tilde{V}_2^{\text{II}}(x, \xi, \tau)) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ p|_{t=0} &= P_0 + \varepsilon^{2/3} \tilde{P}_2^{\text{II}}(x, \xi, \tau) + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.13)$$

где функции U_1^{I} , \bar{U}_1^{II} , V_2^{I} , \tilde{V}_2^{II} , \tilde{P}_2^{II} являются функциями пограничного слоя (в смысле Определения 2.3 ниже) и $P_0 = \text{const}$.

В соответствии с результатами из [6], решение имеет двухпалубную структуру (см. рис. 2.2). Верхний индекс у функций означает номер палубы, в которой она определена (в смысле определения 2.3 ниже): I — тонкий пограничный слой («нижняя палуба»), II — классический пограничный слой («верхняя палуба»), и III — область внешнего (невозмущенного) течения.

Определение 2.3. Пусть $N \in \mathbb{Z}_+$ достаточно большое. Тогда

- (i) пограничной функцией в тонком пограничном слое I называется 2π -периодическая гладкая функция, убывающая как $|\theta^{-N}|$ при $\theta \rightarrow \infty$;
- (ii) пограничной функцией в классическом пограничном слое II называется 2π -периодическая гладкая функция, убывающая как $|\tau^{-N}|$ при $\tau \rightarrow \infty$.

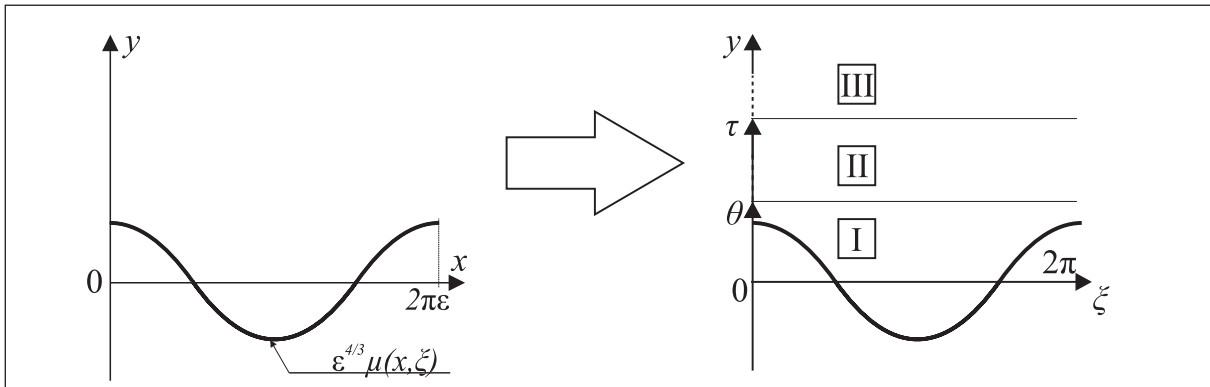


Рис. 2.2. Двухпалубная структура пограничного слоя

Справедлива следующая теорема (нестационарный аналог Теоремы 1.1 (см. раздел 1.2) из работы [6]).

Теорема 2.1. Пусть $x \geq \delta > 0$. Тогда формальное асимптотическое решение задачи (2.1), (2.5), (2.6) имеет вид

$$\begin{aligned} u(t, x, y) &= 1 + u_0^{\text{II}}(t, x, \tau) + \varepsilon^{1/3}(u_1^{\text{I}}(t, x, \xi, \theta) + \bar{u}_1^{\text{II}}(t, x, \tau)) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}), \\ v(t, x, y) &= \varepsilon^{2/3}(\tilde{v}_2^{\text{I}}(t, x, \xi, \theta) + \tilde{v}_2^{\text{II}}(t, x, \xi, \tau)) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ p(t, x, y) &= p_0^{\text{III}}(t) + \varepsilon^{2/3}\tilde{p}_2^{\text{II}}(t, x, \xi, \tau) + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (2.14)$$

где $\theta = y/\varepsilon^{4/3}$, $\tau = y/\varepsilon$, $\xi = x/\varepsilon$. Функции u_1^{I} и \tilde{v}_2^{I} определяются следующими соотношениями:

$$u_1^{\text{I}} = u_1^* - \bar{u}_1^{\text{II}}|_{\tau=0} - \theta \frac{\partial u_0^{\text{II}}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0}, \quad \tilde{v}_2^{\text{I}} = v_2^* - \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau=0}, \quad (2.15)$$

где функции u_1^* и v_2^* являются решением следующей системы (системы уравнений Прандтля с индуцированным давлением):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1^*}{\partial t} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} + v_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} = - \frac{\partial \tilde{p}_2^{\text{II}}}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial v_2^*}{\partial \theta} + \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} = 0, \end{cases} \quad (2.16)$$

$$\begin{aligned} u_1^*|_{\theta=\mu} &= \mu \frac{\partial u_0^{\text{II}}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0}, \quad v_2^*|_{\theta=\mu} = 0, \quad u_1^*|_{\xi} = u_1^*|_{\xi+2\pi}, \\ v_2^*|_{\xi} &= v_2^*|_{\xi+2\pi}, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\partial u_0^{\text{II}}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0}, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Функция \tilde{v}_2^{II} является решением задачи $\left(\Delta_{\xi, \tau} = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right)$

$$\varepsilon^{1/3} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_{\xi, \tau} \int_0^{\xi} \tilde{v}_2^{\text{II}} d\xi + u_0^{\dagger} \Delta_{\xi, \tau} \tilde{v}_2^{\text{II}} - \tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{\partial^2 u_0^{\dagger}}{\partial \tau^2} = 0, \quad (2.18)$$

$$\tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau=0} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^*, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^{\text{II}} = 0, \quad \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\xi} = \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\xi+2\pi}. \quad (2.19)$$

Функция $u_0^{\text{II}} = u_0^{\dagger} - 1$, где функция u_0^{\dagger} является решением системы уравнений пограничного слоя Прандтля

$$\begin{cases} \varepsilon^{-2/3} \frac{\partial u_0^{\dagger}}{\partial t} + u_0^{\dagger} \frac{\partial u_0^{\dagger}}{\partial x} + \bar{v}_3^{\dagger} \frac{\partial u_0^{\dagger}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u_0^{\dagger}}{\partial \tau^2} = 0, \\ \frac{\partial u_0^{\dagger}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_3^{\dagger}}{\partial \tau} = 0, \end{cases} \quad (2.20)$$

с граничными условиями $u_0^{\dagger}|_{\tau=0} = 0$, $\bar{v}_3^{\dagger}|_{\tau=0} = 0$, $u_0^{\dagger}|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 1$ и начальным условием $u_0^{\dagger}|_{t=0} = f'(\tau/\sqrt{x})$. Решение такой системы выражается в виде функции Блазиуса $f(\gamma)$ (см. (1.6)), а именно:

$$u_0^{\dagger} = f'(\tau/\sqrt{x}), \quad \bar{v}_3^{\dagger} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{\tau}{\sqrt{x}} f'(\tau/\sqrt{x}) - f(\tau/\sqrt{x}) \right). \quad (2.21)$$

Функция \bar{u}_1^{II} является решением следующей задачи (системы линеаризованных уравнений Прандтля)

$$\begin{cases} \varepsilon^{-2/3} \frac{\partial \bar{u}_1^{\text{II}}}{\partial t} + u_0^\dagger \frac{\partial \bar{u}_1^{\text{II}}}{\partial x} + \bar{u}_1^{\text{II}} \frac{\partial u_0^\dagger}{\partial x} + \bar{v}_3^\dagger \frac{\partial \bar{u}_1^{\text{II}}}{\partial \tau} + \bar{v}_4^\dagger \frac{\partial u_0^\dagger}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial \tau^2} = 0, \\ \frac{\partial \bar{u}_1^{\text{II}}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_4^\dagger}{\partial \tau} = 0 \end{cases} \quad (2.22)$$

с некоторыми естественными граничными условиями*. Давление определяется равенством

$$\frac{\partial \tilde{p}_2^{\text{II}}}{\partial \xi} = u_0^\dagger \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} - \tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{\partial u_0^\dagger}{\partial \tau}. \quad (2.23)$$

Замечание 2.1. Теорема 2.1, как и приведенные далее в разделах 3 и 4 Теоремы 3.1, 3.2, 4.1–4.3 носят чисто методический характер. В них приводится общий вид формальных асимптотических решений (определение нецелых степеней малого параметра ε , по которым строятся разложения — нетривиальная задача, т.к. они не входят в исходное уравнение), который позволяет получить (по аналогии с приводимыми доказательствами) уравнения на следующие члены асимптотик, до любого порядка малости.

Замечание 2.2. Если сделать замену вертикальной переменной, выравнивающую границу: $z = y - y_s$, то асимптотическое решение (2.14) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} u(t, x, z) &= 1 + u_0^{\text{II}}(t, x, \tau') + \\ &\quad + \varepsilon^{1/3} (u_1^{\text{I}}(t, x, \xi, \theta') + \bar{u}_1^{\text{II}}(t, x, \tau') + \tilde{u}_1(t, x, \xi, \tau')) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}), \\ v(t, x, z) &= \varepsilon^{2/3} (v_2^{\text{I}}(t, x, \xi, \theta') + \tilde{v}_2^{\text{II}}(t, x, \xi, \tau')) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ p(t, x, z) &= p_0^{\text{III}}(t) + \varepsilon^{2/3} \tilde{p}_2^{\text{II}}(t, x, \xi, \tau') + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

где $\theta' = z/\varepsilon^{4/3}$, $\tau' = z/\varepsilon$, $u_0^{\text{II}} = f'(\tau'/\sqrt{x})$, краевая задача (2.16), (2.17) примет следующий вид

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1^*}{\partial t} + u_1^* \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta'} \right) + v_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta'} = - \frac{\partial \tilde{p}_2^{\text{II}}}{\partial \xi} \Big|_{\tau'=0} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \theta'^2}, \\ \frac{\partial v_2^*}{\partial \theta'} + \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta'} = 0, \end{cases} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} u_1^* \Big|_{\theta'=0} = v_2^* \Big|_{\theta'=0} = 0, \quad u_1^* \Big|_{\xi} = u_1^* \Big|_{\xi+2\pi}, \quad v_2^* \Big|_{\xi} = v_2^* \Big|_{\xi+2\pi}, \\ \bar{v}_2^* \Big|_{\theta' \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta'} \Big|_{\theta' \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\partial u_0^{\text{II}}}{\partial \tau'} \Big|_{\tau'=0}, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\theta' \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u_0^{\text{II}}}{\partial \tau'} \Big|_{\tau'=0}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

где функции u_1^* и v_2^* определяются следующими равенствами

$$u_1^{\text{I}} = u_1^* - \bar{u}_1^{\text{II}} \Big|_{\tau'=0} - \tilde{u}_1^{\text{II}} \Big|_{\tau'=0} - \theta' \frac{\partial u_0^{\text{II}}}{\partial \tau'} \Big|_{\tau'=0}, \quad v_2^{\text{I}} = v_2^* - \tilde{v}_2^{\text{II}} \Big|_{\tau'=0},$$

*Решение этой системы уравнений (т.е. функции \bar{u}_1^{II} и \bar{v}_4^\dagger) не играет значимой роли при изучении свойств течения около пластины.

функция

$$\tilde{u}_1^{\text{II}} = \mu \frac{\partial u_0^{\text{II}}}{\partial \tau'}, \quad (2.26)$$

а уравнения на остальные функции, приведенные в Теореме 2.1 останутся неизменными (нужно лишь заменить τ на τ' и θ на θ').

Для построения доказательства Теоремы 2.1 нам потребуются следующие леммы (их доказательство очевидно).

Лемма 2.1. Пусть $f^{\text{I}}(\theta)$ и $g^{\text{II}}(\tau)$ — погранслойные функции в смысле Определения 2.3. Тогда:

$$f^{\text{I}}(\theta)g^{\text{II}}(\tau) = f^{\text{I}}(\theta)g^{\text{II}}(\tau)|_{\tau=0} + \varepsilon^{1/3} \frac{\partial g^{\text{II}}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \theta f^{\text{I}}(\theta) + \varepsilon^{2/3} \frac{\partial^2 g^{\text{II}}}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau=0} \frac{\theta^2}{2} f^{\text{I}}(\theta) + \mathcal{O}(\varepsilon).$$

Лемма 2.2. Пусть $g^{\text{II}}(\tau)$ — погранслойная функция в смысле Определения 2.3. Тогда:

$$g^{\text{II}}(\tau)h^{\text{III}}(y) = g^{\text{II}}(\tau)h^{\text{III}}(y)|_{y=0} + \tau\varepsilon \frac{\partial h^{\text{III}}}{\partial y} \Big|_{y=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^2).$$

Лемма 2.3. Пусть $f^{\text{I}}(\theta)$ — погранслойная функция в смысле Определения 2.3. Тогда:

$$f^{\text{I}}(\theta)h^{\text{III}}(y) = f^{\text{I}}(\theta)h^{\text{III}}(y)|_{y=0} + \theta\varepsilon^{4/3} \frac{\partial h^{\text{III}}}{\partial y} \Big|_{y=0} + \mathcal{O}(\varepsilon^{8/3}).$$

Доказательство Теоремы 2.1. Подставим разложения (2.12) в уравнения (2.1), соберем коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε и приравняем их к нулю.

1. Функции, описывающие течение вне погранслоев. Пусть $\tau \rightarrow \infty$ и $\theta \rightarrow \infty$. Тогда в силу Определения 2.3 все функции с верхними индексами I и II устремятся к нулю, и мы получим уравнения на функции в области вне пограничных слоев (в области III, см. рис. 2.2).

При $\varepsilon^{-2/3}$ получаем следующую систему уравнений:

$$u_0^{\text{III}} \frac{\partial \tilde{u}_1^{\text{III}}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_1^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u_1^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0. \quad (2.27)$$

Из второго уравнения системы (2.27) получаем, что $\tilde{u}_1^{\text{III}} = 0$, см. п. 3 из (2.9), следовательно, из первого уравнения имеем $\tilde{p}_1^{\text{III}} = 0$.

При $\varepsilon^{-1/3}$ имеем следующую систему уравнений:

$$u_0^{\text{III}} \frac{\partial u_2^{\text{III}}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_2^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad u_0^{\text{III}} \frac{\partial v_2^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u_2^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0. \quad (2.28)$$

Аналогично, из третьего уравнения системы (2.28) мы получаем $\tilde{u}_2^{\text{III}} = 0$, из второго (учитывая что $u_0^{\text{III}} \neq 0$) — $\tilde{v}_2^{\text{III}} = 0$, и из первого уравнения — $\tilde{p}_2^{\text{III}} = 0$.

При ε^0 мы получили систему

$$\begin{cases} \varepsilon^{-2/3} \frac{\partial u_0^{\text{III}}}{\partial t} + u_0^{\text{III}} \left(\frac{\partial u_0^{\text{III}}}{\partial x} + \frac{\partial u_3^{\text{III}}}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial p_0^{\text{III}}}{\partial x} + \frac{\partial p_3^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \\ u_0^{\text{III}} \frac{\partial v_3^{\text{III}}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_0^{\text{III}}}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u_0^{\text{III}}}{\partial x} + \frac{\partial u_3^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Осредняя третье уравнение системы (2.29) получаем, что $\tilde{u}_3^{\text{III}} = 0$ и $u_0^{\text{III}} = u_0^{\text{III}}(t, y)$, и учитывая граничное условие (2.6) при $x \rightarrow -\infty$ ($u_0^{\text{III}}|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow 1$, т.к., как будет показано ниже в пункте 2 доказательства, функция u_0^{III} определена в области $x > 0$, ее можно продолжить на область $x \leq 0$ нулем), получаем

$$u_0^{\text{III}} \equiv 1. \quad (2.30)$$

Осреднение второго и первого уравнений дает $\tilde{v}_3^{\text{III}} = 0$ и $\tilde{p}_3^{\text{III}} = 0$.

Следовательно, система (2.29) примет следующий вид:

$$\frac{\partial p_0^{\text{III}}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p_0^{\text{III}}}{\partial y} = 0, \quad (2.31)$$

откуда получаем, что $p_0^{\text{III}} = p_0^{\text{III}}(t)$.

При $\varepsilon^{1/3}$ имеем

$$\begin{cases} \varepsilon^{-2/3} \frac{\partial \bar{u}_1^{\text{III}}}{\partial t} + \frac{\partial p_4^{\text{III}}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_4^{\text{III}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{p}_1^{\text{III}}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_1^{\text{III}}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \bar{p}_1^{\text{III}}}{\partial y} + \frac{\partial v_4^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial u_4^{\text{III}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}_1^{\text{III}}}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (2.32)$$

Аналогично, из осреднения третьего уравнения системы (2.32) мы получаем $\tilde{u}_4^{\text{III}} = 0$ и $\bar{u}_1^{\text{III}} = \bar{u}_1^{\text{III}}(y)$, но очевидно, что функция \bar{u}_1^{III} не должна оказывать влияние на набегающий поток, т.е. $\bar{u}_1^{\text{III}}|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow 0$, следовательно $\bar{u}_1^{\text{III}} \equiv 0$. А осреднение второго и первого уравнений дает $\tilde{v}_4^{\text{III}} = 0$ и $\tilde{p}_4^{\text{III}} = 0$. В итоге, система (2.32) примет вид

$$\frac{\partial \bar{p}_1^{\text{III}}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \bar{p}_1^{\text{III}}}{\partial y} = 0, \quad (2.33)$$

откуда получаем, что $\bar{p}_1^{\text{III}} = \bar{p}_1^{\text{III}}(t)$, и без ограничения общности можно положить $\bar{p}_1^{\text{III}} = 0$. При $\varepsilon^{2/3}$ имеем

$$\begin{cases} \varepsilon^{-2/3} \frac{\partial \bar{u}_2^{\text{III}}}{\partial t} + \frac{\partial p_5^{\text{III}}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_5^{\text{III}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{p}_2^{\text{III}}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_2^{\text{III}}}{\partial x} = 0, \\ \varepsilon^{-2/3} \frac{\partial \bar{v}_2^{\text{III}}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}_2^{\text{III}}}{\partial y} + \frac{\partial v_5^{\text{III}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{v}_2^{\text{III}}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u_5^{\text{III}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}_2^{\text{III}}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_2^{\text{III}}}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Осредняя (2.34) получаем $\tilde{u}_5^{\text{III}} = 0$, $\tilde{p}_5^{\text{III}} = 0$, $\tilde{v}_5^{\text{III}} = 0$. Следовательно, имеем

$$\begin{cases} \varepsilon^{-2/3} \frac{\partial \bar{u}_2^{\text{III}}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}_2^{\text{III}}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{p}_2^{\text{III}}}{\partial x} = 0, \\ \varepsilon^{-2/3} \frac{\partial \bar{v}_2^{\text{III}}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{p}_2^{\text{III}}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_2^{\text{III}}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \bar{u}_2^{\text{III}}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_2^{\text{III}}}{\partial y} = 0. \end{cases} \quad (2.35)$$

Продифференцируем первое уравнение системы (2.35) по переменной y , а второе — по x , и используя третье уравнение, получаем:

$$\begin{cases} \varepsilon^{-2/3} \frac{\partial^2 \bar{u}_2^{\text{III}}}{\partial t \partial y} - \frac{\partial^2 \bar{v}_2^{\text{III}}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{p}_2^{\text{III}}}{\partial x \partial y} = 0, \\ \varepsilon^{-2/3} \frac{\partial^2 \bar{v}_2^{\text{III}}}{\partial t \partial x} + \frac{\partial^2 \bar{p}_2^{\text{III}}}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 \bar{v}_2^{\text{III}}}{\partial x^2} = 0. \end{cases} \quad (2.36)$$

Вычтя из второго уравнения системы (2.36) первое, получаем следующее уравнение:

$$\varepsilon^{-2/3} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \bar{v}_2^{\text{III}}}{\partial x} - \frac{\partial \bar{u}_2^{\text{III}}}{\partial y} \right) + \Delta_{x,y} \bar{v}_2^{\text{III}} = 0, \quad (2.37)$$

где

$$\Delta_{x,y} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Уравнение (2.37) вместе с третьим уравнением системы (2.35) образуют систему, которая дополняется следующими граничными условиями (см. п.4. данного доказательства)

$$\bar{v}_2^{\text{III}}|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad \bar{v}_2^{\text{III}}|_{y=0} \rightarrow 0, \quad \bar{v}_2^{\text{III}}|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \bar{u}_2^{\text{III}}|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

Отметим, что эта задача возникает не из-за наличия неровностей на поверхности пластины, а является отдельной задачей. Функции, которые в нее входят, являются поправками в области невозмущенного потока. Очевидно, что такая задача имеет лишь тривиальное решение (т.к. это линейное уравнение, рассматриваемое на малых временах) $\bar{v}_2^{\text{III}} \equiv 0$. Несмотря на то, что уравнение (2.37) содержат производные по времени, мы не рассматриваем общую постановку задачи Коши, считая что начальные условия согласованы со структурой решения (как это обычно делается при рассмотрении автомодельных решений).

Из (2.35) получаем, что $\bar{u}_2^{\text{III}} = \bar{u}_2^{\text{III}}(t, y)$, откуда получаем, что $\bar{u}_2^{\text{III}} \equiv 0$ (т.к. должно выполняться условие $\bar{u}_2^{\text{III}}|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow 0$).

Тогда из системы (2.34) получаем, что $\bar{p}_2^{\text{III}} = \bar{p}_2^{\text{III}}(t)$, и без ограничения общности можно положить $\bar{p}_2^{\text{III}} = 0$.

2. Функции, описывающие течение в классическом пограничном слое.

Пусть $\theta \rightarrow \infty$. Тогда в силу определения 2.3 функции с верхним индексом I в разложении (2.12) устремятся к нулю, и подставляя его в систему уравнений (2.1), используя Лемму 2.2, мы получим уравнения на функции, описывающие течение в классическом пограничном слое (в области II, см. рис. 2.2).

При $\varepsilon^{-2/3}$ мы получаем следующую систему:

$$(u_0^{\text{II}} + 1) \frac{\partial u_1^{\text{II}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{p}_1}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial p_1^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial u_1^{\text{II}}}{\partial \xi} = 0. \quad (2.38)$$

Из третьего уравнения системы (2.38) мы получаем $\tilde{u}_1^{\text{II}} = 0$, а из второго — $p_1^{\text{II}} \equiv 0^*$.

*В силу того, что по Определению 2.3 любая функция g с верхним индексом II при $\tau \rightarrow \infty$ должна стремиться к нулю: $g^{\text{II}}|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0$.

При $\varepsilon^{-1/3}$ имеем

$$\begin{cases} \varepsilon^{1/3} \frac{\partial u_2^{\text{II}}}{\partial t} + (u_0^{\text{II}} + 1) \frac{\partial u_2^{\text{II}}}{\partial \xi} + v_2^{\text{II}} \frac{\partial u_0^{\text{II}}}{\partial \tau} + \frac{\partial p_2^{\text{II}}}{\partial \xi} = 0, \\ \varepsilon^{1/3} \frac{\partial v_2^{\text{II}}}{\partial t} + (u_0^{\text{II}} + 1) \frac{\partial v_2^{\text{II}}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_2^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0, \\ \frac{\partial u_2^{\text{II}}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0. \end{cases} \quad (2.39)$$

Осредняя третье уравнение системы (2.39) (учитывая (2.9)), получаем, что $\frac{\partial \bar{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0$, следовательно в силу Определения 2.3, $\bar{v}_2^{\text{II}} \equiv 0$. Тогда осредняя второе уравнение системы (2.39), получаем $\frac{\partial \bar{p}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0$, следовательно в силу Определения 2.3, $\bar{p}_2^{\text{II}} \equiv 0$, а осреднение первого уравнения системы (2.39) дает $\varepsilon^{1/3} \frac{\partial \bar{u}_2^{\text{II}}}{\partial t} = 0$.

Тогда система (2.39) примет вид

$$\begin{cases} \varepsilon^{1/3} \frac{\partial \tilde{u}_2^{\text{II}}}{\partial t} - u_0^\dagger \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} + \tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{\partial u_0^\dagger}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{p}_2^{\text{II}}}{\partial \xi} = 0, \\ \varepsilon^{1/3} \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial t} + u_0^\dagger \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{p}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0, \\ \frac{\partial \tilde{u}_2^{\text{II}}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0. \end{cases} \quad (2.40)$$

где

$$u_0^\dagger = u_0^{\text{II}} + 1. \quad (2.41)$$

Продифференцируем первое уравнение системы (2.40) по τ , а второе — по ξ :

$$\begin{cases} \varepsilon^{1/3} \frac{\partial^2 \tilde{u}_2^{\text{II}}}{\partial t \partial \tau} - u_0^\dagger \frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau^2} + \tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{\partial^2 u_0^\dagger}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}_2^{\text{II}}}{\partial \xi \tau} = 0, \\ \varepsilon^{1/3} \frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial t \partial \xi} + u_0^\dagger \frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}_2^{\text{II}}}{\partial \tau \partial \xi} = 0. \end{cases} \quad (2.42)$$

Тогда вычитая из второго уравнения (2.42) первое, получим

$$\varepsilon^{1/3} \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial t \partial \xi} - \frac{\partial^2 \tilde{u}_2^{\text{II}}}{\partial t \partial \tau} \right) + u_0^\dagger \left(\frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau^2} \right) - \tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{\partial^2 u_0^\dagger}{\partial \tau^2} = 0. \quad (2.43)$$

Из третьего уравнения системы (2.40) получаем

$$\tilde{u}_2^{\text{II}} = - \int \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} d\xi,$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_2^{\text{II}}}{\partial t \partial \tau} = - \int \frac{\partial^3 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau^2 \partial t} d\xi. \quad (2.44)$$

Тогда, учитывая, что

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial t \partial \xi} = \int_{\xi}^{\xi} \frac{\partial^3 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial t \partial \xi^2} d\xi,$$

уравнение (2.43) можно переписать в следующем виде

$$\varepsilon^{1/3} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\xi}^{\xi} \Delta_{\xi, \tau} \tilde{v}_2^{\text{II}} d\xi + u_0^{\dagger} \Delta_{\xi, \tau} \tilde{v}_2^{\text{II}} - \tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{\partial^2 u_0^{\dagger}}{\partial \tau^2} = 0, \quad (2.45)$$

где

$$\Delta_{\xi, \tau} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}.$$

Уравнение (2.45) называется нестационарным уравнением типа Рэлея (см. [53]).

Из первого уравнения системы (2.40) получаем выражение для давления:

$$\frac{\partial \tilde{p}_2^{\text{II}}}{\partial \xi} = \varepsilon^{1/3} \frac{\partial}{\partial t} \int_{\xi}^{\xi} \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} d\xi + u_0^{\dagger} \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} - \tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{\partial u_0^{\dagger}}{\partial \tau}. \quad (2.46)$$

При ε^0 осредненная система имеет следующий вид

$$\begin{cases} \varepsilon^{-2/3} \frac{\partial \bar{u}_0^{\dagger}}{\partial t} + \bar{v}_3^{\text{II}} \frac{\partial u_0^{\dagger}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u_0^{\dagger}}{\partial \tau^2} + u_0^{\dagger} \frac{\partial u_0^{\dagger}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \bar{p}_3^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0, \\ \frac{\partial u_0^{\dagger}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_3^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0. \end{cases} \quad (2.47)$$

Из граничных условий (2.5), (2.6) и Определения 2.3 очевидным образом получаются следующие граничные условия для системы (2.47): $u_0^{\dagger}|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 1$, $u_0^{\dagger}|_{\tau=0} = 0$, $\bar{v}_3^{\dagger}|_{\tau=0} = 0$, см. подробнее п.4 данного доказательства. Система (2.47) дополняется начальным условием $u_0^{\dagger}|_{t=0} = f'(\tau/\sqrt{x})$, см. (2.13). Уравнение (2.47) рассматривается на «малых» временах. В силу выбора начального условия, решение такой системы выражается в виде функции Блазиуса (см. (1.6)):

$$u_0^{\dagger} = f'(\tau/\sqrt{x}), \quad \bar{v}_3^{\text{II}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \left(\frac{\tau}{\sqrt{x}} f'(\tau/\sqrt{x}) - f(\tau/\sqrt{x}) \right). \quad (2.48)$$

При $\varepsilon^{1/3}$ осредненная система имеет вид

$$\begin{cases} \varepsilon^{-2/3} \frac{\partial \bar{u}_1^{\text{II}}}{\partial t} + \bar{v}_4^{\dagger} \frac{\partial u_0^{\dagger}}{\partial \tau} + \bar{v}_3^{\dagger} \frac{\partial \bar{u}_1^{\text{II}}}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 u_1^{\text{II}}}{\partial \tau^2} + u_1^{\text{II}} \frac{\partial u_0^{\dagger}}{\partial x} + u_0^{\dagger} \frac{\partial \bar{u}_1^{\text{II}}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u_1^{\dagger}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_4^{\dagger}}{\partial \tau} = 0, \end{cases}$$

где $\bar{v}_3^{\dagger} = \bar{v}_3^{\text{II}} + \bar{v}_3^{\text{III}}|_{y=0}$, $\bar{v}_4^{\dagger} = \bar{v}_4^{\text{II}} + \bar{v}_4^{\text{III}}|_{y=0}$.

3. Функции, описывающие течение в тонком погранслое.

Теперь мы получим уравнения на функции, описывающие течение в тонком пограничном слое (в области I, см. рис. 2.2). Здесь мы будем применять Леммы 2.1 и 2.3.

При ε^{-1} получаем $\frac{\partial p_1^I}{\partial \theta} = 0$, следовательно в силу Определения 2.3 получаем, что $p_1^I \equiv 0^*$.

При $\varepsilon^{-2/3}$ получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial p_2^I}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial u_1^I}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2^I}{\partial \theta} = 0. \end{cases} \quad (2.49)$$

Из первого уравнения в силу Определения 2.3 следует, что $p_2^I \equiv 0$, а осреднение второго дает $\frac{\partial \bar{v}_2^I}{\partial \theta} = 0$, следовательно аналогично в силу Определения 2.3, $\bar{v}_2^I = 0$.

При $\varepsilon^{-1/3}$ имеем:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1^I}{\partial t} + \theta \frac{\partial u_0^{\text{II}}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \frac{\partial u_1^I}{\partial \xi} + \tilde{v}_2^I \frac{\partial u_0^{\text{II}}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} + \\ + (u_1^I + \bar{u}_1^{\text{II}} \Big|_{\tau=0}) \frac{\partial u_1^I}{\partial \xi} + (\tilde{v}_2^I + \tilde{v}_2^{\text{II}} \Big|_{\tau=0}) \frac{\partial u_1^I}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_1^I}{\partial \theta^2} = 0, \\ \frac{\partial p_3^I}{\partial \theta} = 0, \\ \frac{\partial u_2^I}{\partial \xi} + \frac{\partial v_3^I}{\partial \theta} = 0. \end{cases} \quad (2.50)$$

Из второго уравнения системы (2.50) в силу Определения 2.3 следует, что $p_3^I \equiv 0$, а из третьего — $\bar{v}_3^I \equiv 0$.

Введем новые функции:

$$u_1^* = u_1^I + \bar{u}_1^{\text{II}} \Big|_{\tau=0} + \theta \frac{\partial u_0^{\text{II}}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0}, \quad v_2^* = \tilde{v}_2^I + \tilde{v}_2^{\text{II}} \Big|_{\tau=0}. \quad (2.51)$$

Тогда первое уравнение системы (2.50) примет вид:

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial t} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} + v_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \theta^2} - \tilde{v}_2^{\text{II}} \Big|_{\tau=0} \frac{\partial u_0^{\text{II}}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (2.52)$$

Учитывая равенство (2.46), уравнение (2.52) примет вид

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial t} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} + v_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} - \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \theta^2} + \frac{\partial \tilde{p}_2^{\text{II}}}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} = 0. \quad (2.53)$$

* В силу того, что по Определению 2.3 любая функция g с верхним индексом I при $\theta \rightarrow \infty$ должна стремиться к нулю: $g^I \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow 0$.

В итоге, добавив к (2.53) последнее уравнение из (2.49), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1^*}{\partial t} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} + v_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} + \frac{\partial \tilde{p}_2^{\text{II}}}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} - \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \theta^2} = 0, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2^*}{\partial \theta} = 0. \end{cases} \quad (2.54)$$

4. Граничные условия.

Из граничных условий (2.5), (2.6) имеем:

$$u_0^\dagger \Big|_{\tau=0} = u_0^{\text{II}} \Big|_{\tau=0} + 1 = 0, \quad \tilde{v}_3^{\text{I}} \Big|_{\theta=\mu} + v_3^{\text{II}} \Big|_{\tau=0} + v_3^{\text{II}} \Big|_{y=0} = 0.$$

Осредняя последнее равенство, получаем

$$\bar{v}_3^\dagger \Big|_{\tau=0} = \bar{v}_3^{\text{II}} \Big|_{\tau=0} + \bar{v}_3^{\text{II}} \Big|_{y=0} = 0.$$

Из Определения 2.3 $u_0^{\text{II}} \Big|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, следовательно

$$u_0^\dagger \Big|_{\tau \rightarrow \infty} = u_0^{\text{II}} \Big|_{\tau \rightarrow \infty} + 1 = 1.$$

Также из граничных условий (2.5), (2.6) имеем:

$$u_1^{\text{I}} \Big|_{\theta=\mu} + \bar{u}_1^{\text{II}} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad \tilde{v}_2^{\text{I}} \Big|_{\theta=\mu} + \tilde{v}_2^{\text{II}} \Big|_{\tau=0} + \bar{v}_2^{\text{III}} \Big|_{y=0} = 0. \quad (2.55)$$

Осредняя второе равенство из (2.55), получаем $\bar{v}_2^{\text{III}} \Big|_{y=0} = 0$.

Тогда из (2.55) имеем:

$$\begin{aligned} u_1^* \Big|_{\theta=\mu} &= u_1^{\text{I}} \Big|_{\theta=\mu} + u_1^{\text{II}} \Big|_{\tau=0} + \mu \frac{\partial u_0^{\text{II}}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = \mu \frac{\partial u_0^{\text{II}}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0}, \\ v_2^* \Big|_{\theta=\mu} &= \tilde{v}_2^{\text{I}} \Big|_{\theta=\mu} + \tilde{v}_2^{\text{II}} \Big|_{\tau=0} = 0. \end{aligned}$$

В силу Определения погранслошной функции 2.3 имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} &= \frac{\partial u_1^{\text{I}}}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} + \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} = \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} &= \frac{\partial u_1^{\text{I}}}{\partial \xi} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} = 0, \\ v_2^* \Big|_{\theta \rightarrow \infty} &= \tilde{v}_2^{\text{I}} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} + \tilde{v}_2^{\text{II}} \Big|_{\tau=0} = \tilde{v}_2^{\text{II}} \Big|_{\tau=0}, \end{aligned}$$

откуда получаем

$$\tilde{v}_2^{\text{II}} \Big|_{\tau=0} = v_2^* \Big|_{\theta \rightarrow \infty}.$$

Также для функций u_1^* , v_2^* и \tilde{v}_2^{II} должно выполняться условие 2π -периодичности по ξ . \square

Таким образом, для моделирования течения в пристеночной области нам необходимо решить две задачи. Во-первых, мы должны построить решение краевой задачи (2.16), (2.17) при конечных t . Во-вторых, мы должны построить решение краевой задачи (2.18), (2.19) для осцилляций при $t' = \varepsilon^{-1/3}t$.

2.2. Существование, единственность и устойчивость решения уравнения типа Рэлея в области позади передней кромки

В данном разделе мы будем исследовать уравнение типа Рэлея (2.18). Для удобства, напомним здесь постановку краевой задачи для уравнения типа Рэлея (2.18), (2.19):

$$\varepsilon^{1/3} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \int_{\tau}^{\xi} \tilde{v}_2^{\text{II}} d\xi + f'(\tau/\sqrt{x}) \Delta \tilde{v}_2^{\text{II}} - \tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{f'''(\tau/\sqrt{x})}{x} = 0, \quad (2.56)$$

$$\tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau=0} = \tilde{V}_\gamma(t, \xi), \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^{\text{II}} = 0, \quad \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\xi} = \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\xi+2\pi}, \quad (2.57)$$

$$\tilde{v}_2^{\text{II}}|_{t=0} = \tilde{V}_0(\xi, \tau). \quad (2.58)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}$, $\tilde{V}_\gamma(t, \xi) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^*$, а $\tilde{V}_0(\xi, \tau)$ — некоторое начальное условие.

Мы говорим, что уравнение (2.56) называется нестационарным уравнением типа Рэлея для осцилляций в классическом пограничном слое, ввиду того, что соответствующее стационарное уравнение в терминах функций тока эквивалентно уравнению Рэлея для равномерного двумерного течения.

В силу линейности, общую задачу Коши для уравнения типа Рэлея (2.56)–(2.58) можно разбить на две:

- задача с начальным условием и с нулевым краевым условием (т.е. без возбуждения осцилляций), решение которой зависит от «большого» времени $\varepsilon^{-1/3}t$,
- задача с граничным условием и нулевым начальным условием, решение которой описывает генерацию осцилляций (начальное условие для этого решения задается через граничное условие, зависящее от времени t).

Решение второй части, которое мы будем далее обозначать \tilde{v}_{st} , не зависит от «большого» времени $\varepsilon^{-1/3}t$, но параметрически зависит от времени t через граничное условие \tilde{V}_γ : $\tilde{v}_{st} = \tilde{v}_{st}(x, \xi, \tau, t)$. Мы будем называть решение этой части *квазистационарным*, ввиду того, что это есть решение уравнения типа Рэлея (2.56) без производной по времени:

$$f'(\tau/\sqrt{x}) \Delta \tilde{v}_{st} - \tilde{v}_{st} \frac{f'''(\tau/\sqrt{x})}{x} = 0. \quad (2.59)$$

Отметим, что устойчивость невозмущенного плоскопараллельного течения (т.е. течения вдоль пластины без неровностей) определяется теоремой Рэлея (см., например, [53; 73; 97]) — это один из классических результатов гидродинамической устойчивости. Согласно теореме Рэлея, плоскопараллельный поток идеальной жидкости без точек перегиба является устойчивым, а течение Прандтля–Блазиуса этим свойством обладает.

Приведенная ниже Теорема 2.2, в которой доказывается устойчивость решения второй части задачи Коши для уравнения типа Рэлея, по сути, является аналогом теоремы Рэлея для возмущенного течения в рамках двухпалубной структуры пограничного слоя. Оценка для первой части задачи Коши для уравнения типа Рэлея, в силу линейности, получается в точности также, как и оценка, доказывающая устойчивость второй части.

Теорема 2.2. *Квазистационарное решение \tilde{v}_{st} уравнения типа Рэлея (2.59) существует и устойчиво $\forall x > M$, т.е. для малых возмущений $\delta\tilde{v}_{st}$ квазистационарного решения \tilde{v}_{st} (2.56) следует, что*

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(|\nabla \tilde{V}_\delta|^2 + \left| x \frac{1 - f'(\tau/\sqrt{x})}{f'''(\tau/\sqrt{x})} \right| |\Delta \tilde{V}_\delta|^2 \right) d\xi d\tau \leq \\ & \leq \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(|\nabla \tilde{V}_\delta|^2 + \left| x \frac{1 - f'(\tau/\sqrt{x})}{f'''(\tau/\sqrt{x})} \right| |\Delta \tilde{V}_\delta|^2 \right) \Big|_{t=0} d\xi d\tau + \\ & + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(|\nabla \tilde{V}_\delta|^2 + \left| x \frac{1 - f'(\tau/\sqrt{x})}{f'''(\tau/\sqrt{x})} \right| |\Delta \tilde{V}_\delta|^2 \right) d\xi d\tau dt + \\ & + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(1 + \left| x \frac{1 - f'(\tau/\sqrt{x})}{f'''(\tau/\sqrt{x})} \right| \right) \left| \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{V}_{st} \right|^2 d\xi d\tau dt, \quad (2.60) \end{aligned}$$

$$где M = \max_{\gamma \in [0, \infty)} \left| \frac{f'''(\gamma)}{f'(\gamma)} \right|, \quad \tilde{V}_{st} = \int_0^\xi \tilde{v}_{st} d\xi, \quad \tilde{V}_\delta = \int_0^\xi \delta\tilde{v}_{st} d\xi.$$

Очевидно (см. [53]), что уравнение (2.56) может быть записано как безразмерная система Гамильтона. По аналогии с n -размерным ($n < \infty$) случаем, квазистационарное решение уравнения (2.56) вероятно, не устойчиво, но может быть устойчиво в смысле орбитальной устойчивости (см. работу [28]). На самом деле, оценка (2.60) означает, что квазистационарное решение (2.56) устойчиво в этом смысле.

Хорошо известно, что из априорной оценки (2.60) следует (в силу линейности) существование и единственность решения уравнения типа Рэлея (2.56) при $x > M$.

Как будет показано в разделе 2.4.1 (см. также [6; 7]), для течения в нижней палубе (тонком пристеночном слое) существует несколько характерных типов, а именно существует критическое значение амплитуды неровности A^* , такое, что если амплитуда неровности $A = \max |\mu| < A^*$, то течение ламинарное, а если $A > A^*$, то течение вихревое.

Таким образом, существует правая часть в оценке (2.60), которая определяется соотношением между критической амплитудой неровности A^* и μ . Как было упомянуто выше, для $\max |\mu| < A^*$ правая сторона становится достаточно малой (т.е. возмущение стационарного решения течения в тонком пограничном слое убывает за малое время). Для $\max |\mu| > A^*$ течение в тонком пограничном слое становится периодичным во времени (это явление было изучено в [6; 7], см. также раздел 2.4.1). В этом случае вихри появляются и исчезают, и правая часть оценки (2.60) не является малой (т.е. вихри в тонком пограничном слое у поверхности пластины поддерживают осцилляции течения в классическом пограничном слое). Это справедливо в предположении, что $\mu \equiv 0$ для $x \leq M$. В противном случае (когда $\mu \neq 0$ для $x \in [0, M]$), вихри могут быть неограничены при $\varepsilon \rightarrow 0$ даже если $\partial\tilde{v}_{st}/\partial t \equiv 0$.

Таким образом, в окрестности точки M , существует пограничный слой, который согласуется с классическим течением, полученным в задаче о течении вдоль плоской пластины (см. раздел 1.2) и двухпалубной структурой в полуплоскости над неровностями (см. Теорему 2.1).

Доказательство теоремы 2.2. Сначала докажем, что существует решение стационарного уравнения типа Рэля (2.59), которое для удобства перепишем здесь еще раз

$$f'(\tau/\sqrt{x})\Delta\tilde{v}_{st} - \tilde{v}_{st}\frac{f'''(\tau/\sqrt{x})}{x} = 0, \quad (2.61)$$

и покажем, что это квазистационарное решение единственно для $x > M$, где M — расстояние от кромки пластины, которое определено в условии Теоремы 2.2.

Запишем функцию \tilde{v}_{st} в виде ряда Фурье по периодической переменной ξ :

$$\tilde{v}_{st} = \sum_{k \neq 0} V_k(x, \tau, t) e^{ik\xi}. \quad (2.62)$$

Поскольку функция \tilde{v}_{st} не имеет среднего значения, то $V_k(x, \tau) = 0$ при $k = 0$. Как будет показано ниже, это ключевое условие для доказательства существования квазистационарного решения.

Подставляя ряд (2.62) в уравнение (2.61), получаем, что коэффициенты разложения V_k должны удовлетворять следующей задаче:

$$\begin{cases} -\frac{\partial^2 V_k}{\partial \tau^2} + (k^2 - |U_0|)V_k = 0, & k \neq 0, \\ V_k|_{\tau=0} = V_{\gamma,k}, & V_k|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{cases} \quad (2.63)$$

где $V_{\gamma,k}$ — это коэффициенты разложения Фурье, отвечающие граничному условию из (2.57), т.е. разложение функции \tilde{V}_γ , и

$$U_0 = \frac{f'''(\tau/\sqrt{x})}{x} \Big/ f'(\tau/\sqrt{x})$$

Обозначим через \hat{L}_k следующий дифференциальный оператор:

$$\hat{L}_k \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + (k^2 - |U_0|). \quad (2.64)$$

Мы рассмотрим самосопряженное продолжение оператора \hat{L}_k на пространство $L_2([0, \infty))$ для функций с нулевыми граничными условиями при $\tau = 0$ и $\tau \rightarrow \infty$. Для этого, нам нужно преобразовать задачу (2.63) с ненулевыми граничными условиями в задачу с нулевыми граничными условиями и правой частью.

Для этого представим функцию V_k в следующем виде:

$$V_k = W_k + g_k V_{\gamma,k}, \quad (2.65)$$

где $g_k \in C^\infty([0, \infty))$ — заданная функция, такая, что

$$g_k|_{\tau=0} = 1, \quad g_k|_{\tau \rightarrow \infty} = \mathcal{O}(\tau^{-N}), \quad \forall N \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.66)$$

Например, в качестве функции g_k можно выбрать функцию, изображенную на рис. 2.3. Тогда задача (2.63) сводится к следующей:

$$\begin{cases} \hat{L}_k W_k = -V_{\gamma,k} \hat{L}_k g_k, & k \neq 0, \\ W_k|_{\tau=0} = 0, & W_k|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \end{cases} \quad (2.67)$$

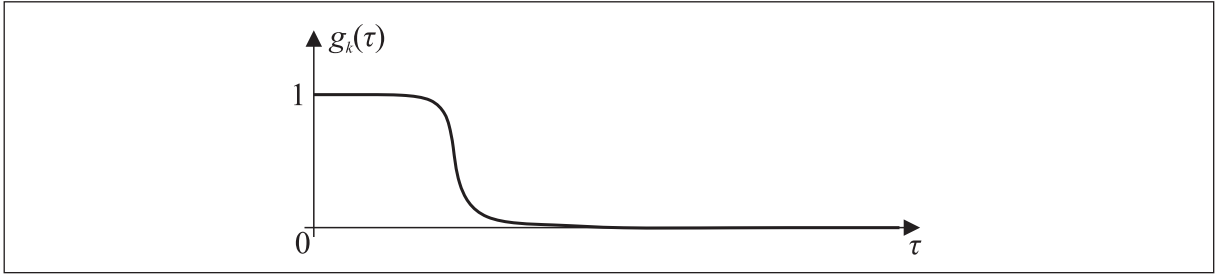


Рис. 2.3

Если существует k такое, что $\text{Ker } \hat{L}_k = \emptyset$, то задача (2.67) имеет решение, и W_k определяются однозначно. Если существует k такое что $\text{Ker } \hat{L}_k \neq \emptyset$, то задача (2.67) имеет решение тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{\infty} (\hat{L}_k g_k) Y_k d\tau = 0, \quad Y_k \in \text{Ker } \hat{L}_k.$$

Поскольку оператор \hat{L}_k самосопряженный, последнее соотношение верно. Следовательно, задача (2.67) имеет решение, но в последнем случае функции W_k определены с точностью до функций с ядром \hat{L}_k . Подставляя явный вид функции U_0 , можно легко получить, что

$$k^2 - \frac{1}{x} \left| \frac{f'''(\tau/\sqrt{x})}{f'(\tau/\sqrt{x})} \right| > 0, \quad \forall k \neq 0, \quad \forall x > M, \quad \forall \tau \in [0, \infty), \quad (2.68)$$

где

$$M = \max_{\gamma \in [0, \infty)} \left| \frac{f'''(\gamma)}{f'(\gamma)} \right| \approx 0.1442, \quad (2.69)$$

см. рис. 2.6. Таким образом, существует единственное квазистационарное решение уравнения (2.56) при $x > M$.

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.4.

$$W_k|_{\tau \rightarrow \infty} = ce^{-|k|\tau}(1 + o(1)), \quad \forall k \neq 0, \quad c = \text{const}. \quad (2.70)$$

Доказательство Леммы 2.4. Мы рассмотрим задачу (2.63). Пусть

$$\alpha(x, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{x} \left| \frac{f'''(\tau/\sqrt{x})}{f'(\tau/\sqrt{x})} \right|,$$

см. рис. 2.4. Легко доказать, что для $\tau > \tau_0$ функция $\alpha(x, \tau)$ (см. рис. 2.4) является гладкой и для $x > M$ интеграл $\int_{\tau_0}^{\infty} \alpha(x, \tau) d\tau < \infty$.

Следовательно, для (2.63) существует система фундаментальных решений ϕ_1, ϕ_2 , такая, что

$$\phi_1 = e^{k\tau}(1 + o(1)), \quad \phi_2 = e^{-k\tau}(1 + o(1)), \quad \tau \rightarrow \infty.$$

Используя граничные условия для W_k , мы получим (2.70). \square

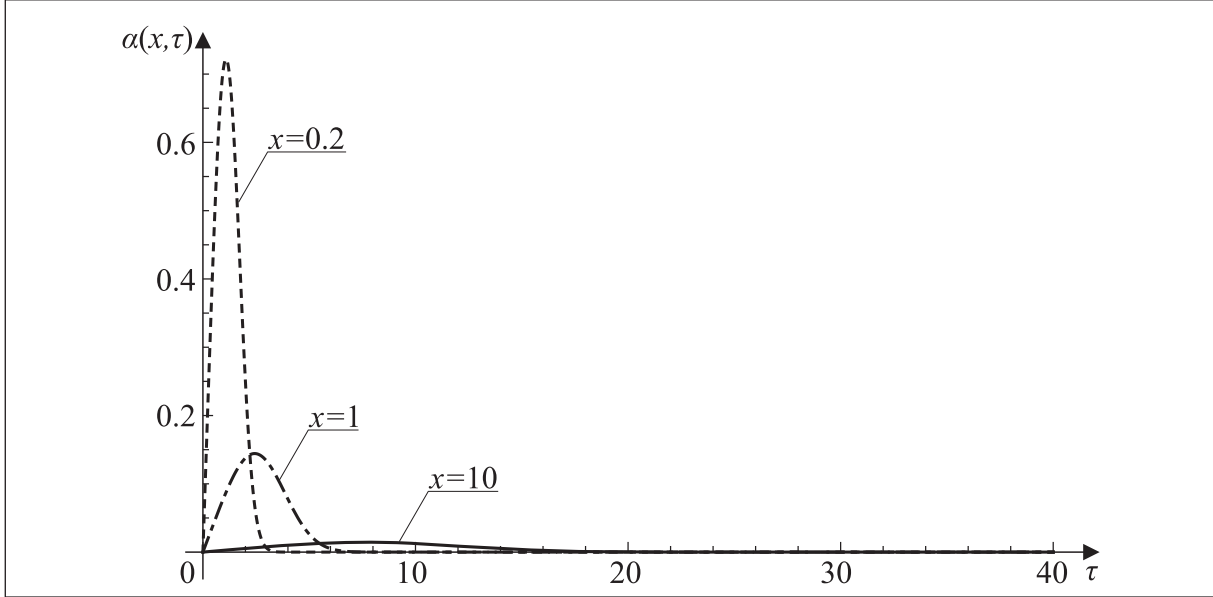


Рис. 2.4. График функции $\alpha(x, \tau)$ при некоторых значениях x

Теперь продолжим доказательство Теоремы 2.2 и докажем, что решение уравнения (2.56) устойчиво (в смысле орбитальной устойчивости).

Пусть \tilde{v}_{st} — квазистационарное решение уравнения типа Рэлея (2.56). Мы уже знаем, что оно существует. Пусть $\delta\tilde{v}_{st}$ — малое возмущение, такое, что

$$\delta\tilde{v}_{st}|_{\tau=0} = 0, \quad \delta\tilde{v}_{st}|_{\tau \rightarrow \infty} = 0, \quad (2.71)$$

и

$$\delta\tilde{v}_{st}|_{t=0} = \tilde{V}_0 - \tilde{v}_{st}|_{t=0}.$$

Далее, пусть

$$\tilde{V}_{st} = \int_{\xi}^{\xi} \tilde{v}_{st} d\xi, \quad \tilde{V}_{\delta} = \int_{\xi}^{\xi} \delta\tilde{v}_{st} d\xi. \quad (2.72)$$

Подставляя функцию $\tilde{v}_2^{\text{II}} = \tilde{v}_{st} + \delta\tilde{v}_{st}$ в (2.56) и используя (2.72), мы приходим к

$$\varepsilon^{1/3} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{V}_{\delta} + u_0 \Delta \frac{\partial \tilde{V}_{\delta}}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} \frac{\partial \tilde{V}_{\delta}}{\partial \xi} = -\varepsilon^{1/3} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{V}_{st}, \quad (2.73)$$

где

$$u_0 \stackrel{\text{def}}{=} f'(\tau/\sqrt{x}). \quad (2.74)$$

Заметим, что правая сторона (2.73) отлична от нуля, несмотря на то, что \tilde{V}_{st} приходит из квазистационарного решения уравнения (2.56). Причина этого состоит в том, что граничное условие $\tilde{v}_{st}|_{\tau=0}$ приходит из тонкого пограничного слоя и оно зависит от времени, но в масштабе, отличном от (2.73). А именно, здесь мы имеем следующие два масштаба времени: одно t в тонком пограничном слое и второе $t_1 = \varepsilon^{-1/3}t$ в (2.73). Соответственно, как ранее уже было неоднократно упомянуто, квазистационарное решение \tilde{v}_{st} зависит от времени t (через граничное условие), и не зависит от времени t_1 . Отметим, что мы не используем различные обозначения для этих различных времен, но следует иметь ввиду, что правая часть (2.73) имеет порядок $\varepsilon^{1/3}$, а первое слагаемое в левой части (2.73) имеет порядок 1.

Мы начнем доказательство оценки (2.60) с некоторых вспомогательных результатов.

Лемма 2.5. Пусть $\phi(\tau) \in W_2^1([0, \infty])$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\varepsilon^{1/3} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \phi(\tau) (\Delta \tilde{V}_\delta)^2 d\xi d\tau + \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\phi(\tau) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} \right) \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} d\xi d\tau = \\ = -\varepsilon^{1/3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \phi(\tau) \Delta \tilde{V}_\delta \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{V}_{st} d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Доказательство Леммы 2.5. Умножая обе стороны формулы (2.73) на $\phi \Delta \tilde{V}_\delta$, получим:

$$\varepsilon^{1/3} \phi \Delta \tilde{V}_\delta(\tau) \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{V}_\delta + u_0 \phi \Delta \tilde{V}_\delta \frac{\partial}{\partial \xi} \Delta \tilde{V}_\delta - \phi \Delta \tilde{V}_\delta \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} = -\varepsilon^{1/3} \phi \Delta \tilde{V}_\delta \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{V}_{st}. \quad (2.76)$$

Перепишем равенство (2.76) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1/3} \frac{1}{2} \phi \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \tilde{V}_\delta)^2 + u_0 \phi \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \tilde{V}_\delta)^2 - \phi \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial^2 \tilde{V}_\delta}{\partial \tau^2} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \right) = \\ = -\varepsilon^{1/3} \phi \Delta \tilde{V}_\delta \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{V}_{st}. \end{aligned} \quad (2.77)$$

Проинтегрируем равенство (2.77) по $[0, \infty) \times [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1/3} \frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \phi \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \tilde{V}_\delta)^2 d\xi d\tau + \int_0^\infty \int_0^{2\pi} u_0 \phi \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \tilde{V}_\delta)^2 d\xi d\tau - \\ - \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \phi \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{\partial^2 \tilde{V}_\delta}{\partial \tau^2} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \right) d\xi d\tau = -\varepsilon^{1/3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \phi \Delta \tilde{V}_\delta \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{V}_{st} d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Учитывая, что в силу периодичности

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \tilde{V}_\delta)^2 d\xi = 0, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \right)^2 d\xi = 0,$$

из (2.78) мы получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon^{1/3} \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \phi(\tau) (\Delta \tilde{V}_\delta)^2 d\xi d\tau - \int_0^\infty \phi(\tau) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \tilde{V}_\delta}{\partial \tau^2} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} d\xi d\tau = \\ = -\varepsilon^{1/3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \phi(\tau) \Delta \tilde{V}_\delta \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{V}_{st} d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (2.79)$$

Заметим, интеграл во втором слагаемом (2.79) можно преобразовать

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \tilde{V}_\delta}{\partial \tau^2} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} d\xi &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \right) d\xi - \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \right) d\xi = \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \right) d\xi - \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \right) d\xi, \end{aligned}$$

где последний интеграл равен нулю в силу периодичности (см. п. 4 из (2.9)), т.е.

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \tilde{V}_\delta}{\partial \tau^2} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} d\xi = \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} d\xi \quad (2.80)$$

Подставим (2.80) во второе слагаемое стороны (2.79) и проинтегрируем его по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \phi(\tau) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \tilde{V}_\delta}{\partial \tau^2} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} d\xi d\tau &= \int_0^\infty \phi(\tau) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} d\xi \right) d\tau = \\ &= \phi(\tau) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} d\xi \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\phi(\tau) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} \right) \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} d\xi d\tau = \\ &= - \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\phi(\tau) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} \right) \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} d\xi d\tau, \quad (2.81) \end{aligned}$$

т.к. в силу того, что (см. (2.21) и (1.5))

$$\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau=0} = \frac{f'''(0)}{x} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau \rightarrow \infty} = \frac{f'''(\tau/\sqrt{x})}{x} \Big|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0,$$

и граничных условий (2.71), первое слагаемое во второй строке (2.81) равно нулю. Подставляя (2.81) в (2.79) получаем искомое равенство (2.75). \square

Лемма 2.6.

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \varepsilon^{1/3} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |\nabla \tilde{V}_\delta|^2 d\xi d\tau + \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} d\xi d\tau = \\ = -\varepsilon^{1/3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \tilde{V}_\delta \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{V}_{st} d\xi d\tau. \quad (2.82) \end{aligned}$$

Доказательство Леммы 2.6. Основная идея в доказательстве этой леммы такая же как и в доказательстве Леммы 2.5. Умножая обе стороны (2.73) на \tilde{V}_δ , мы имеем

$$\varepsilon^{1/3} \tilde{V}_\delta \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{V}_\delta + u_0 \tilde{V}_\delta \Delta \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} - \tilde{V}_\delta \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} = -\varepsilon^{1/3} \tilde{V}_\delta \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{V}_{st}. \quad (2.83)$$

Тогда, интегрируя выражение (2.83) по $[0, \infty) \times [0, 2\pi]$ и учитывая, что (см. утверждение 4 из (2.9)) $\int_0^{2\pi} \tilde{V}_\delta \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} d\xi = 0$, мы получаем

$$\varepsilon^{1/3} \underbrace{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \tilde{V}_\delta \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{V}_\delta d\xi d\tau}_{I_1} + \underbrace{\int_0^\infty u_0 \int_0^{2\pi} \tilde{V}_\delta \Delta \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} d\xi d\tau}_{I_2} = -\varepsilon^{1/3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \tilde{V}_\delta \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{V}_{st} d\xi d\tau. \quad (2.84)$$

Сделаем некоторые преобразования. Рассмотрим первое слагаемое из левой части (2.84):

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{V}_\delta \Delta \tilde{V}_\delta) d\xi d\tau - \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial t} \Delta \tilde{V}_\delta d\xi d\tau = \underbrace{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\tilde{V}_\delta \frac{\partial^2 \tilde{V}_\delta}{\partial \xi^2} \right) d\xi d\tau}_{J_1} - \\ &- \underbrace{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial t} \frac{\partial^2 \tilde{V}_\delta}{\partial \xi^2} d\xi d\tau}_{J_2} + \underbrace{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\tilde{V}_\delta \frac{\partial^2 \tilde{V}_\delta}{\partial \tau^2} \right) d\tau d\xi}_{J_3} - \underbrace{\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial t} \frac{\partial^2 \tilde{V}_\delta}{\partial \tau^2} d\tau d\xi}_{J_4}. \quad (2.85) \end{aligned}$$

В J_1 – J_4 возьмем по частям внутренние интегралы (учитывая периодичность, отсутствие среднего и граничные условия (2.80)):

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \left[\tilde{V}_\delta \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \right)^2 d\xi \right] d\tau = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \right)^2 d\xi d\tau, \\ J_2 &= \int_0^\infty \left(\frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial t} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \tilde{V}_\delta}{\partial \xi \partial t} d\xi \right) d\tau = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \right)^2 d\xi d\tau, \\ J_3 &= \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \left[\tilde{V}_\delta \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \left(\frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \right)^2 d\tau \right] d\xi = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \right)^2 d\xi d\tau, \\ J_4 &= \int_0^\infty \left(\frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial t} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \frac{\partial^2 \tilde{V}_\delta}{\partial \tau \partial t} d\tau \right) d\xi = -\frac{1}{2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \right)^2 d\xi d\tau. \end{aligned}$$

Подставляя найденные значения интегралов J_1 – J_4 в (2.85), получаем

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \tilde{V}_\delta \frac{\partial}{\partial t} (\Delta \tilde{V}_\delta) d\xi d\tau = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \right)^2 \right] d\xi d\tau = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |\nabla \tilde{V}_\delta|^2 d\xi d\tau \quad (2.86) \end{aligned}$$

Рассмотрим второе слагаемое из левой части (2.84) (I_2) и проинтегрируем внутренний интеграл по частям (учитывая периодичность и отсутствие среднего):

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \tilde{V}_\delta \Delta \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} d\xi &= \int_0^{2\pi} \tilde{V}_\delta \frac{\partial}{\partial \xi} (\Delta \tilde{V}_\delta) d\xi = \tilde{V}_\delta \Delta \tilde{V}_\delta \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \Delta \tilde{V}_\delta d\xi = \\ &= - \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \tilde{V}_\delta}{\partial \xi^2} d\xi}_{J_5} - \underbrace{\int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \tilde{V}_\delta}{\partial \tau^2} d\xi}_{J_6} \end{aligned} \quad (2.87)$$

Проинтегрируем по частям J_5 :

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \tilde{V}_\delta}{\partial \xi^2} d\xi = \left(\frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \right)^2 \Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 \tilde{V}_\delta}{\partial \xi^2} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} d\xi$$

Следовательно, получаем, что

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \tilde{V}_\delta}{\partial \xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \right)^2 \Big|_0^{2\pi} = 0,$$

т.е. $J_5 = 0$. Интеграл J_6 был уже ранее посчитан, см. (2.80). Подставляя выражения для J_5 , J_6 в (2.87), получаем

$$\int_0^{2\pi} \tilde{V}_\delta \Delta \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} d\xi = - \frac{\partial}{\partial \tau} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} d\xi. \quad (2.88)$$

Теперь проинтегрируем второе слагаемое из левой части (2.84) (I_2) по частям, учитывая (2.88), граничные условия для функции u_0 (см. (2.21)) и граничные условия (2.71):

$$\begin{aligned} I_2 &= - \int_0^\infty u_0 \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} d\xi \right) d\tau = - u_0 \left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} d\xi \right) \Big|_0^\infty + \\ &+ \int_0^\infty \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \left(\int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} d\xi \right) d\tau = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} d\xi d\tau. \end{aligned} \quad (2.89)$$

Подставляя в (2.84) выражения (2.86) и (2.89), получаем (2.82). \square

Лемма 2.7.

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} |\tilde{V}_\delta|^2 d\xi d\tau \leq \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |\nabla \tilde{V}_\delta|^2 d\xi d\tau. \quad (2.90)$$

Доказательство Леммы 2.7. Учитывая граничное условие для функции \tilde{V}_δ (2.71), продолжим ее влево: $\tilde{V}_\delta \equiv 0$, $\tau < 0$. Запишем ряд Фурье функции \tilde{V}_δ :

$$\tilde{V}_\delta = \sum_{k \neq 0} V_{\delta,k}(t, x, \tau) e^{ik\xi}.$$

Пусть $\tilde{V}_{\delta,k}^\dagger(t, x, \zeta) = F_{\tau \rightarrow \zeta}[V_{\delta,k}(t, x, \tau)]$ — это преобразование Фурье коэффициентов $V_{\delta,k}$. Тогда из равенства Парсеваля следует, что

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} |\nabla \tilde{V}_\delta|^2 d\xi d\tau = \int_{-\infty}^\infty \sum_{k \neq 0} (\zeta^2 + k^2) |\tilde{V}_{\delta,k}^\dagger|^2 d\zeta, \quad (2.91)$$

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} |\tilde{V}_\delta|^2 d\xi d\tau = \int_{-\infty}^\infty \sum_{k \neq 0} |\tilde{V}_{\delta,k}^\dagger|^2 d\zeta. \quad (2.92)$$

Очевидно, что

$$\int_{-\infty}^\infty \sum_{k \neq 0} |\tilde{V}_{\delta,k}^\dagger|^2 d\zeta \leq \int_{-\infty}^\infty \sum_{k \neq 0} (\zeta^2 + k^2) |\tilde{V}_{\delta,k}^\dagger|^2 d\zeta,$$

т.к. $\zeta^2 + k^2 \geq 1$, в силу того, что $k \neq 0$ и $k \in \mathbb{Z}$. Отсюда, учитывая (2.91), (2.92), получаем искомое неравенство. \square

Вернемся к доказательству Теоремы 2.2. Складывая (2.75) и (2.82), получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \varepsilon^{1/3} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(\phi(\tau) |\Delta \tilde{V}_\delta|^2 - |\nabla \tilde{V}_\delta|^2 \right) d\xi d\tau + \\ & + \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\phi(\tau) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} \right) + \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \right) \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \xi} \frac{\partial \tilde{V}_\delta}{\partial \tau} d\xi d\tau = \\ & = -\varepsilon^{1/3} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(\tilde{V}_\delta + \phi(\tau) \Delta \tilde{V}_\delta \right) \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{V}_{st} d\xi d\tau. \quad (2.93) \end{aligned}$$

Нам нужно выбрать функцию $\phi(\tau)$. Выберем ее так, чтобы она удовлетворяла тождеству

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \left(\phi(\tau) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} + u_0 \right) \equiv 0. \quad (2.94)$$

Это означает, что

$$\phi(\tau) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} + u_0 = C = \text{const.}$$

Пусть $C = 1$. Тогда

$$\phi(\tau) = (1 - u_0) \left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} \right)^{-1},$$

и учитывая, что $u_0 = f'(\tau/\sqrt{x})$, см. (2.74), получаем

$$\phi(\tau) = x \frac{1 - f'(\tau/\sqrt{x})}{f'''(\tau/\sqrt{x})}. \quad (2.95)$$

Очевидно, что

$$\phi(\tau) \leq 0, \quad (2.96)$$

т.к. $0 \leq f'(\tau/\sqrt{x}) < 1$, а $-M_1 \leq f'''(\tau/\sqrt{x}) \leq 0$, где $M_1 = \max_{\gamma \in [0, \infty)} |f'''(\gamma)| = \text{const} > 0$, см. рис. 2.5.

Таким образом, подставляя (2.94) в (2.93), домножив обе части равенства на -1 и проинтегрировав по t , получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (|\nabla \tilde{V}_\delta|^2 - \phi(\tau) |\Delta \tilde{V}_\delta|^2) d\xi d\tau &= \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (|\nabla \tilde{V}_\delta|^2 - \phi(\tau) |\Delta \tilde{V}_\delta|^2) \Big|_{t=0} d\xi d\tau + \\ &+ 2 \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (\tilde{V}_\delta + \phi(\tau) \Delta \tilde{V}_\delta) \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{V}_{st} d\xi d\tau dt. \end{aligned} \quad (2.97)$$

Рассмотрим левую часть равенства (2.97):

$$\int_0^\infty \int_0^{2\pi} (|\nabla \tilde{V}_\delta|^2 - \phi(\tau) |\Delta \tilde{V}_\delta|^2) d\xi d\tau = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (|\nabla \tilde{V}_\delta|^2 + |\phi(\tau)| |\Delta \tilde{V}_\delta|^2) d\xi d\tau, \quad (2.98)$$

т.к. $\phi \leq 0$, см. (2.96).

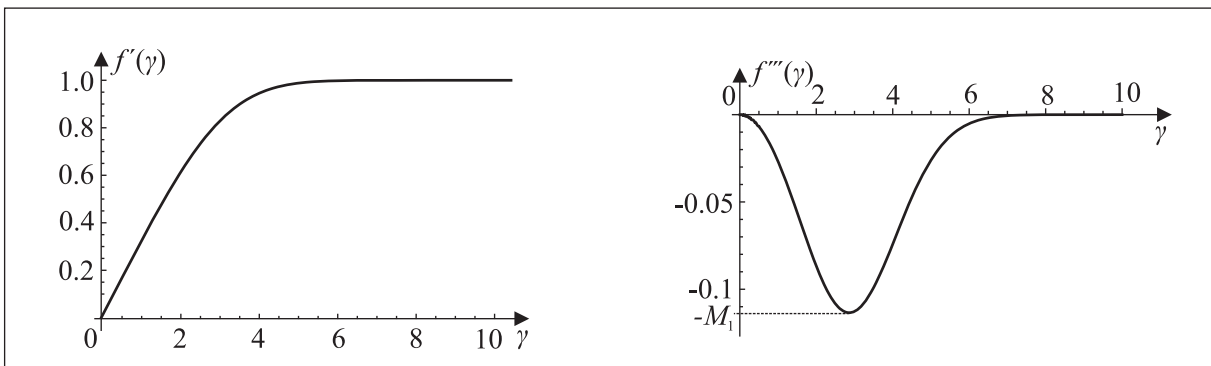


Рис. 2.5. Графики функций $f'(\gamma)$ и $f'''(\gamma)$

Оценим второе слагаемое правой части равенства (2.97):

$$\begin{aligned}
& 2 \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (\tilde{V}_\delta + \phi(\tau)\Delta\tilde{V}_\delta) \frac{\partial}{\partial t} \Delta\tilde{V}_{st} d\xi d\tau dt \leq 2 \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left| (\tilde{V}_\delta + \phi(\tau)\Delta\tilde{V}_\delta) \frac{\partial}{\partial t} \Delta\tilde{V}_{st} \right| d\xi d\tau dt \leq \\
& \leq 2 \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (|\tilde{V}_\delta| + |\phi(\tau)| |\Delta\tilde{V}_\delta|) \left| \frac{\partial}{\partial t} \Delta\tilde{V}_{st} \right| d\xi d\tau dt = 2 \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} |\tilde{V}_\delta| \left| \frac{\partial}{\partial t} \Delta\tilde{V}_{st} \right| d\xi d\tau dt + \\
& \quad + 2 \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{|\phi(\tau)|} |\Delta\tilde{V}_\delta| \right) \left(\sqrt{|\phi(\tau)|} \left| \frac{\partial}{\partial t} \Delta\tilde{V}_{st} \right| \right) d\xi d\tau dt \leq \\
& \leq \underbrace{\int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (1 + |\phi(\tau)|) \left| \frac{\partial}{\partial t} \Delta\tilde{V}_{st} \right|^2 d\xi d\tau dt}_{K_1} + \\
& \quad + \underbrace{\int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (|\tilde{V}_\delta|^2 + |\phi(\tau)| |\Delta\tilde{V}_\delta|^2) d\xi d\tau dt}_{K_2}. \quad (2.99)
\end{aligned}$$

Интеграл K_2 из (2.99) оценим с помощью Леммы 2.7:

$$K_2 \leq \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (|\nabla\tilde{V}_\delta|^2 + |\phi(\tau)| |\Delta\tilde{V}_\delta|^2) d\xi d\tau dt. \quad (2.100)$$

Рассмотрим интеграл K_1 из (2.99):

$$K_1 = \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} F(t, x, \tau, \xi) d\xi d\tau dt, \quad (2.101)$$

где

$$F(t, x, \tau, \xi) = (|\phi| + 1) \left| \frac{\partial}{\partial t} \Delta\tilde{V}_{st} \right|^2.$$

Ранее мы доказали, что квазистационарное решение уравнения (2.56) (т.е. функция \tilde{V}_{st}) существует при $x > M$ (см. (2.68)). Для функции $\Delta\tilde{V}_{st}$ справедливо следующее представление (оно очевидно следует из (2.65) и (2.62)):

$$\Delta\tilde{V}_{st} = \sum_{k \neq 0} \left(\frac{\partial^2 W_k}{\partial \tau^2} - k^2 + g_k''(\tau) V_{\gamma, k}(t) \right) e^{ik\xi}, \quad (2.102)$$

Рассмотрим подынтегральную функцию F при $\tau = 0$. Для функций $f'(\zeta)$ и $f'''(\zeta)$, где $\zeta = \tau/\sqrt{x}$, при $\tau = 0$ и $x > 0$ справедливо следующее представление (см. [1; 4]):

$$\begin{aligned}
f'(\zeta) &= A_1 \zeta + A_2 \zeta^4 + \dots, \quad \zeta \rightarrow 0 \\
f'''(\zeta) &= \hat{A}_2 \zeta^2 + \dots, \quad \zeta \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Следовательно, для функции $\phi(\tau)$ при $\tau = 0$ справедливо следующее представление:

$$\phi = x \frac{1}{\hat{A}_2(\tau/\sqrt{x})^2} + \dots, \quad \tau \rightarrow 0.$$

В силу граничного условия $W_k|_{\tau=0} = 0$ (см. (2.67)) и в силу выбора функции g_k (см. рис. 2.3), получаем, что

$$\left. \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{V}_{st} \right|_{\tau=0} \equiv 0.$$

Следовательно, $F|_{\tau=0} = 0$.

Рассмотрим подынтегральную функцию F при $\tau \rightarrow \infty$. В силу Леммы 2.4 функции $W_k \sim e^{-|k|\tau}$, $\tau \rightarrow \infty$. Для функций g_k (в силу их выбора, см. (2.66)) справедливо асимптотическое представление $g_k \sim e^{-|k|\tau}$, $\tau \rightarrow \infty$.

Следовательно,

$$\Delta v_{st}|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0.$$

Рассмотрим функцию $\phi(\tau)$ при $\tau \rightarrow \infty$. Воспользуемся асимптотическими представлениями для функции Блазиуса (см. [4]) при $\tau \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} f'(\zeta) &\sim 1 + B_1 e^{-A\zeta^2}, \quad \zeta \rightarrow \infty, \\ f'''(\zeta) &\sim B_2 e^{-A\zeta^2}, \quad \zeta \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

где $\zeta = \tau/\sqrt{x}$, $A = \text{const}$, $B_1 = \text{const}$, $B_2 = \text{const}$. Следовательно, для $\phi(\tau)$ справедливо следующее представление при $\tau \rightarrow \infty$:

$$\phi(\tau) = x \frac{B_1}{B_2},$$

т.е. функция $\phi(\tau)$ — константа при $\tau \rightarrow \infty$ для $\forall x > 0$ (x — параметр). Следовательно, $F|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0$. Очевидно, что интеграл K_1 (2.101) сходится при $\forall x > M$.

Объединяя (2.100), (2.99) и (2.98), получаем искомую оценку (2.60):

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (|\nabla \tilde{V}_\delta|^2 + |\phi(\tau)| |\Delta \tilde{V}_\delta|^2) d\xi d\tau &\leq \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (|\nabla \tilde{V}_\delta|^2 + |\phi(\tau)| |\Delta \tilde{V}_\delta|^2) \Big|_{t=0} d\xi d\tau + \\ &+ \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (|\nabla \tilde{V}_\delta|^2 + |\phi(\tau)| |\Delta \tilde{V}_\delta|^2) d\xi d\tau dt + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} (1 + |\phi(\tau)|) \left| \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{V}_{st} \right|^2 d\xi d\tau dt, \end{aligned}$$

где $\phi(\tau)$ определено в (2.95). □

Замечание 2.3. Очевидно, что оценку (2.60) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(|\nabla \tilde{V}_\delta|^2 + \left| x \frac{1 - f'(\tau/\sqrt{x})}{f'''(\tau/\sqrt{x})} \right| |\Delta \tilde{V}_\delta|^2 \right) d\xi d\tau &\leq \\ &\leq e^t \left[\int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(|\nabla \tilde{V}_\delta|^2 + \left| x \frac{1 - f'(\tau/\sqrt{x})}{f'''(\tau/\sqrt{x})} \right| |\Delta \tilde{V}_\delta|^2 \right) \Big|_{t=0} d\xi d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^t \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \left(1 + \left| x \frac{1 - f'(\tau/\sqrt{x})}{f'''(\tau/\sqrt{x})} \right| \right) \left| \frac{\partial}{\partial t} \Delta \tilde{V}_{st} \right|^2 d\xi d\tau dt \right]. \quad (2.103) \end{aligned}$$

2.3. Исследование уравнения типа Рэлея в области передней кромки пластины

В этом разделе мы будем исследовать существование решения стационарного уравнения типа Рэлея (2.59), краевую задачу для которого перепишем здесь для удобства еще раз:

$$f'(\tau/\sqrt{x})\Delta\tilde{v}_{st} - \tilde{v}_{st}\frac{f'''(\tau/\sqrt{x})}{x} = 0, \quad (2.104)$$

$$\tilde{v}_{st}|_{\tau=0} = \tilde{V}_\gamma(t, \xi), \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{v}_{st} = 0, \quad \tilde{v}_{st}|_\xi = \tilde{v}_{st}|_{\xi+2\pi}, \quad (2.105)$$

при $x \geq \delta$, где $0 < \delta \leq M$, а $M = \max_{\eta \in [0, +\infty)} \left| \frac{f'''(\eta)}{f'(\eta)} \right|$ (см. (2.69)), см. также рис. 2.6. Как мы увидим ниже, x играет роль спектрального параметра в одномерном уравнении Шредингера, определяющем свойства осциллирующего течения в классическом погранслое Прандтля.

Вернемся к краевой задаче на коэффициенты разложения в ряд Фурье функции \tilde{v}_{st} с нулевыми граничными условиями (2.67). В классических погранслойных координатах

$$\eta = \frac{\tau}{\sqrt{x}} = \frac{y}{\varepsilon\sqrt{x}} \quad (2.106)$$

задача (2.67) примет следующий вид

$$\begin{cases} \hat{H}_k \phi_k = -V_{\gamma,k} \hat{H}_k q_k, & k \neq 0, \\ \phi_k|_{\eta=0} = 0, & \phi_k|_\eta \rightarrow 0, \end{cases} \quad (2.107)$$

где

$$\begin{aligned} \hat{H}_k &\stackrel{\text{def}}{=} -\frac{d^2}{d\eta^2} + U(\eta) + xk^2, \\ U(\eta) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{f'''(\eta)}{f'(\eta)}, \end{aligned} \quad (2.108)$$

$q_k = g_k|_{(2.106)}$, $g_k \in C^\infty([0, \infty))$ — заданная функция, удовлетворяющая приведенным в предыдущем разделе условиям (2.66), и $\phi_k = W_k|_{(2.106)}$.

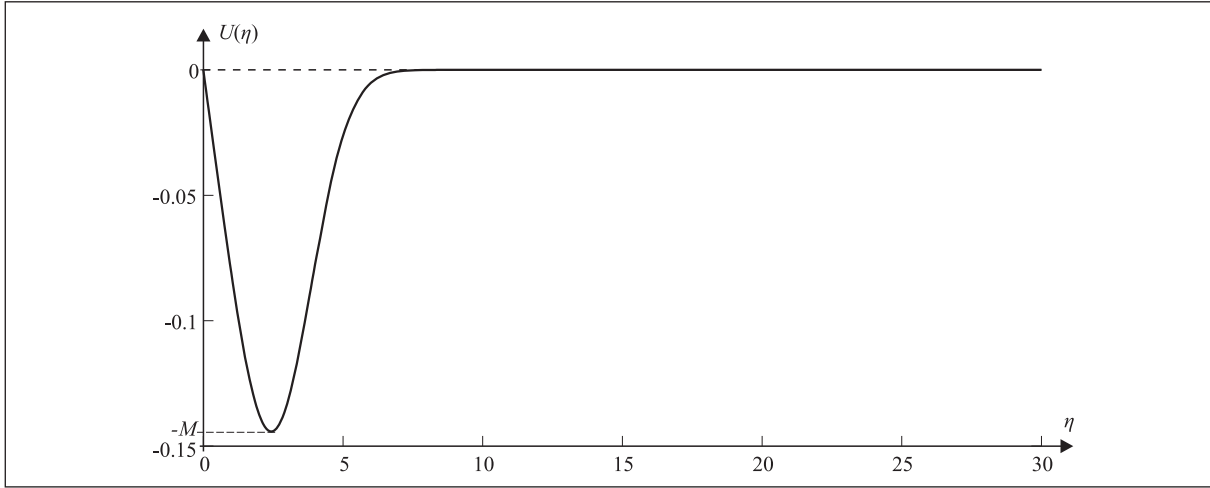
Потенциал $U(\eta)$ представляет собой ямку глубины M (см. (2.69)) и обладает следующими свойствами: $U(0) = 0$, $U|_{\eta \rightarrow \infty} = \mathcal{O}(|\eta|^{-N})$, где N — любое число, см. рис. 2.6.

В предыдущем разделе (см. Теорему 2.2 и ее доказательство) было показано что если $x \geq \delta > M$, то решение задачи (2.107) существует и единственно. Теперь мы рассмотрим случай $\delta \in (0, M]$. В этом случае возможно, что $\text{Ker } \hat{H}_k \neq \emptyset$. Найдем $\text{Ker } \hat{H}_k$. Для этого рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \hat{H}_k \psi_k = 0, \\ \psi(0) = 0, \quad \psi|_{\eta \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \end{cases} \quad (2.109)$$

Преобразуем ее к виду

$$\begin{cases} \hat{H} \psi_k = \lambda_k \psi_k, \\ \psi(0) = 0, \quad \psi|_{\eta \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \end{cases} \quad (2.110)$$

Рис. 2.6. График потенциала $U(\eta)$, $M \approx 0.1442$

где $\lambda_k = -xk^2$ и $\hat{H} = -\frac{d^2}{d\eta^2} + U(\eta)$.

Обозначим через H самосопряженный оператор в $L_2(0, +\infty)$ с дифференциальным выражением \hat{H} и условием Дирихле при $\eta = 0$. Область определения этого оператора $D(H) = \{u \in W_2^2(0, +\infty) : u(0) = 0\}$.

Очевидно, что задача (2.110) представляет собой ни что иное, как задачу на отыскание собственных значений и собственных функций оператора типа Шредингера H с потенциалом $U(\eta)$ (2.108), изображенном на рис. 2.6. Ясно, что если существуют собственные числа λ_k , то ядро оператора \hat{H}_k не пусто. Соответственно, задача (2.107) имеет единственное решение $\forall x \geq \delta$, $\delta \in (0, M]$ и таких, что $xk^2 \neq \lambda_k$.

Хорошо известно [55], что если собственные значения задачи (2.110) существуют, то они отрицательные ($\lambda_k < 0$), а также справедлива следующая оценка для количества собственных чисел дискретного спектра N_λ :

$$N_\lambda \leq \int_0^\infty \eta |U(\eta)| d\eta.$$

С помощью численных методов легко получить значение интеграла, стоящего в правой части неравенства. Для потенциала нашего U (см. (2.108)) оно равно примерно 1.23. Следовательно, $N_\lambda \leq 1$. Это означает, что в нашей потенциальной яме возможно существования лишь одного собственного значения.

Справедлива следующая лемма (подробнее см. работу Д. И. Борисова и Р. К. Гайдукова [3]).

Лемма 2.8. *Дискретный спектр оператора H пуст.*

Доказательство Леммы 2.8 (из [3]). Будем действовать от противного. Предположим, что у оператора H существует собственное значение λ_0 (выше было показано, что оно единственное) и связанная с ним собственная функция ψ_0 , нормированная в $L_2(0, +\infty)$. Согласно принципу минимакса (см. [86]) имеем:

$$\lambda_0 = \inf_{\substack{u \in W_2^1(0, +\infty), \\ u(0)=0, u \neq 0}} \frac{\|u'\|_{L_2(0, +\infty)}^2 + (Uu, u)_{L_2(0, +\infty)}}{\|u\|_{L_2(0, +\infty)}^2} = \|\psi_0'\|_{L_2(0, +\infty)}^2 + (U\psi_0, \psi_0)_{L_2(0, +\infty)}. \quad (2.111)$$

Функция $|\psi_0|$ также минимизирует приведенный выше инфимум, т.е. она является собственной функцией, отвечающей собственному значению λ_0 . Таким образом, можно считать, что функция ψ_0 неотрицательна. Отметим также, что $\lambda_0 < 0$, а функция ψ_0 экспоненциально убывает на бесконечности:

$$\psi_0(\eta) = O(e^{-\sqrt{|\lambda_0|\eta}}), \quad \eta \rightarrow +\infty.$$

Рассмотрим функцию $\psi_1 = f'(\eta)$. Из свойств функции Блазиуса (см. [4]) получаем, что $\psi_1 \in C^2[0, +\infty)$, $\psi_1(0) = 0$, $\psi_1(\eta) > 0$, $\eta > 0$ и $\psi_1(\eta) \rightarrow 1$ при $\eta \rightarrow +\infty$ (см. рис. 2.5). Несложно проверить, что функция ψ_1 удовлетворяет уравнению

$$-\psi_1'' + U\psi_1 = 0, \quad \eta > 0.$$

Умножим это уравнение на ψ_0 и проинтегрируем на $(0, R)$, где $R = \text{const} > 0$, учитывая, что $-\psi_0'' + U\psi_0 = \lambda_0\psi_0$:

$$0 = \int_0^R \psi_0(-\psi_1'' + U\psi_1)d\eta = - \int_0^R \psi_0\psi_1'' d\eta + \lambda_0 \int_0^R \psi_0\psi_1 d\eta + \int_0^R \psi_0''\psi_1 d\eta. \quad (2.112)$$

Проинтегрировав по частям первый и последний интегралы в правой части (2.112), учитывая, что $\psi_0(0) = 0$ и $\psi_1(0) = 0$, получаем

$$0 = \lambda_0 \int_0^R \psi_0\psi_1 d\eta - \psi_0(R)\psi_1'(R) + \psi_0'(R)\psi_1(R). \quad (2.113)$$

Перейдя к пределу при $R \rightarrow +\infty$ в (2.113) и используя приведенное выше описание поведения функции ψ_0 , ψ_1 на бесконечности, получим:

$$\int_0^{+\infty} \psi_0\psi_1 d\eta = 0. \quad (2.114)$$

Но обе функции ψ_0 , ψ_1 неотрицательны, следовательно тождество (2.114) невозможно. Это означает, что наше предположение неверно, и, следовательно, дискретный спектр оператора H пуст. \square

Приведенные выше рассуждения доказывают следующую теорему.

Теорема 2.3. *Квазистационарное решение уравнения типа Рэлея (2.104), (2.105) существует и единственно для $\forall x \geq \delta$, где $\delta \in (0, M]$, а $M = \max_{\eta \in [0, +\infty)} \left| \frac{f'''(\eta)}{f'(\eta)} \right|$ (см. (2.69)).*

2.4. Алгоритм численного решения и результаты его использования

Алгоритм нахождения решения задачи (2.1), (2.5), (2.6) следующий.

1. Найти функции u_1^* , v_2^* , описывающее течение в тонком пограничном слое, решив задачу (2.16), (2.17) (см. подраздел 2.4.1).
2. Найти $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^*$, являющийся граничным условием для задачи (2.18), (2.19).
3. Найти функцию \tilde{v}_2^{II} , описывающую осцилляции в классическом пограничном слое, решив задачу (2.18), (2.19) (см. подраздел 2.4.2).

2.4.1 Алгоритм численного решения системы уравнений тонкого пограничного слоя

Мы будем численно решать задачу (2.16), (2.17) в переменных (ξ, θ') , в которых граница плоская (см. Замечание 2.2 к Теореме 2.1), т.е. мы будем решать систему (2.24), (2.25), но на рисунках будем использовать переменные (ξ, θ) (в которых граница криволинейная). Для удобства, перепишем систему уравнений (2.24), (2.25), подставляя явный вид для u_0^{II} (см. (2.21)):

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1^*}{\partial t} + u_1^* \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta'} \right) + v_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta'} = - \frac{\partial \tilde{p}_2^{\text{II}}}{\partial \xi} \Big|_{\tau'=0} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \theta'^2}, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta'} + \frac{\partial v_2^*}{\partial \theta'} = 0, \end{cases} \quad (2.115)$$

$$\begin{aligned} u_1^*|_{\theta'=0} = v_2^*|_{\theta'=0} = 0, \quad u_1^*|_{\xi} = u_1^*|_{\xi+2\pi}, \quad v_2^*|_{\xi} = v_2^*|_{\xi+2\pi}, \\ \bar{v}_2^*|_{\theta' \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta'} \Big|_{\theta' \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\theta' \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}. \end{aligned} \quad (2.116)$$

Из второго уравнения системы (2.115) выразим v_2^* :

$$v_2^* = \int_0^{\theta'} \left(- \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta''} \right) d\theta''. \quad (2.117)$$

Из выражения для давления (2.23) получаем:

$$\frac{\partial \tilde{p}_2^{\text{II}}}{\partial \xi} \Big|_{\tau'=0} = - \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} v_2^*|_{\theta' \rightarrow \infty}. \quad (2.118)$$

Подставляя (2.117) и (2.118) в первое уравнение из (2.115), получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_1^*}{\partial t} + u_1^* \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta'} \right) + \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta'} \int_0^{\theta'} \left(- \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta''} \right) d\theta'' = \\ = \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} \left(- \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} + \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta''} \right) d\theta'' + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \theta'^2}. \end{aligned} \quad (2.119)$$

Нужно заметить, что при решении задачи (2.119), (2.116), (2.117) возникают две проблемы.

1. Область, в которой ищется решение задачи, не ограничена, т.е. $\theta' \in [0, \infty)$.
2. Искомая функция u_1^* не является ограниченной при $\theta' \rightarrow \infty$.

Для решения первой проблемы можно сделать замену координат $\sigma = \frac{\theta'}{1 + \theta'}$, переводящую полуось $[0, \infty)$ в луч $[0, 1)$. Однако, эту замену можно не делать, т.к. достаточно хорошая точность вычислений может быть получена простым путем ограничения области в которой ищется решение, например можно взять $\theta' \in [0, 100]$, см. [30].

Для решения второй проблемы нужно сделать замену

$$H \stackrel{\text{def}}{=} u_1^* - (\theta' + \mu) \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}. \quad (2.120)$$

Тогда уравнение (2.119) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \xi} \left(H + \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} (\theta' + \mu) \right) + \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} \frac{\partial \mu}{\partial \xi} (H - \lim_{\theta' \rightarrow \infty} H) - \\ - \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} (D - \lim_{\theta' \rightarrow \infty} D) - \frac{\partial H}{\partial \theta'} \left(D + \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \theta' \right) = \frac{\partial^2 H}{\partial \theta'^2}, \end{aligned} \quad (2.121)$$

где

$$D \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^{\theta'} \frac{\partial H}{\partial \xi} d\theta''. \quad (2.122)$$

Применим технику осреднения. Считая граничное условие $H|_{\theta' \rightarrow \infty}$ неизвестным, мы выберем функцию \tilde{H} так, чтобы $\lim_{\theta' \rightarrow \infty} \tilde{H} = 0$.

Тогда осредняя уравнение (2.121), учитывая что $\bar{D} \equiv 0$, мы получим уравнение на \bar{H} :

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial t} - W = \frac{\partial^2 \bar{H}}{\partial \theta'^2} \quad (2.123)$$

с граничными условиями

$$\bar{H}|_{\theta'=0} = 0, \quad \frac{\partial \bar{H}}{\partial \theta'} \Big|_{\theta' \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (2.124)$$

где

$$W \stackrel{\text{def}}{=} \overline{\frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta'} \left(D + \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \theta' \right)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \theta'} \left(D + \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \theta' \right) d\xi. \quad (2.125)$$

Тогда уравнение на осциллирующую часть \tilde{H} будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{H}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{H}}{\partial \xi} \left(\tilde{H} + \bar{H} + \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} (\theta' + \mu) \right) + \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} \frac{\partial \mu}{\partial \xi} (\tilde{H} + \bar{H} - \lim_{\theta' \rightarrow \infty} \bar{H}) - \\ - \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} (D - \lim_{\theta' \rightarrow \infty} D) - \frac{\partial \bar{H}}{\partial \theta'} \left(D + \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \theta' \right) = \frac{\partial^2 \tilde{H}}{\partial \theta'^2}, \end{aligned} \quad (2.126)$$

а граничные условия на функцию \tilde{H} будут иметь вид:

$$\tilde{H}|_{\theta'=0} = -\mu \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \quad \tilde{H}|_{\theta' \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \tilde{H}|_{\xi} = \tilde{H}|_{\xi+2\pi}. \quad (2.127)$$

Начальное условие мы выбрали в следующем виде:

$$\tilde{H}|_{t=0} = \begin{cases} -\frac{f''(0)}{\sqrt{x}} \mu(\xi) (1 - 0.2\theta'), & \theta' \leq 5, \\ 0, & \theta' > 5, \end{cases} \quad \bar{H}|_{t=0} = 0. \quad (2.128)$$

Отметим, что для задачи (2.123)–(2.128) в [7] была построена неявная схема, но на практике удобнее использовать явные схемы (см. [95]), ввиду легкости ее распараллеливания (см. [67]) для вычислений на современных многопроцессорных ЭВМ (а также для вычислений с использованием графических ускорителей, например, технологии CUDA, см. [82; 83]). Построим для задачи (2.123)–(2.128) явную разностную схему.

Введем сетку ω с шагами h_ξ , $h_{\theta'}$, h_t на области

$$\Omega = [0, 2\pi] \times [0, \theta'_{\max}] \times [0, T_{\max}],$$

в которой мы будем искать решение:

$$\omega = \left\{ (i, j, k) : \begin{aligned} \xi_i &= ih_\xi, \quad \theta'_j = jh_{\theta'}, \quad t^k = kh_t, \\ i &= 0, \dots, N; \quad j = 0, \dots, M; \quad k = 0, \dots, K; \\ N &= 2\pi/h_\xi, \quad M = \theta'_{\max}/h_{\theta'}, \quad K = T_{\max}/h_t \end{aligned} \right\}.$$

Введем сеточные функции: $\tilde{H}_{i,j}^k = \tilde{H}(t^k, \xi_i, \theta'_j)$, $\bar{H}_j^k = \bar{H}(t^k, \theta'_j)$, $W_j^k = W(t^k, \theta'_j)$, $D_{i,j}^k = D(t^k, \xi_i, \theta'_j)$, $u_{i,j}^k = u^*(t^k, \xi_i, \theta'_j)$, $\mu_i = \mu(\xi_i)$, $v_{i,j}^k = v^*(t^k, \xi_i, \theta'_j)$, где функции D и W были определены ранее, см. (2.122) и (2.125) соответственно.

Введем следующие обозначения:

$$\hat{\mu}_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu_{i+1} - \mu_{i-1}}{2h_\xi}, \quad F \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \quad \alpha_{i,j}^k \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{H}_{i,j}^k + \bar{H}_j^k + F(\theta'_j + \mu_i),$$

$$\beta_{i,j}^k \stackrel{\text{def}}{=} D_{i,j}^k + F\theta'_j \hat{\mu}_i, \quad \chi_{i,j}^k \stackrel{\text{def}}{=} \beta_{i,j}^k \frac{\tilde{H}_{i,j+1}^k - \tilde{H}_{i,j}^k}{2}$$

и для любой сеточной функции $f_{i,j}^k$:

$$(f_{i,j}^k)^+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_{i,j}^k + |f_{i,j}^k|}{2}, \quad (f_{i,j}^k)^- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_{i,j}^k - |f_{i,j}^k|}{2},$$

где интеграл $D_{i,j}^k$ вычисляется методом трапеций (см. [96]):

$$D_{i,j}^k = h_{\theta'} \left(\frac{d_{i,0}^k + d_{i,j}^k}{2} + \sum_{j'=1}^{j-1} d_{i,j'}^k \right),$$

где

$$d_{i,j}^k = \frac{\tilde{H}_{i+1,j}^k - \tilde{H}_{i,j}^k}{h_\xi}$$

Тогда явная разностная схема для задачи (2.126), (2.127), (2.128) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{i,j}^{k+1} &= \tilde{H}_{i,j}^k - h_t \left((\alpha_{i,j}^k)^+ \frac{\tilde{H}_{i,j}^k - \tilde{H}_{i-1,j}^k}{h_\xi} + (\alpha_{i,j}^k)^- \frac{\tilde{H}_{i+1,j}^k - \tilde{H}_{i,j}^k}{h_\xi} + F\hat{\mu}_i (\tilde{H}_{i,j}^k + \bar{H}_j^k - \bar{H}_M^k) - \right. \\ &\left. - F(D_{i,j}^k - D_{i,M}^k) - (\beta_{i,j}^k)^+ \frac{\bar{H}_j^k - \bar{H}_{j-1}^k}{h_{\theta'}} + (\beta_{i,j}^k)^- \frac{\bar{H}_{j+1}^k - \bar{H}_j^k}{h_{\theta'}} \right) + h_t \frac{\tilde{H}_{i,j+1}^k - 2\tilde{H}_{i,j}^k + \tilde{H}_{i,j-1}^k}{h_{\theta'}^2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{H}_{i,0}^k &= -\mu_i F, & \bar{H}_{i,M}^k &= 0, & \bar{H}_{0,j}^k &= \bar{H}_{N,j}^k, \\ \tilde{H}_{i,j}^0 &= \begin{cases} -F\mu_i(1 - 0.2\theta'_j), & \theta'_j \leq 5, \\ 0, & \theta'_j > 5. \end{cases} \end{aligned}$$

для задачи (2.123), (2.124), (2.128) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{H}_j^{k+1} &= \bar{H}_j^k + h_t W_j^k + h_t \frac{\bar{H}_{j+1}^k - \bar{H}_j^k + \bar{H}_{j-1}^k}{h_{\theta'}^2}, \\ \bar{H}_0^k &= 0, & \bar{H}_M^k &= H_{M-1}^k, & \bar{H}_j^0 &= 0, \end{aligned}$$

где интеграл W_j^k вычисляется методом трапеций (см. [96]):

$$W_j^k = \frac{h_\xi}{2\pi} \left(\frac{\chi_{0,j}^k + \chi_{N,j}^k}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} \chi_{i,j}^k \right).$$

Легко показать, что построенная разностная схема удовлетворяет принципу максимума (см. [95]), и, следовательно, устойчива.

Искомая функция $u_{i,j}^k$ находится по следующей формуле:

$$u_{i,j}^k = \tilde{H}_{i,j}^k + \bar{H}_j^k + F(\theta'_j + \mu_i),$$

а функция $v_{i,j}^k$ находится из интеграла (3.53) с помощью численного интегрирования методом трапеций:

$$v_{i,j} = h_{\theta'} \left(\frac{\zeta_{i,0}^k + \zeta_{i,M}^k}{2} + \sum_{j=1}^{M-1} \zeta_{i,j}^k \right),$$

где

$$\zeta_{i,j}^k = -\frac{u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k}{h_\xi} + \hat{\mu}_i \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k}{h_{\theta'}}.$$

Отметим, что результаты моделирования, полученные по построенной явной разностной схеме, совпадают с результатами, приведенными в работе [7]. В силу этого, не претендуя на оригинальность, приведем их здесь. Заметим, что построенная разностная схема будет использоваться при моделировании задачи о течении в трубе с малыми периодическими неровностями на стенке, которая будет исследоваться в разделе 4.

Также введем функцию $\text{eps}(t)$ — критерий стационарности:

$$\text{eps}(t^{k+1}, t^k) = \max \{ \|u_{i,j}^{k+1} - u_{i,j}^k\|, \|v_{i,j}^{k+1} - v_{i,j}^k\| \},$$

где норма $\|g_{i,j}^k\| = \max_{(i,j) \in \omega} |g_{i,j}^k|$. Соответственно, если с некоторого момента времени t^* $\text{eps}(t) = 0 \forall t > t^*$, то наше решение вышло на стационар.

Будем считать, что неровность задается функцией вида

$$\mu(\xi) = A \cos(\xi), \quad A = \text{const},$$

и зафиксируем $x = 1$ (x — параметр — расстояние от кромки пластины). Из результатов [7] видно, что зависимость течения от амплитуды неровностей имеет несколько

характерных типов. При $A \leq 1$ течение ламинарное (см. рис. 2.7, 2.8), а при $A = 1.8$ в течении возникает периодический вихревой процесс — на левой стенке «ямки» возникает вихрь (см. рис. 2.10–2.13), который двигаясь по потоку разрушается у правой стенки «ямки», и затем на левой стенке возникает новый вихрь и т.д. Из этого следует, что существует некоторая критическая амплитуда A^* , такая, что при $A < A^*$ течение ламинарное, а при $A > A^*$ течение становится вихревым.

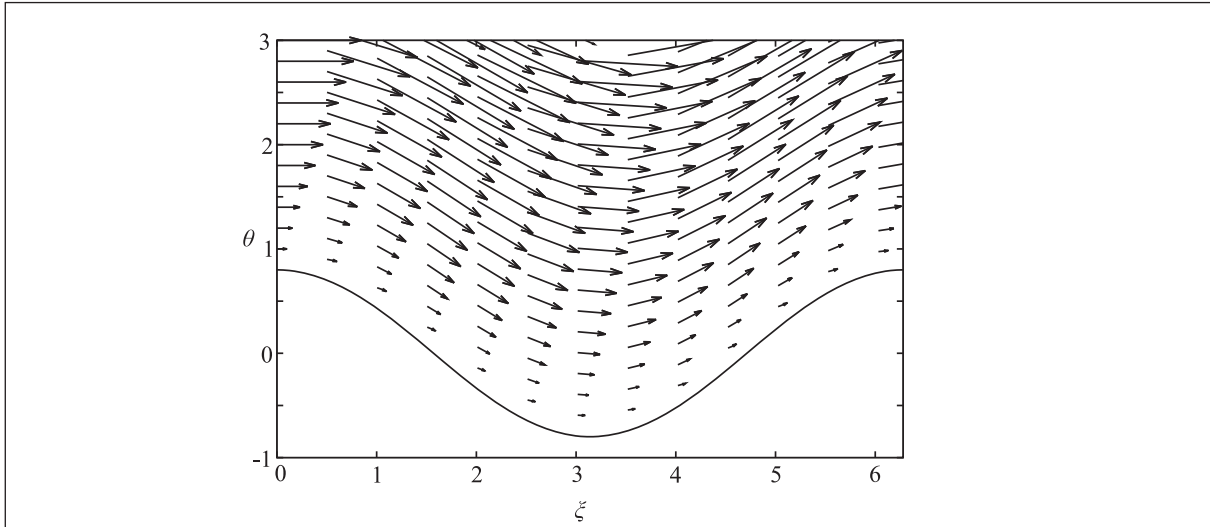


Рис. 2.7. Поле скоростей при $\mu = 0.8 \cos \xi$, $t = 0$

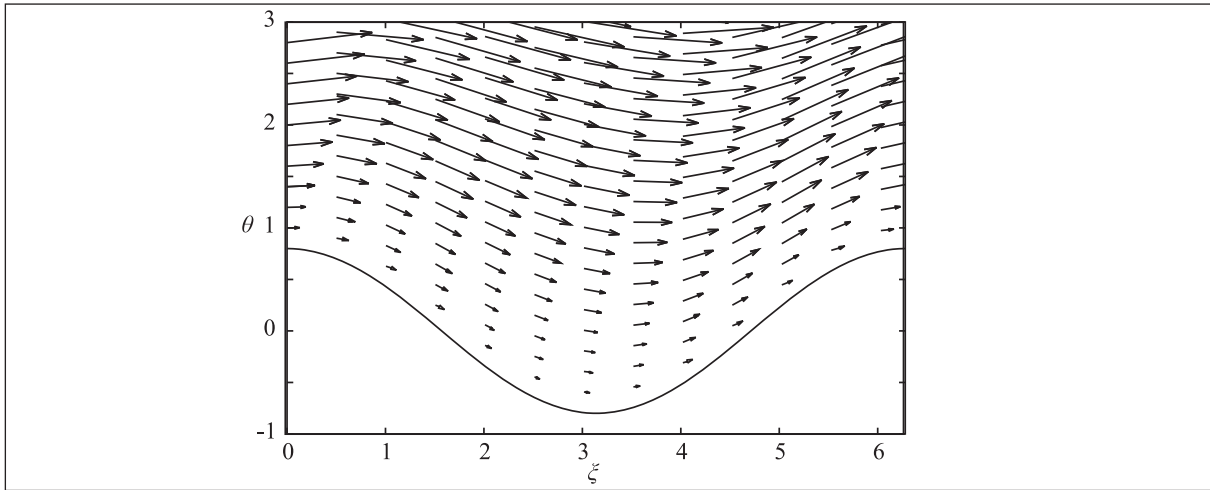


Рис. 2.8. Поле скоростей при $\mu = 0.8 \cos \xi$, $t = 10$

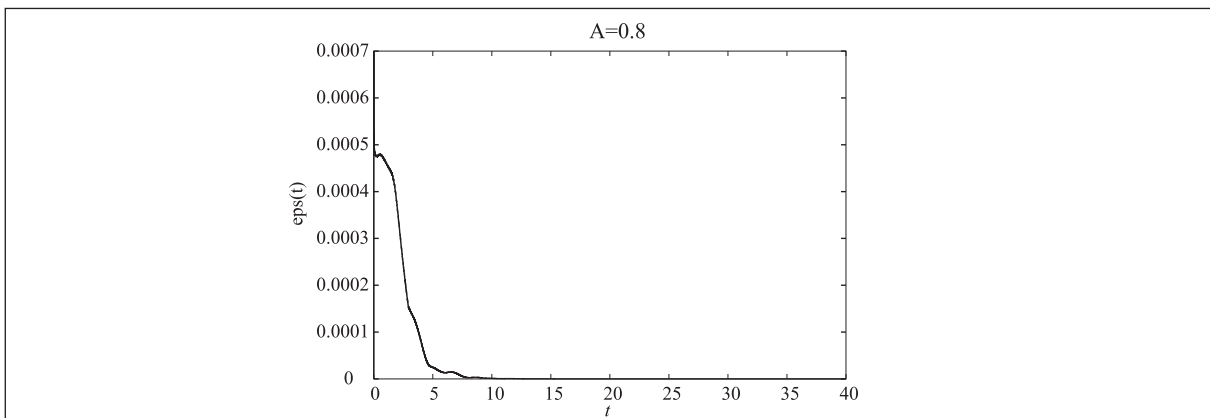
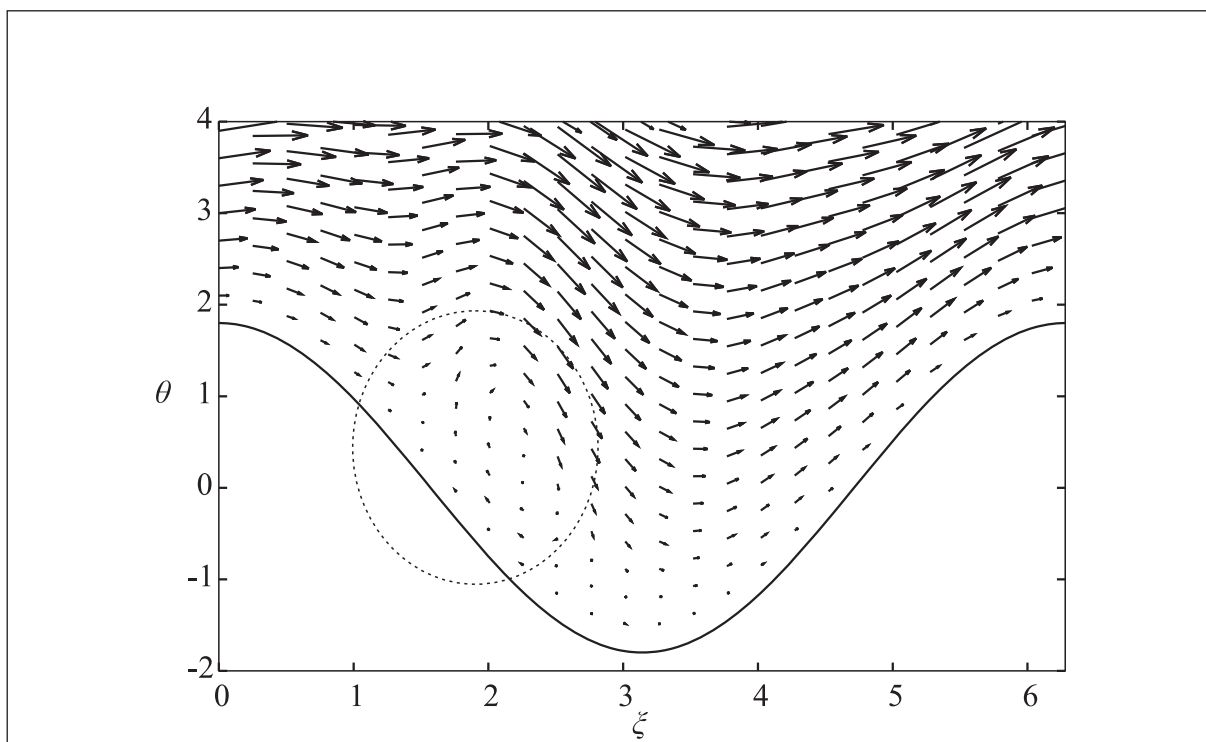
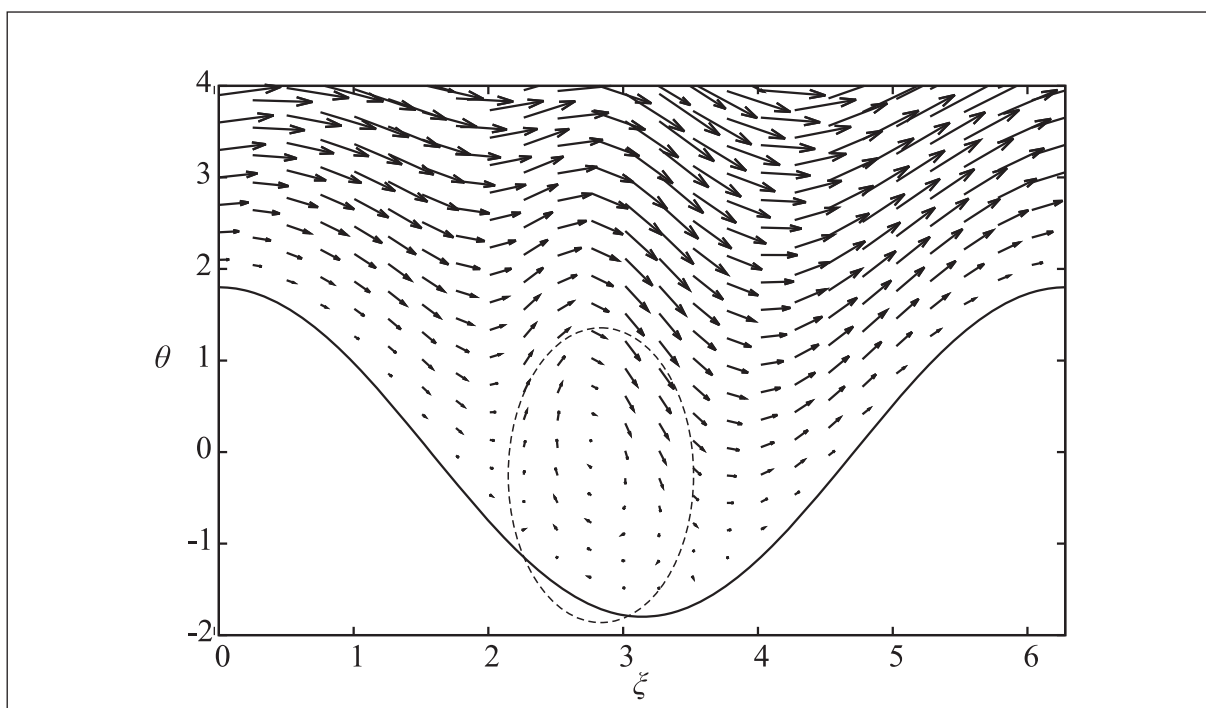
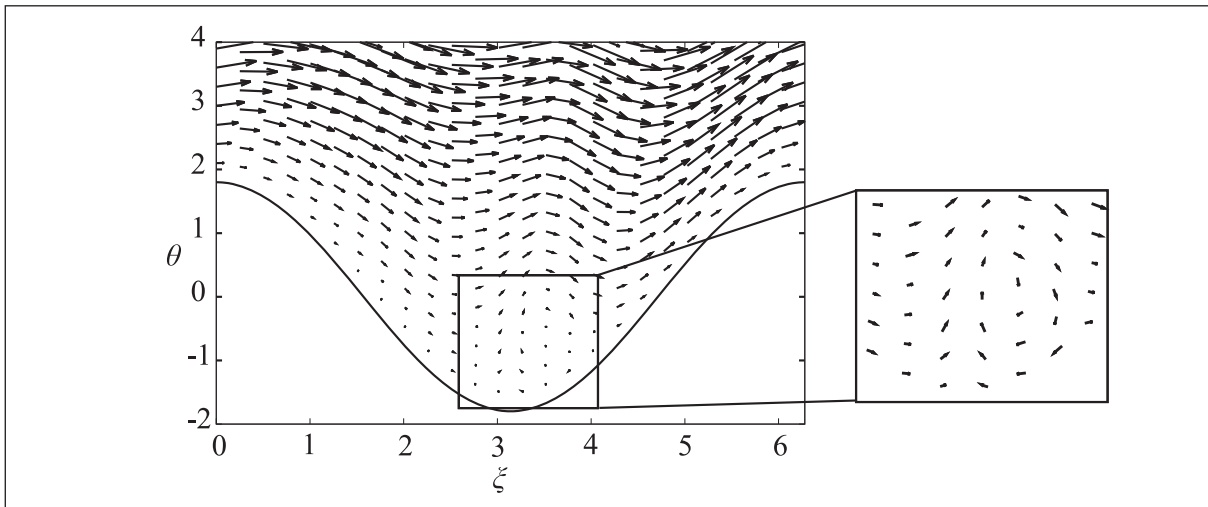
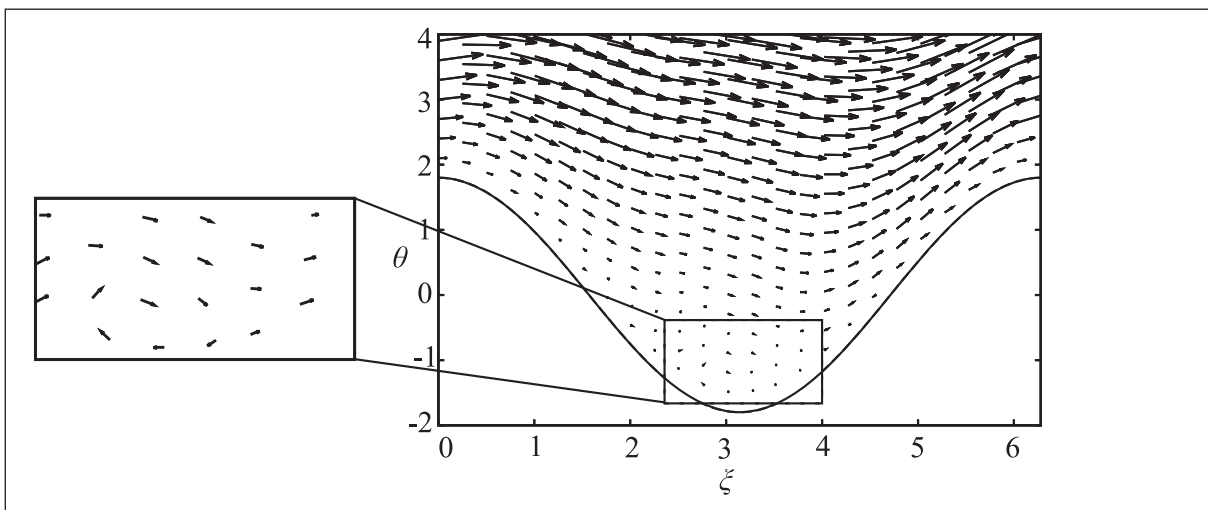
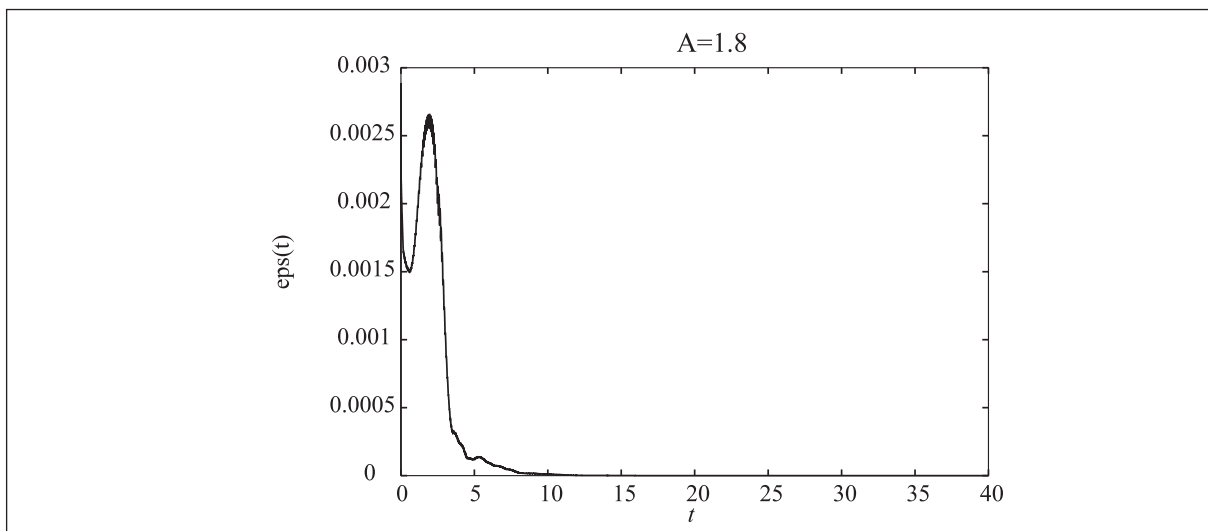
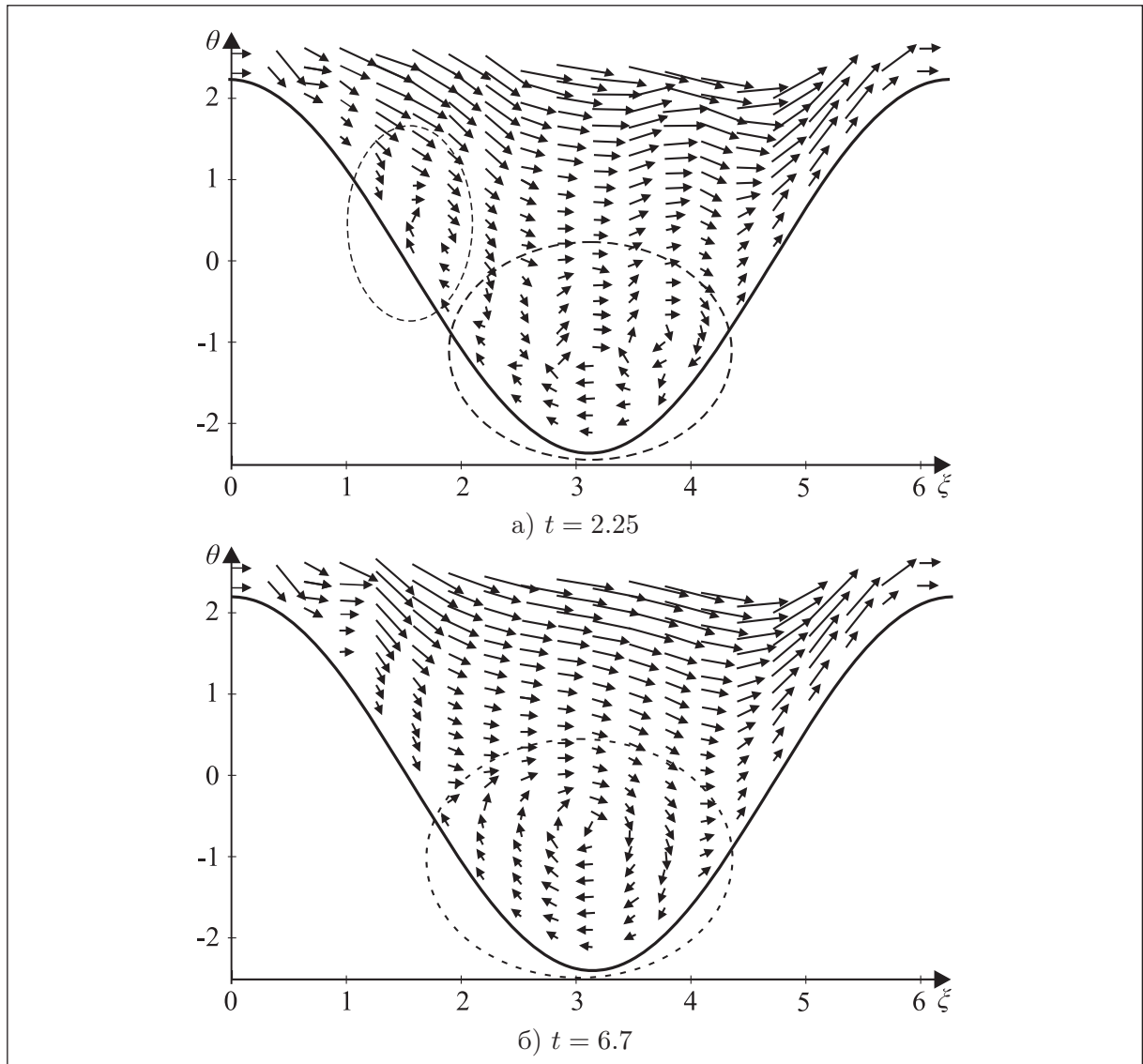


Рис. 2.9. График функции $\text{eps}(t)$ при $\mu = 0.8 \cos \xi$

Рис. 2.10. Поле скоростей при $\mu = 1.8 \cos \xi$, $t = 2$ Рис. 2.11. Поле скоростей при $\mu = 1.8 \cos \xi$, $t = 3$

Рис. 2.12. Поле скоростей при $\mu = 1.8 \cos \xi$, $t = 5$ Рис. 2.13. Поле скоростей при $\mu = 1.8 \cos \xi$, $t = 9$ Рис. 2.14. График функции $\text{eps}(t)$ при $\mu = 1.8 \cos \xi$

Рис. 2.15. Поле скоростей при $\mu = 2.3 \cos \xi$

Полученные нами результаты подтверждают результаты из [7] и уточняют их: существуют две критические амплитуды A_1^* и $A_2^* > A_1^*$, такие, что при $A < A_1^*$ течение ламинарное и с некоторого момента времени — стационарное (например, при $A = 0.8$ см. рис. 2.7–2.9), при $A_1^* < A < A_2^*$ в течении образуется вихри, но начиная с некоторого момента времени течение становится ламинарным и стационарным (например, при $A = 1.8$ см. рис. 2.10–2.14), а при $A > A_2^*$ в потоке также наблюдается периодический процесс образования вихрей, но начиная с некоторого (большого) времени течение становится стационарным, но не ламинарным, т.е. в «ямке» возникает стационарный вихрь (например, при $A = 2.3$ см. рис. 2.15).

Отметим, что использование явной схемы вкупе с использованием многопроцессорных ЭВМ позволяет моделировать задачу на промежутках времени, существенно больших, чем при использовании неявной схемы, даже не смотря на необходимость использования очень маленьких шагов по времени.

Заметим, что на приведенных рисунках 2.10–2.15 отчетливо видно явление отрыва пограничного слоя и его повторного прилипания к обтекаемой поверхности.

2.4.2 Алгоритм численного решения уравнения типа Рэлея

Теперь мы построим алгоритм численного решения задачи (2.18), (2.19). Для удобства перепишем эту задачу здесь еще раз, подставив явный вид u_0^\dagger (см. (2.21)):

$$\varepsilon^{1/3} \frac{\partial}{\partial t} \Delta \int_0^\xi \tilde{v}_2^{\text{II}} d\xi + f'(\tau/\sqrt{x}) \Delta \tilde{v}_2^{\text{II}} - \tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{f'''(\tau/\sqrt{x})}{x} = 0, \quad (2.129)$$

$$\tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau=0} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^*, \quad \lim_{\tau \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^{\text{II}} = 0, \quad \tilde{v}_2^{\text{II}}|_\xi = \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\xi+2\pi}. \quad (2.130)$$

В качестве начального условия возьмем

$$\tilde{v}_2^{\text{II}}|_{t=0} = v_\infty e^{-\tau^2/10}, \quad (2.131)$$

где

$$v_\infty(t, x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\theta' \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^*. \quad (2.132)$$

Отметим, что интеграл $\int_0^\xi \tilde{f} d\xi$ можно вычислить по следующей формуле

$$\int_0^\xi \tilde{f} d\xi = \int_0^\xi \tilde{f}(\xi') d\xi' - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\xi'} \tilde{f}(\xi'') d\xi'' \right] d\xi'. \quad (2.133)$$

Сделаем замены:

$$g \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^\xi \tilde{v}_2^{\text{II}} d\xi, \quad G \stackrel{\text{def}}{=} \Delta g. \quad (2.134)$$

С учетом замен (2.134) уравнение (2.129) примет вид

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \varepsilon^{-1/3} f'(\tau/\sqrt{x}) \frac{\partial G}{\partial \xi} = \varepsilon^{-1/3} \tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{f'''(\tau/\sqrt{x})}{x}. \quad (2.135)$$

Тогда алгоритм нахождения \tilde{v}_2^{II} следующий.

1. Найти функцию G из уравнения (2.135) с условиями периодичности:

$$G|_\xi = G|_{\xi+2\pi}.$$

2. Найти функцию g из уравнения

$$\Delta g = G. \quad (2.136)$$

3. Найти функцию \tilde{v}_2^{II} по формуле

$$\tilde{v}_2^{\text{II}} = \frac{\partial g}{\partial \xi}. \quad (2.137)$$

Как и в предыдущем разделе, ограничим область, в которой ищется решение до $\tau_{\max} = 100$. Введем сетку ω_2 с шагами h_ξ, h_τ, h_t на области

$$\Omega_2 = [0, 2\pi] \times [0, \tau_{\max}] \times [0, T_{\max}],$$

в которой мы будем искать решение:

$$\omega_2 = \left\{ (i, j, k) : \xi_i = ih_\xi, \tau_j = jh_\tau, t^k = kh_t, \right. \\ \left. i = 0, \dots, N; \quad j = 0, \dots, M; \quad k = 0, \dots, K; \right. \\ \left. N = 2\pi/h_\xi, \quad M = \tau_{\max}/h_\tau, \quad K = T_{\max}/h_t \right\}.$$

Введем сеточные функции: $v_{i,j}^k = \tilde{v}_2^{\text{II}}(t^k, \xi_i, \tau_j)$, $G_{i,j}^k = G(t^k, \xi_i, \tau_j)$.

Сначала найдем численно (например, с помощью метода Рунге–Кутты, см. [96]) функцию Блазиуса (см. (1.5)):

$$2f''' + f \cdot f'' = 0, \quad f(0) = f'(0) = 0, \quad f(\infty) = 1.$$

Введем обозначения:

$$f_j^{(1)} \stackrel{\text{def}}{=} f'(\tau_j/\sqrt{x}), \quad f_j^{(3)} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f'''(\tau_j/\sqrt{x})}{x}.$$

Теперь перейдем к приведенному алгоритму. Уравнение (2.135) будем решать численно с помощью разностной схемы (см. [95]), которая довольно тривиальна:

$$G_{i,j}^{k+1} = G_{i,j}^k - \varepsilon^{-1/3} h_t f_j^{(1)} \frac{G_{i,j}^k - G_{i-1,j}^k}{h_\xi} + \varepsilon^{-1/3} h_t f_j^{(3)} v_{i,j}^k.$$

Пункты 2 и 3 приведенного выше алгоритма удобно решать, разложив функции в ряды Фурье по переменной ξ :

$$g = \sum_{k \neq 0} \hat{g}_k(t, \tau) e^{ik\xi}, \quad G = \sum_{k \neq 0} \hat{G}_k(t, \tau) e^{ik\xi}, \quad \tilde{v}_2^{\text{II}} = \sum_{k \neq 0} \hat{v}_k(t, \tau) e^{ik\xi}$$

Тогда уравнение (2.136) примет следующий вид:

$$\frac{\partial^2 \hat{g}_k}{\partial \tau^2} - k^2 \hat{g}_k = \hat{G}_k, \quad k \neq 0,$$

а из граничных условий (2.130) легко получить

$$\hat{g}_k|_{\tau=0} = \frac{\hat{v}_{\infty,k}}{ik}, \quad \hat{g}_k|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0,$$

где $\hat{v}_{\infty,k}$ — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции v_∞ , $k \neq 0$. Эту задачу мы будем решать с помощью неявной разностной схемы методом прогонки (см. [95]).

Коэффициенты \hat{v}_k будем находить по формуле (2.137), которая примет следующий вид:

$$\hat{v}_k = ik \hat{g}_k.$$

Мы не будем приводить численную реализацию данного алгоритма в силу его тривиальности.

Перейдем к результатам численного решения. В качестве функции, описывающую неровность мы взяли

$$\mu(\xi) = 2.3 \cos(\xi).$$

Как было показано в предыдущем разделе, при таком выборе функции в тонком слое возникают вихри, см. рис. 2.15.

Заметим, что в переменных (x, y) при малых ε классический пограничный слой Прандтля сосредоточен в малой окрестности оси x , см. рис. 2.16. Поэтому мы приводим картину течения в переменных (τ, ξ) , см. рис. 2.17, и, для наглядности, в переменных (τ, x) , см. рис. 2.18. В последнем случае мы растягиваем период по переменной ξ в окрестности выбранных точек на оси x (напомним, что в «главном» скорости потока зависят от x как от параметра).

На рис. 2.18, 2.17 мы изображаем главные слагаемые построенного нами решения, которое имеет вид

$$\begin{aligned} u(\tau, \xi) &= f'(\tau/\sqrt{x}) + \varepsilon^{1/3} \tilde{u}_1^{\text{II}} + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}), \\ v(\tau, \xi) &= \varepsilon^{2/3} \tilde{v}_2^{\text{II}} + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

где функция \tilde{u}_1^{II} определяется формулой (см. (2.26))

$$\tilde{u}_1^{\text{II}} = \mu \frac{f''(\tau/\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$$

На рис. 2.16 изображено решение невозмущенной задачи, т.е. решение задачи обтекания плоской пластины без неровностей. Как известно [97] (см. также (1.6)), ее решение имеет вид

$$\begin{aligned} U(x, y) &= f'\left(\frac{y}{\varepsilon\sqrt{x}}\right), \\ V(x, y) &= \frac{\varepsilon}{2\sqrt{x}} \left[\frac{y}{\varepsilon\sqrt{x}} f'\left(\frac{y}{\varepsilon\sqrt{x}}\right) - f\left(\frac{y}{\varepsilon\sqrt{x}}\right) \right]. \end{aligned} \tag{2.138}$$

Из сравнения рис. 2.18 и 2.16 видно, что малые неровности на поверхности пластины вносят возмущения в течение в пограничном слое. Также отметим, что из сравнения этих рисунков (см. также рис. 2.17) может показаться что в исследуемой нами задаче стоит условие проницаемости на нижней границе, что не верно, т.к. как уже было сказано ранее, пограничный слой в нашей задаче имеет двухпалубную структуру (см. рис. 2.2), и под классическим пограничным слоем, изображенным на рис. 2.18 находится тонкий пограничный слой, см. рис. 2.15 в предыдущем разделе.

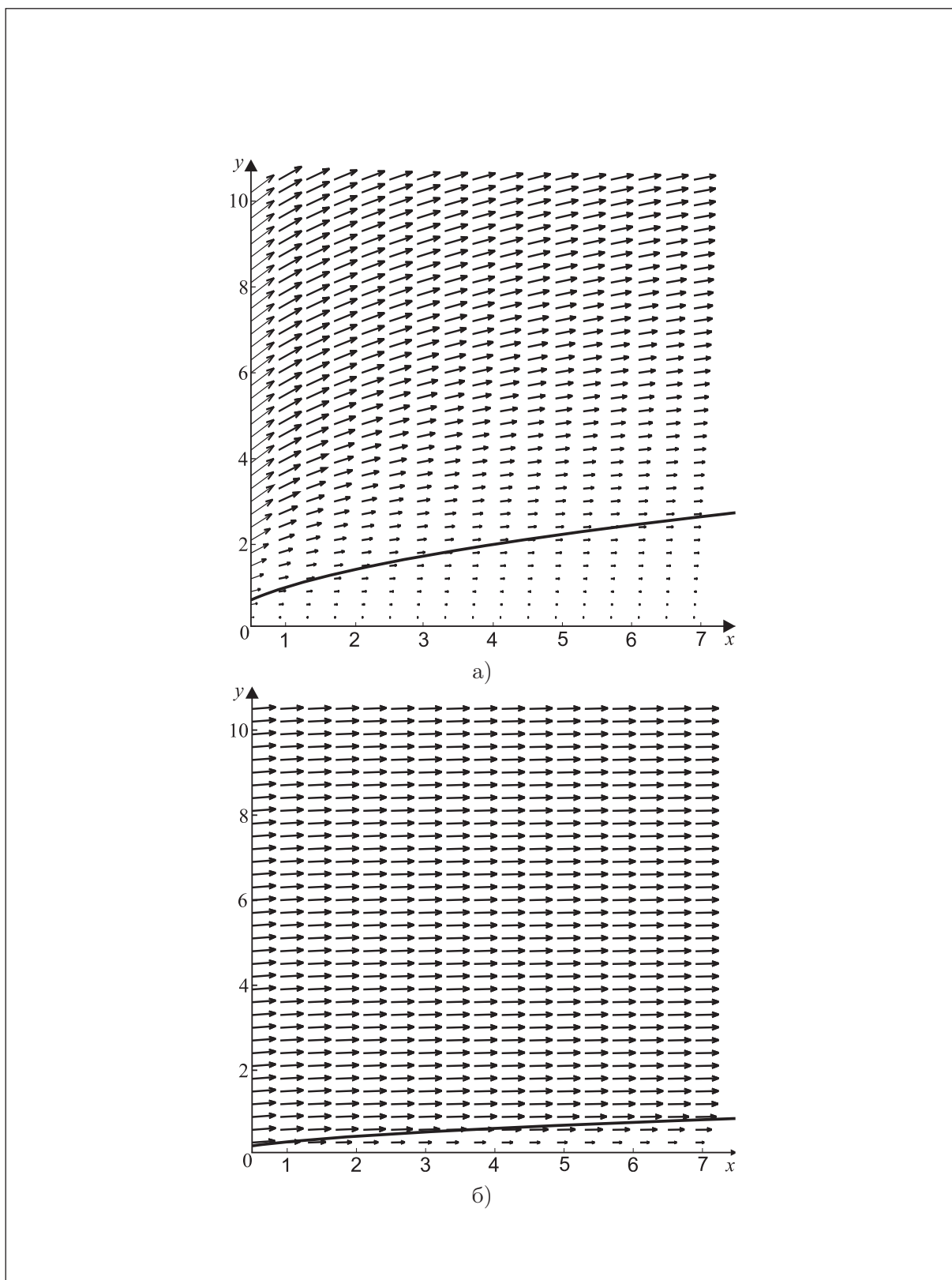


Рис. 2.16. Поле скоростей течения вдоль ровной пластины, описываемое формулами (2.138): а) при $\varepsilon = 1$; б) при $\varepsilon = 0.1$

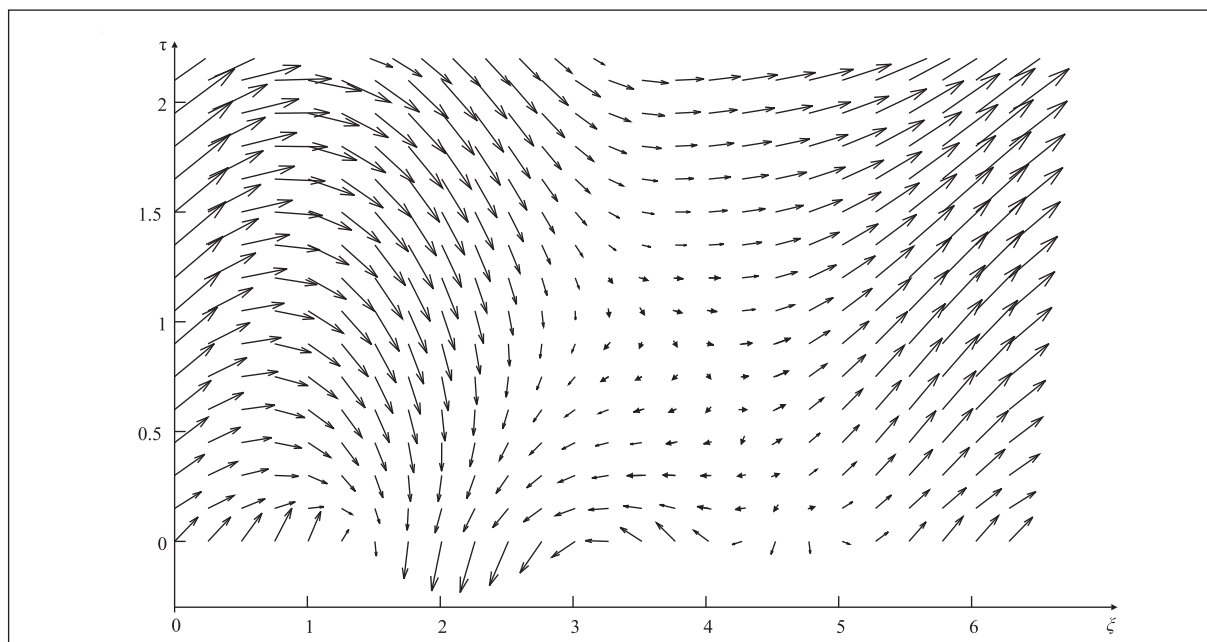


Рис. 2.17. Поле скоростей течения вдоль пластины с неровностями при $x = 1$, $\varepsilon = 0.1$, $t = 0.8$ (увеличенный погранслой)

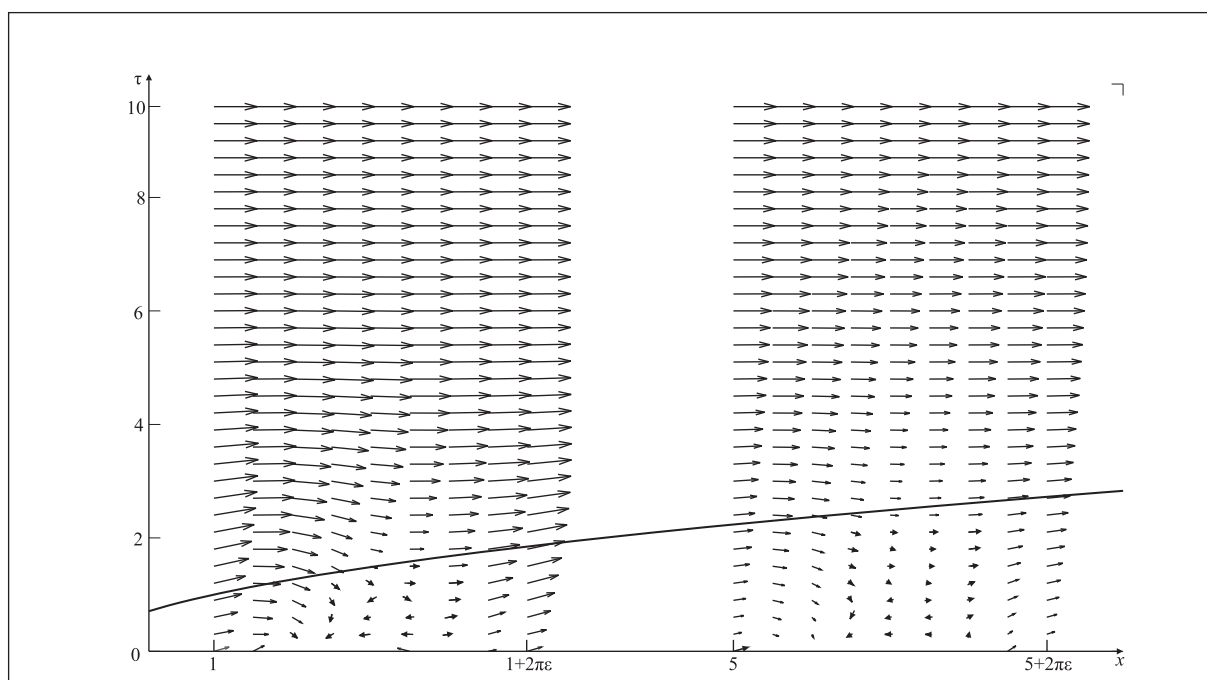


Рис. 2.18. Поле скоростей течения вдоль пластины с неровностями при $x = 1$ и $x = 5$, параметре $\varepsilon = 0.1$, $t = 0.8$

3. Задача обтекания малой локализованной неровности на пластине

3.1. Постановка задачи

Мы рассматриваем течение вязкой несжимаемой жидкости вдоль неподвижной полубесконечной пластины при больших значениях числа Рейнольдса \mathbf{Re} . Набегающий поток предполагается плоскопараллельным и имеющим скорость $\mathbf{U}_0 = (1, 0)$, см. рис. 3.1. Пластина расположена вдоль положительной части оси Ox , а на ее поверхности S в точке x_0 имеется локализованная (уединенная) малая неровность типа горбика, скачка или излома в виде угла.

Поверхность S задается следующим равенством:

$$y_s = \varepsilon^{4/3} \mu(\xi), \quad (3.1)$$

где $\xi = \frac{x - x_0}{\varepsilon}$, а $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{Re}}}$ — малый параметр.

Как было написано выше, мы рассматриваем случаи, когда поверхность пластины (т.е. функция $\mu(\xi)$) имеет одну из следующих форм:

1. в точке x_0 поверхность пластины имеет излом типа малого сглаженного угла, см. рис. 3.1 а), например,

$$\mu(\xi) = \tan(\alpha) \xi \frac{-e^\xi}{1 - e^\xi}; \quad (3.2)$$

2. в точке x_0 функция μ имеет вид сглаженной ступеньки, см. рис. 3.1 б), например,

$$\mu(\xi) = A \frac{e^\xi}{1 + e^\xi}, \quad (3.3)$$

где A — величина скачка;

3. в точке x_0 на поверхности пластины присутствует горб, см. рис. 3.1 в), например,

$$\mu(\xi) = A \exp(-\xi^2), \quad (3.4)$$

где A — высота горба.

Поставленная задача описывается системой уравнений Навье–Стокса и неразрывности:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (3.5)$$

где $\mathbf{U} = (u, v)$ — вектор скорости, а p — давление.

Система уравнений (3.5) дополняется граничными условиями прилипания к поверхности S :

$$\mathbf{U} \Big|_{\substack{y=y_s \\ x>0}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (3.6)$$

и граничными условиями согласования с внешним потоком

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big|_{\substack{y=0 \\ x<0}} = 0, \quad v \Big|_{\substack{y=0 \\ x<0}} = 0, \quad \mathbf{U} \Big|_{y \rightarrow \pm\infty} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U} \Big|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (3.7)$$

Похожая задача была рассмотрена в работах [14; 36; 42; 51] для других масштабов и других типов внешних течений, подробнее см. в разделе 1.2.

3.2. Формальное асимптотическое решение

Введем погранслойные переменные (характерный масштаб):

$$\theta = \frac{y}{\varepsilon^{4/3}}, \quad \tau = \frac{y}{\varepsilon}, \quad \xi = \frac{x - x_0}{\varepsilon}. \quad (3.8)$$

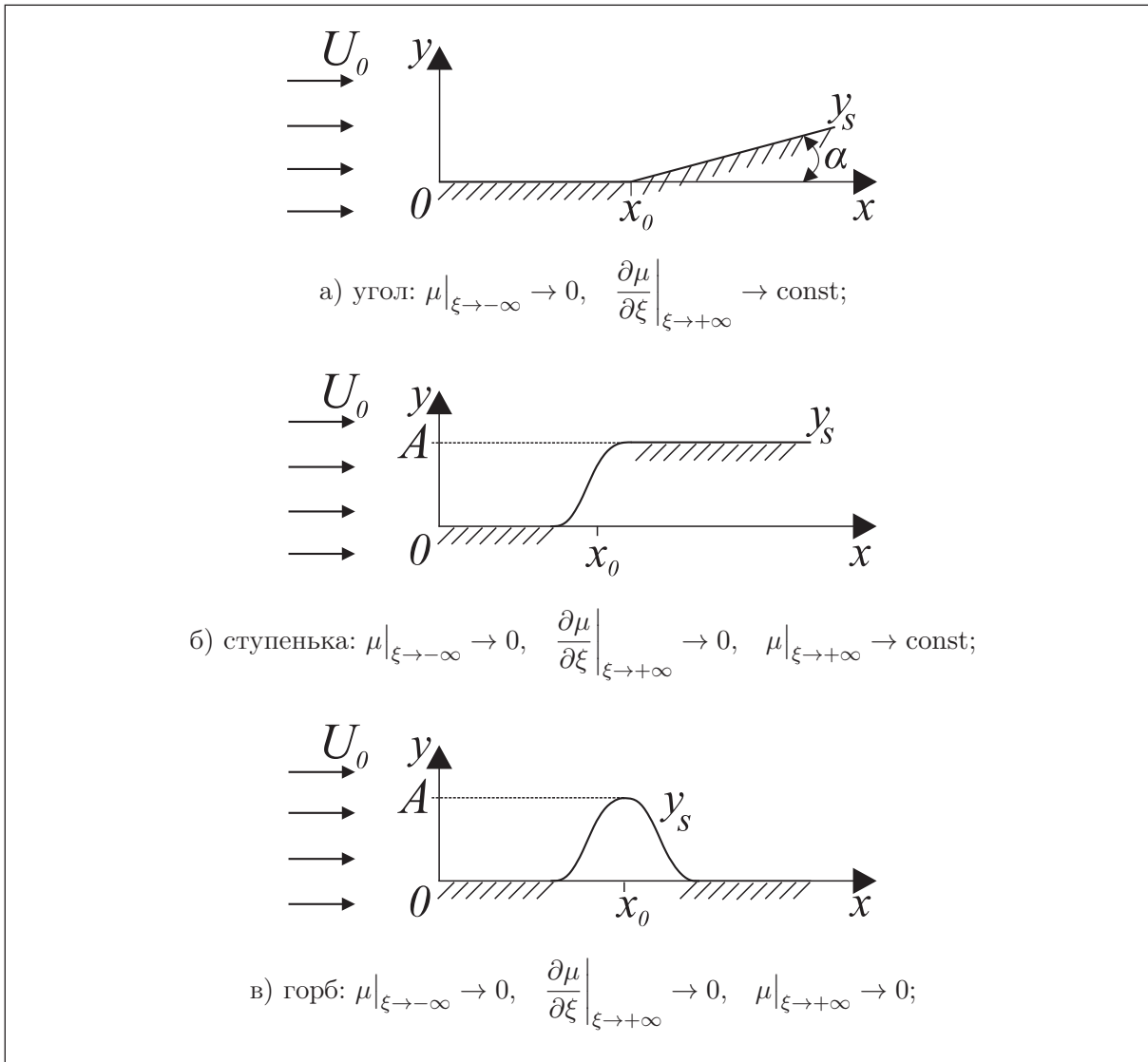


Рис. 3.1. Типы рассматриваемых неровностей, $\mathbf{U}_0 = (1, 0)$, $x_0 > 0$

Будем искать решение задачи (3.5), (3.6), (3.7) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(x, y) &= f'(\tau/\sqrt{x}) + \sum_{i \geq 1} \varepsilon^{\frac{i}{3}} \left(u_i^{\text{I}}(x, \xi, \theta) + u_i^{\text{II}}(x, \xi, \tau) + u_i^{\text{III}}(x, \xi, y) \right), \\ v(x, y) &= \sum_{i \geq 2} \varepsilon^{\frac{i}{3}} \left(v_i^{\text{I}}(x, \xi, \theta) + v_i^{\text{II}}(x, \xi, \tau) + v_i^{\text{III}}(x, \xi, y) \right), \\ p(x, y) &= p_0 + \sum_{i \geq 1} \varepsilon^{\frac{i}{3}} \left(p_i^{\text{I}}(x, \xi, \theta) + p_i^{\text{II}}(x, \xi, \tau) + p_i^{\text{III}}(x, \xi, y) \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

где $f(\tau/\sqrt{x})$ — функция Блазиуса, см. (1.5).

Как будет показано ниже, формальное асимптотическое решение рассматриваемой задачи (3.5), (3.6), (3.7) имеет двухпалубную структуру, подобную структуре, полученной в задаче обтекания пластины с периодическими неровностями, см. раздел 2. Как обычно, верхние индексы у функций в разложении (3.9) означают номер пограничного слоя, в котором они определены: I — тонкий пограничный слой («нижняя палуба»), II — классический пограничный слой («верхняя палуба») и III — область внешнего невозмущенного течения, см. рис. 3.2. Теперь нам надо ввести следующее определение (аналогичное Определению 2.3 из раздела 2.1).

Определение 3.1. Пусть $N \in \mathbb{Z}_+$ достаточно большое. Тогда

- (i) пограничной функцией в тонком пограничном слое I называется гладкая функция, убывающая как $|\theta^{-N}|$ при $\theta \rightarrow \infty$;
- (ii) пограничной функцией в классическом пограничном слое II называется гладкая функция, убывающая как $|\tau^{-N}|$ при $\tau \rightarrow \infty$.

Для построения формального асимптотического решения нам потребуются Леммы 2.1–2.3 из раздела 2.1. Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

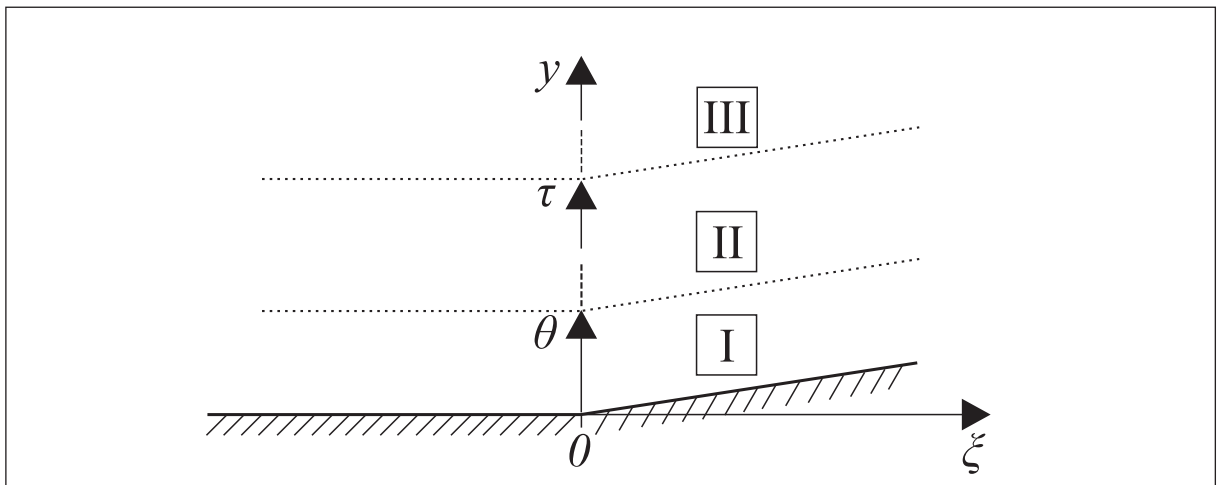


Рис. 3.2. Двухпалубная структура пограничного слоя на примере задачи обтекания поверхности в форме угла

Теорема 3.1*. Пусть $x \geq \delta > 0$. Тогда формальное асимптотическое решение задачи (3.5), (3.6), (3.7) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y) &= f'(\tau/\sqrt{x}) + \varepsilon^{1/3}(u_1^I(x, \xi, \theta) + u_1^{II}(x, \tau)) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}), \\ v(x, y) &= \varepsilon^{2/3}(v_2^I(x, \xi, \theta) + v_2^{II}(x, \xi, \tau)) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ p(x, y) &= p_0 + \varepsilon^{2/3}p_2^{II}(x, \xi, \tau) + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned} \quad (3.10)$$

где $\theta = y/\varepsilon^{4/3}$, $\tau = y/\varepsilon$, $\xi = (x - x_0)/\varepsilon$, а $f(\tau/\sqrt{x})$ — функция Блазиуса (см. (1.5)).

Функции

$$u_1^* = u_1^I + \theta \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \quad v_2^* = v_2^I + v_2^{II} \Big|_{\tau=0}, \quad (3.11)$$

описывающие течение в тонком погранслое, являются решением системы уравнений пограничного слоя Прандтля с индуцированным давлением:

$$\begin{cases} u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} + v_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} = - \frac{\partial p_2^{II}}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2^*}{\partial \theta} = 0, \end{cases} \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} u_1^* \Big|_{\theta=\mu} &= \mu \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \quad v_2^* \Big|_{\theta=\mu} = 0, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} &\rightarrow 0, \quad u_1^* \Big|_{\xi \rightarrow -\infty} \rightarrow \theta \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Функция v_2^{II} , описывающая течение в классическом погранслое, является решением уравнения типа Рэлея

$$f'(\tau/\sqrt{x}) \left(\frac{\partial^2 v_2^{II}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_2^{II}}{\partial \tau^2} \right) - v_2^{II} \frac{f'''(\tau/\sqrt{x})}{x} = 0, \quad (3.14)$$

$$v_2^{II} \Big|_{\tau=0} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} v_2^*, \quad v_2^{II} \Big|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad v_2^{II} \Big|_{\xi \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial v_2^{II}}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (3.15)$$

Давление p_2^{II} определяется из следующего выражения:

$$\frac{\partial p_2^{II}}{\partial \xi} = f'(\tau/\sqrt{x}) \frac{\partial v_2^{II}}{\partial \tau} - v_2^{II} \frac{f''(\tau/\sqrt{x})}{\sqrt{x}}. \quad (3.16)$$

Замечание 3.1. Если сделать замену вертикальной переменной, выравнивающую границу $\hat{y} = y - y_s = y - \varepsilon^{4/3}\mu(\xi)$, то асимптотическое решение (3.10) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} u &= f'(\hat{\tau}/\sqrt{x}) + \varepsilon^{1/3}(u_1^I(x, \xi, \hat{\theta}) + u_1^{II}(x, \xi, \hat{\tau})) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}), \\ v &= \varepsilon^{2/3}(v_2^I(x, \xi, \hat{\theta}) + v_2^{II}(x, \xi, \hat{\tau})) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ p &= p_0 + \varepsilon^{2/3}p_2^{II}(x, \xi, \hat{\tau}) + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

* См. Замечание 2.1.

где $\hat{\tau} = \hat{y}/\varepsilon = \tau - \varepsilon^{1/3}\mu$, $\hat{\theta} = \hat{y}/\varepsilon^{4/3} = \theta - \mu$. Краевая задача (3.12), (3.13) примет следующий вид:

$$\begin{cases} u_1^* \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u_1^*}{\partial \hat{\theta}} \right) + v_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \hat{\theta}} = - \frac{\partial p_2^{\text{II}}}{\partial \xi} \Big|_{\hat{\tau}=0} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \hat{\theta}^2}, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u_1^*}{\partial \hat{\theta}} + \frac{\partial v_2^*}{\partial \hat{\theta}} = 0, \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} u_1^* \Big|_{\hat{\theta}=0} = v_2^* \Big|_{\hat{\theta}=0} = 0, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \hat{\theta}} \Big|_{\hat{\theta} \rightarrow \infty} &\rightarrow \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} &\rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \quad u_1^* \Big|_{\xi \rightarrow -\infty} \rightarrow \hat{\theta} \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow \infty}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Функция $u_1^{\text{II}} = \mu \frac{f'(\hat{\tau}/\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$, а краевая задача (3.14), (3.15) и выражение для давления (3.16) не изменят свой вид.

Доказательство Теоремы 3.1. Подставим разложения (3.9) в систему уравнений (3.5), соберем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε и приравняем их к нулю.

1. Функции, описывающие течение вне погранслоев.

Пусть $\tau \rightarrow \infty$ и $\theta \rightarrow \infty$. Тогда в силу Определения 3.1 все функции с верхними индексами I и II устремятся к нулю, а $f' \Big|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 1$, см. (1.5). Тогда мы получим уравнения на функции в области вне пограничных слоев (в области III, см. рис. 3.2).

При $\varepsilon^{-2/3}$ имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial p_1^{\text{III}}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u_1^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0. \quad (3.19)$$

Следовательно, $p_1^{\text{III}} = p_1^{\text{III}}(x, y)$ и $u_1^{\text{III}} = u_1^{\text{III}}(x, y)$.

При $\varepsilon^{-1/3}$ имеем:

$$\frac{\partial p_2^{\text{III}}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_2^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial v_2^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u_2^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0. \quad (3.20)$$

Следовательно, $p_2^{\text{III}} = p_2^{\text{III}}(x, y)$, $v_2^{\text{III}} = v_2^{\text{III}}(x, y)$ и $u_2^{\text{III}} = u_2^{\text{III}}(x, y)$.

При ε^0 имеем:

$$\frac{\partial p_0^{\text{III}}}{\partial x} + \frac{\partial p_3^{\text{III}}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_3^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial p_0^{\text{III}}}{\partial y} + \frac{\partial v_3^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u_3^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0. \quad (3.21)$$

Из последнего уравнения системы (3.21) следует, что $u_3^{\text{III}} = u_3^{\text{III}}(x, y)$. В силу того, что $p_0^{\text{III}} = p_0^{\text{III}}(x, y)$, получаем

$$p_3^{\text{III}} = - \frac{\partial p_0^{\text{III}}}{\partial x} \xi + C_1(x, y), \quad v_3^{\text{III}} = - \frac{\partial p_0^{\text{III}}}{\partial y} \xi + C_2(x, y).$$

Очевидно, что функции p_3^{III} и v_3^{III} должны быть ограничены при $\xi \rightarrow \pm\infty$. Следовательно, получаем следующие равенства

$$\frac{\partial p_0^{\text{III}}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial p_0^{\text{III}}}{\partial y} = 0.$$

Отсюда следует, что $p_0^{\text{III}} = \text{const}$, и, следовательно, $v_3^{\text{III}} = v_3^{\text{III}}(x, y)$, $p_3^{\text{III}} = p_3^{\text{III}}(x, y)$.

При $\varepsilon^{1/3}$ имеем аналогичную систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial p_1^{\text{III}}}{\partial x} + \frac{\partial p_4^{\text{III}}}{\partial \xi} + \frac{\partial u_1^{\text{III}}}{\partial x} + \frac{\partial u_4^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial p_1^{\text{III}}}{\partial y} + \frac{\partial v_4^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial u_1^{\text{III}}}{\partial x} + \frac{\partial u_4^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0. \end{cases} \quad (3.22)$$

Действуя по аналогии и учитывая полученные выше результаты, получаем, что $u_1^{\text{III}} = u_1^{\text{III}}(y)$, $p_1^{\text{III}} = \text{const}$, $u_4^{\text{III}} = u_4^{\text{III}}(x, y)$, $p_4^{\text{III}} = p_4^{\text{III}}(x, y)$, $v_4^{\text{III}} = v_4^{\text{III}}(x, y)$.

При $\varepsilon^{2/3}$ имеем аналогичную систему:

$$\begin{cases} \frac{\partial p_2^{\text{III}}}{\partial x} + \frac{\partial u_2^{\text{III}}}{\partial x} + \frac{\partial u_5^{\text{III}}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_5^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial p_2^{\text{III}}}{\partial y} + \frac{\partial v_2^{\text{III}}}{\partial x} + \frac{\partial v_5^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial v_2^{\text{III}}}{\partial y} + \frac{\partial u_2^{\text{III}}}{\partial x} + \frac{\partial u_5^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0. \end{cases} \quad (3.23)$$

Аналогично получаем, что $u_5^{\text{III}} = u_5^{\text{III}}(x, y)$, $p_5^{\text{III}} = p_5^{\text{III}}(x, y)$, $v_5^{\text{III}} = v_5^{\text{III}}(x, y)$, а функции v_2^{III} , u_2^{III} , p_2^{III} (не зависящие от ξ) являются решением следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial p_2^{\text{III}}}{\partial x} + \frac{\partial u_2^{\text{III}}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial p_2^{\text{III}}}{\partial y} + \frac{\partial v_2^{\text{III}}}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial v_2^{\text{III}}}{\partial y} + \frac{\partial u_2^{\text{III}}}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (3.24)$$

Продифференцируем первое уравнение системы (3.24) по y , а второе — по x , а затем вычтем из второго первое, и используя третье уравнение системы (3.24), получим уравнение на функцию v_2^{III} в области $x > 0$, $y > 0$:

$$\frac{\partial^2 v_2^{\text{III}}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_2^{\text{III}}}{\partial y^2} = 0. \quad (3.25)$$

Как показано далее (см. (3.34)), граничные условия для функции v_2^{III} имеют вид $v_2^{\text{III}}|_{y=0} = 0$, $v_2^{\text{III}}|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, $v_2^{\text{III}}|_{x=0} = 0$. Очевидно, что с такими граничными условиями уравнение (3.25) имеет лишь тривиальное решение

$$v_2^{\text{III}} = 0. \quad (3.26)$$

Следовательно, из (3.24) получаем, что $u_2^{\text{III}} = u_2^{\text{III}}(y)$, $p_2^{\text{III}} = \text{const}$.

2. Функции, описывающие течение в классическом погранслое.

Пусть $\theta \rightarrow \infty$. Тогда в силу Определения 3.1 функции с верхним индексом I устремятся к нулю. Тогда мы получим уравнения на функции, описывающие течение в

классическом пограничном слое (в области II, см. рис. 3.2). Для удобства введем обозначение:

$$u_0 \stackrel{\text{def}}{=} f'(\tau/\sqrt{x}).$$

При $\varepsilon^{-2/3}$ имеем

$$\frac{\partial p_1^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial u_1^{\text{II}}}{\partial \xi} = 0. \quad (3.27)$$

Из первого уравнения системы (3.27) в силу Определения 3.1 получаем, что $p_1^{\text{II}} = 0$, а из второго — $u_1^{\text{II}} = u_1^{\text{II}}(x, \tau)$.

При $\varepsilon^{-1/3}$ имеем

$$\begin{cases} \frac{\partial p_2^{\text{II}}}{\partial \xi} + u_0 \frac{\partial u_2^{\text{II}}}{\partial \xi} + (v_2^{\text{II}} + v_2^{\text{III}}|_{y=0}) \frac{\partial u_0}{\partial \tau} = 0, \\ \frac{\partial p_2^{\text{II}}}{\partial \tau} + u_0 \frac{\partial v_2^{\text{II}}}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial u_2^{\text{II}}}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0. \end{cases} \quad (3.28)$$

Продифференцировав первое уравнение системы (3.28) по τ , а второе — по ξ , и затем вычтя из второго первое, получим

$$u_0 \left(\frac{\partial^2 v_2^{\text{II}}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_2^{\text{II}}}{\partial \tau^2} \right) - (v_2^{\text{II}} + v_2^{\text{III}}|_{y=0}) \frac{\partial^2 u_0}{\partial \tau^2} = 0.$$

Подставляя выражение для u_0 , и учитывая, что $v_2^{\text{III}} = 0$ (см. (3.26)), получаем уравнение типа Рэлея:

$$\frac{\partial^2 v_2^{\text{II}}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 v_2^{\text{II}}}{\partial \tau^2} - v_2^{\text{II}} \frac{1}{x} \frac{f'''(\tau/\sqrt{x})}{f'(\tau/\sqrt{x})} = 0. \quad (3.29)$$

Давление можно найти из первого уравнения системы (3.28):

$$\frac{\partial p_2^{\text{II}}}{\partial \xi} = f'(\tau/\sqrt{x}) \frac{\partial v_2^{\text{II}}}{\partial \xi} - v_2^{\text{II}} \frac{f''(\tau/\sqrt{x})}{\sqrt{x}}. \quad (3.30)$$

3. Функции, описывающие течение в тонком погранслое.

Теперь мы получим уравнения на функции, описывающие течение в тонком пограничном слое (в области I, см. рис. 3.2).

При ε^{-1} имеем

$$\frac{\partial p_1^{\text{I}}}{\partial \theta} = 0.$$

Следовательно, в силу Определения 3.1, $p_1^{\text{I}} = 0$.

При $\varepsilon^{-2/3}$ имеем

$$\frac{\partial p_2^{\text{I}}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial v_2^{\text{I}}}{\partial \theta} + \frac{\partial u_1^{\text{I}}}{\partial \xi} = 0.$$

Аналогично, $p_2^{\text{I}} = 0$.

При $\varepsilon^{-1/3}$ имеем

$$\begin{aligned} \theta \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} \frac{\partial u_1^I}{\partial \xi} + v_2^I \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} + (v_2^I + v_2^{II} \Big|_{\tau=0} + v_2^{III} \Big|_{y=0}) \frac{\partial u_1^I}{\partial \theta} - \\ - \frac{\partial^2 u_1^I}{\partial \theta^2} + (u_1^I + u_1^{II} \Big|_{\tau=0} + u_1^{III} \Big|_{y=0}) \frac{\partial u_1^I}{\partial \xi} = 0. \end{aligned}$$

Введем новые функции:

$$u_1^* = u_1^I + u_1^{II} \Big|_{\tau=0} + u_1^{III} \Big|_{y=0} + \theta \frac{\partial u_0^{II}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0}, \quad v_2^* = v_2^I + v_2^{II} \Big|_{\tau=0} + v_2^{III} \Big|_{y=0}.$$

Учитывая (см. (3.28)), что $(v_2^{II} \Big|_{\tau=0} + v_2^{III} \Big|_{y=0}) \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = - \frac{\partial p_2^{II}}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0}$, получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} + v_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} + \frac{\partial p_2^{II}}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} - \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \theta^2} = 0, \\ \frac{\partial v_2^*}{\partial \theta} + \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} = 0. \end{cases} \quad (3.31)$$

4. Граничные условия.

Из граничных условий (3.6), (3.7) имеем:

$$u_1^I \Big|_{\theta=\mu} + u_1^{II} \Big|_{\tau=0} + u_1^{III} \Big|_{y=0} = 0, \quad v_2^I \Big|_{\theta=\mu} + v_2^{II} \Big|_{\tau=0} + v_2^{III} \Big|_{y=0} = 0. \quad (3.32)$$

Функция u_1^I зависит от быстрой переменной ξ , а функции u_1^{II} и u_1^{III} — не зависят. Следовательно они удовлетворяют граничным условиям по отдельности:

$$u_1^I \Big|_{\theta=\mu} = 0, \quad u_1^{II} \Big|_{\tau=0} + u_1^{III} \Big|_{y=0} = 0. \quad (3.33)$$

Функции v_2^I и v_2^{II} зависят от быстрой переменной ξ , а функция v_2^{III} — не зависит. Следовательно они удовлетворяют граничным условиям по отдельности:

$$v_2^I \Big|_{\theta=\mu} + v_2^{II} \Big|_{\tau=0} = 0, \quad v_2^{III} \Big|_{y=0} = 0. \quad (3.34)$$

Следовательно, граничные условия на нижней грани для функций u_1^* и v_2^* имеют следующий вид:

$$u_1^* \Big|_{\theta=\mu} = u_1^I \Big|_{\theta=\mu} + u_1^{II} \Big|_{\tau=0} + u_1^{III} \Big|_{y=0} + \mu \frac{\partial u_0}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} = \mu \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \quad (3.35)$$

$$v_2^* \Big|_{\theta=\mu} = v_2^I \Big|_{\theta=\mu} + v_2^{II} \Big|_{\tau=0} + v_2^{III} \Big|_{y=0} = 0. \quad (3.36)$$

На верхней грани функция u_1^* :

$$u_1^* \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \sim \theta f''(0) / \sqrt{x}, \quad (3.37)$$

откуда получаем:

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (3.38)$$

а для функции v_2^* справедливы следующие соотношения:

$$v_2^*|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow v_2^{\text{II}}|_{\tau=0}. \quad (3.39)$$

На левой и правой грани граничные условия для функции u_1^* имеют следующий вид:

$$u_1^*|_{\xi \rightarrow -\infty} \rightarrow \theta \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (3.40)$$

а для функции v_2^* :

$$v_2^*|_{\xi \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial v_2^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (3.41)$$

Для функции v_2^{II} граничные условия выглядят следующим образом:

$$v_2^{\text{II}}|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad v_2^{\text{II}}|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial v_2^{\text{II}}}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (3.42)$$

Для функции v_2^{II} граничные условия имеют вид

$$v_2^{\text{III}}|_{y \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad v_2^{\text{II}}|_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow 0. \quad (3.43)$$

Теорема 3.1 доказана. □

Отметим, что мы будем решать систему уравнений (3.12) численно с помощью метода установления. Это означает, что формально вместо системы уравнений (3.12) мы рассматриваем систему

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1^*}{\partial t} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} + v_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} = - \frac{\partial p_2^{\text{II}}}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2^*}{\partial \theta} = 0, \end{cases} \quad (3.44)$$

и решаем ее численно на больших временах (т.е. при большом количестве итераций). Если полученное решение стабилизируется, значит мы нашли стационарное решение системы (3.44) (т.е. решение системы (3.12)). В случае отсутствия стабилизации, необходимо рассматривать исходно нестационарную задачу, которая будет описываться нестационарной системой уравнений Навье–Стокса

$$\begin{cases} \varepsilon^{-2/3} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \langle \mathbf{U}, \nabla \rangle \mathbf{U} = -\nabla p + \varepsilon^2 \Delta \mathbf{U}, \\ \langle \nabla, \mathbf{U} \rangle = 0. \end{cases} \quad (3.45)$$

Наличие коэффициента $\varepsilon^{-2/3}$ перед производной по времени в (3.45) обусловлено тем, чтобы в уравнения тонкого пограничного слоя производная по времени входила без коэффициентов, см. (3.44) (см. также раздел 2.1).

Для задачи (3.45), (3.6), (3.7) справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2*. Пусть $x \geq \delta > 0$. Тогда формальное асимптотическое решение задачи (3.45), (3.6), (3.7) имеет вид

$$\begin{aligned} u(t, x, y) &= f'(\tau/\sqrt{x}) + \varepsilon^{1/3}(u_1^I(t, x, \xi, \theta) + u_1^{II}(t, x, \tau)) + \mathcal{O}(\varepsilon^{2/3}), \\ v(t, x, y) &= \varepsilon^{2/3}(v_2^I(t, x, \xi, \theta) + v_2^{II}(t, x, \xi, \tau)) + \mathcal{O}(\varepsilon), \\ p(t, x, y) &= p_0 + \varepsilon^{2/3}p_3^{II}(t, x, \xi, \tau) + \mathcal{O}(\varepsilon), \end{aligned}$$

где $\theta = y/\varepsilon^{4/3}$, $\tau = y/\varepsilon$, $\xi = (x - x_0)/\varepsilon$, а $f(\tau/\sqrt{x})$ — функция Блазиуса.

Функции $u_1^* = u_1^I + \theta \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}$, $v_2^* = v_2^I + v_2^{II}|_{\tau=0}$, описывающие течение в тонком погранслое, являются решением системы уравнений пограничного слоя Прандтля с индуцированным давлением:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1^*}{\partial t} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} + v_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} = -\frac{\partial p_2^{II}}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} + \frac{\partial v_2^*}{\partial \theta} = 0, \end{cases} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} u_1^*|_{\theta=\mu} &= \mu \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \quad v_2^*|_{\theta=\mu} = 0, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} &\rightarrow 0, \quad u_1^*|_{\xi \rightarrow -\infty} \rightarrow \theta \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Функция v_2^{II} , описывающая течение в классическом погранслое, является решением уравнения типа Рэлея

$$\varepsilon^{1/3} \frac{\partial}{\partial t} \Delta_{\xi, \tau} \int v_2^{II} d\xi + f'(\tau/\sqrt{x}) \Delta_{\xi, \tau} v_2^{II} - v_2^{II} \frac{f'''(\tau/\sqrt{x})}{x} = 0, \quad (3.48)$$

$$v_2^{II}|_{\tau=0} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} v_2^*, \quad v_2^{II}|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad v_2^{II}|_{\xi \rightarrow -\infty} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial v_2^{II}}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (3.49)$$

где $\Delta_{\xi, \tau} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \tau^2}$. Давление p_2^{II} определяется из (3.16).

Доказательство Теоремы 3.2 аналогично доказательству Теоремы 3.1.

3.3. Алгоритм численного решения и результаты его использования

Алгоритм нахождения решения задачи (3.5), (3.6), (3.7) следующий:

1. Найти функции u_1^* , v_2^* , описывающее течение в тонком пограничном слое, решив задачу (3.12), (3.13) (см. подраздел 3.3.1).
2. Найти $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^*$, являющийся граничным условием для задачи (3.14), (3.15).
3. Найти функцию \tilde{v}_2^{II} , описывающую осцилляции в классическом пограничном слое, решив задачу (3.14), (3.15) (см. раздел. 2.4.2).

* См. Замечание 2.1.

3.3.1 Алгоритм численного решения системы уравнений тонкого пограничного слоя

Мы будем решать задачу (3.12), (3.13) методом установления, т.е. фактически вместо системы уравнений (3.12) мы будем рассматривать систему (3.46). Для удобства численного счета, мы будем решать задачу (3.12), (3.13) в области с выровненной границей (см. Замечание 3.1 к Теореме 3.1), т.е. будем решать в переменных $(\xi, \hat{\theta})$, где $\hat{\theta} = \theta - \mu$. В этих переменных задача (3.46) имеет следующий вид (см. (3.17), (3.18)):

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \hat{\theta}} \right) + v^* \frac{\partial u^*}{\partial \hat{\theta}} + \frac{\partial p_2^{\text{II}}}{\partial \xi} \Big|_{\hat{\tau}=0} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial \hat{\theta}^2} = 0, \\ \frac{\partial v^*}{\partial \hat{\theta}} + \frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \hat{\theta}} = 0, \end{cases} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} u^*|_{\hat{\theta}=0} = v^*|_{\hat{\theta}=0} = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \Big|_{\hat{\theta} \rightarrow \infty} &\rightarrow \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} \frac{\partial \mu}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial u^*}{\partial \hat{\theta}} \Big|_{\hat{\theta} \rightarrow \infty} &\rightarrow \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \quad u^*|_{\xi \rightarrow -\infty} \rightarrow \hat{\theta} \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \quad \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \Big|_{\xi \rightarrow \infty}, \end{aligned} \quad (3.51)$$

где $u^* = u_1^*|_{\theta=\hat{\theta}+\mu}$, $v^* = v_2^*|_{\theta=\hat{\theta}+\mu}$. Слагаемое $\partial u^*/\partial t$ в (3.50) обусловлено использованием метода установления. В качестве начального условия для (3.50) мы выбрали

$$u|_{t=0} = \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} \left(\hat{\theta} + \frac{\hat{\theta}}{\hat{\theta} + 1} \mu \right). \quad (3.52)$$

Для решения полученной задачи (3.50) выразим из второго уравнения системы функцию v^* :

$$v^* = \int_0^{\hat{\theta}} \left(\frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \hat{\theta}'} - \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \right) d\hat{\theta}'. \quad (3.53)$$

Из выражения для давления (3.16) имеем:

$$\frac{\partial p_2^{\text{II}}}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} = - \left(v_2^{\text{II}} \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} \right) \Big|_{\tau=0} = - \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} v^*|_{\theta \rightarrow \infty}. \quad (3.54)$$

Подставляя полученные равенства (3.53) и (3.54) в (3.50), получаем уравнение на функцию u^* :

$$\frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \hat{\theta}} \right) + v^* \frac{\partial u^*}{\partial \hat{\theta}} - \frac{f''(0)}{\sqrt{x}} v^*|_{\theta \rightarrow \infty} - \frac{\partial^2 u^*}{\partial \hat{\theta}^2} = 0. \quad (3.55)$$

Полученную задачу (3.55), (3.51), (3.52) мы будем решать с помощью явной разностной схемы (ввиду легкости ее распараллеливания). Область, в которой ищется решение, является неограниченной: $(-\infty, \infty) \times [0, \infty)$. Однако, для численного счета можно ограничиться конечной областью $[-\xi_{\max}, \xi_{\max}] \times [0, \hat{\theta}_{\max}]$, где $\xi_{\max} = 50$, $\hat{\theta}_{\max} = 30$. Отметим, что если взять меньшие значения ξ_{\max} , то это может привести к неустойчивости, см. [51].

Также заметим, что функция u^* не ограничена на бесконечности:

$$u^*|_{\hat{\theta} \rightarrow \infty} \sim (\hat{\theta} + \mu)f''(0)/\sqrt{x}.$$

Соответственно, можно ввести новую функцию $H = u^* - (\hat{\theta} + \mu)f''(0)/\sqrt{x}$, как было сделано в разделе 2.4.1, но можно этого не делать, ввиду того что мы считаем в ограниченной области, положив $u^*|_{\hat{\theta}=\hat{\theta}_{\max}} \sim (\hat{\theta}_{\max} + \mu)f''(0)/\sqrt{x}$, что мы и сделаем.

Введем сетку ω с шагами h_ξ , h_θ , h_t на области

$$\Omega = [-\xi_{\max}, \xi_{\max}] \times [0, \hat{\theta}_{\max}] \times [0, T_{\max}],$$

в которой мы будем искать решение:

$$\omega = \left\{ (i, j, k) : \xi_i = -\xi_{\max} + ih_\xi, \hat{\theta}_j = jh_\theta, t^k = kh_t, \right. \\ \left. i = 0, \dots, N; \quad j = 0, \dots, M; \quad k = 0, \dots, K; \right. \\ \left. N = 2\xi_{\max}/h_\xi, \quad M = \hat{\theta}_{\max}/h_\theta, \quad K = T_{\max}/h_t \right\}.$$

Введем сеточные функции: $\mu_i = \mu(\xi_i)$, $u_{i,j}^k = u^*(t^k, \xi_i, \hat{\theta}_j)$, $v_{i,j}^k = v^*(t^k, \xi_i, \hat{\theta}_j)$. Введем следующие обозначения:

$$\hat{\mu}_i \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mu_{i+1} - \mu_{i-1}}{2h_\xi}, \quad F \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f''(0)}{\sqrt{x}}, \quad \alpha_{i,j}^k \stackrel{\text{def}}{=} v_{i,j}^k - u_{i,j}^k \hat{\mu}_i,$$

и для любой сеточной функции $f_{i,j}^k$:

$$(f_{i,j}^k)^+ \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_{i,j}^k + |f_{i,j}^k|}{2}, \quad (f_{i,j}^k)^- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{f_{i,j}^k - |f_{i,j}^k|}{2}.$$

Тогда явная разностная схема для задачи (3.55), (3.51), (3.52) будет иметь вид

$$u_{i,j}^{k+1} = u_{i,j}^k - h_t \left((u_{i,j}^k)^+ \frac{u_{i,j}^k - u_{i-1,j}^k}{h_\xi} + (u_{i,j}^k)^- \frac{u_{i+1,j}^k - u_{i,j}^k}{h_\xi} + (\alpha_{i,j}^k)^+ \right. \\ \left. + \frac{u_{i,j}^k - u_{i,j-1}^k}{h_\xi} + (\alpha_{i,j}^k)^- \frac{u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k}{h_\theta} \right) + h_t F v_{i,M}^k + h_t \frac{u_{i,j+1}^k - 2u_{i,j}^k + u_{i,j-1}^k}{h_\theta^2},$$

$$u_{i,j}^0 = F \left(\hat{\theta}_j + \frac{\hat{\theta}_j}{\hat{\theta}_j + 1} \mu_i \right), \quad u_{i,0}^k = 0, \quad v_{i,0}^k = 0, \quad u_{i,M}^k = F(\mu_i + \hat{\theta}_M),$$

$$u_{0,j}^k = F \hat{\theta}_j, \quad u_{N,j}^k = u_{N-1,j}^k + h_\xi F \hat{\mu}_N,$$

а функция $v_{i,j}^k$ находится из интеграла (3.53) с помощью численного интегрирования методом трапеций, см. [96].

Легко показать, что построенная разностная схема удовлетворяет принципу максимума (см. [95]), и, следовательно, устойчива.

3.3.2 Результаты численного моделирования течения в тонком пограничном слое

Приведем результаты численного решения. Сначала рассмотрим задачу обтекания неровности типа горба (см. (3.4)). Функция, описывающая неровность имеет вид

$$\mu(\xi) = Ae^{-\xi^2/4}.$$

Характер течения в целом аналогичен задаче обтекания пластины с периодическими неровностями, рассмотренной в разделе 2, см. также работы [6; 7; 11]. Существует некоторая критическая амплитуда горба A^* , такая, что при $A < A^*$ течение ламинарное и стационарное, а при $A > A^*$ в течении начинают образовываться вихри, см. рис. 3.3. Также отметим, что полученные результаты сильно зависят от выбора начального условия, и в некоторых случаях может наблюдаться образование вихря на левой стенке горба и его движение вверх по течению.

В задаче обтекания угла (см. (3.2)) и ступеньки (см. (3.3)) наблюдается аналогичные результаты: при малом A ($A = \tan(\alpha)$) течение ламинарное (см. рис. 3.4 а)), а при больших — в потоке образуется вихрь, см. рис. 3.4 б) и рис. 3.5.

Можно проследить сходство между приведенными рисунками и фотографиями 38, 39 из [49].

Уравнение (3.14) (типа уравнения Рэлея) в погранслое Прандтля подробно исследовано в разделе 2.2, 2.3 для случая периодических неровностей и доказана его корректная разрешимость. В случае локализованных неровностей, рассматриваемых в этом разделе, ситуация та же.

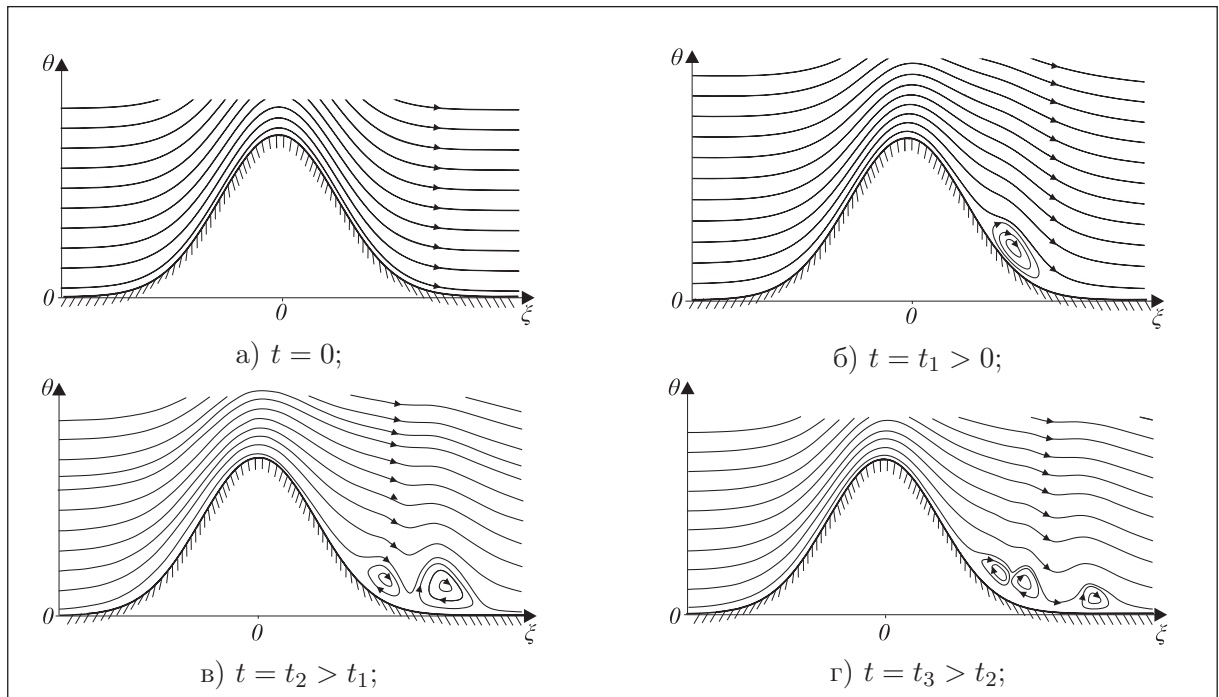
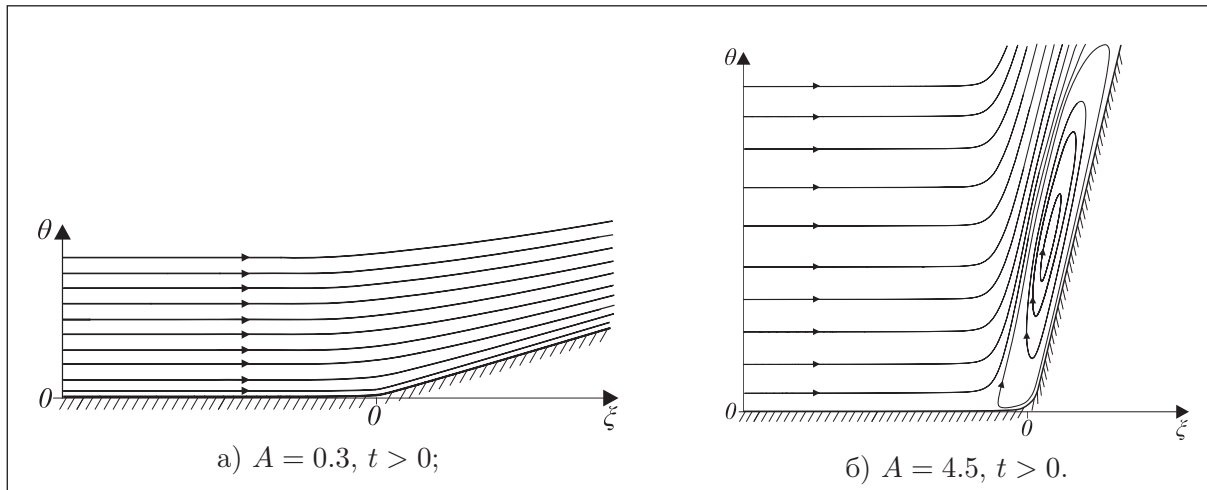
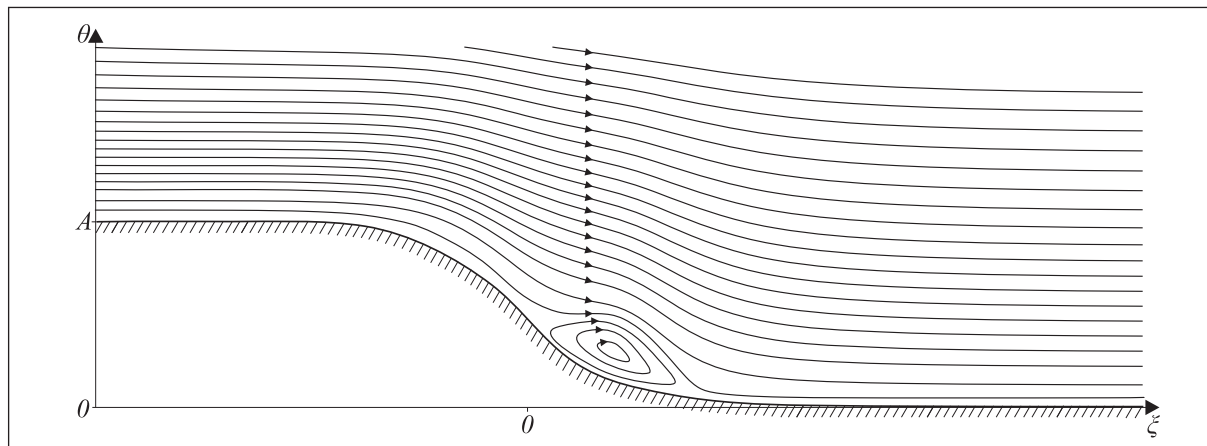


Рис. 3.3. Обтекание горба при $A = 4.0 > A^*$

Рис. 3.4. Обтекание угла при различных $A = \tan(\alpha)$ Рис. 3.5. Обтекание ступеньки $A = 4.5, t > 0$.

4. Задачи о течении жидкости внутри трубы и двумерного канала с малыми периодическими неровностями на стенках

4.1. Постановка задачи о течении в трубе с малыми периодическими неровностями на стенке

Мы рассматриваем течение вязкой несжимаемой жидкости в аксиально-симметричной трубе радиуса R_0 (см. рис. 4.1) с малыми периодическими неровностями на стенке при больших значениях числа Рейнольдса \mathbf{Re} . Для определенности, далее будем считать что координатная ось Oz совпадает с осью трубы (см. рис. 4.1) и сонаправлена с направлением основного течения — течения Пуазейля (см., например, [71]). Неровности на стенке описываются следующим равенством:

$$r_s = R_0 - \varepsilon^{4/5} \mu(z/\varepsilon^{2/5}), \quad (4.1)$$

где ε , как обычно, малый параметр, $\varepsilon = \mathbf{Re}^{-1/2}$, а функция $\mu(\xi)$ является 2π — периодичной, гладкой и имеющей нулевое среднее (в смысле Определения 2.1), т.е.

$$\int_0^{2\pi} \mu(\xi) d\xi = 0.$$

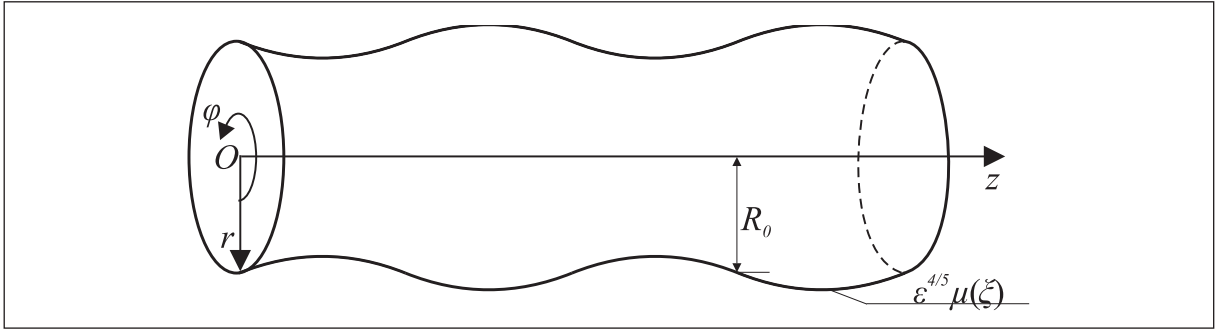


Рис. 4.1. Течение в аксиально-симметричной трубе

Данная задача описывается системой уравнений Навье–Стокса и неразрывности, которая в цилиндрических координатах (r, φ, z) с учетом аксиальной симметрии (т.е., вектор скорости $\mathbf{U} = (v, w, u)$ и давление p не зависят от угла φ) имеет следующий вид (см. [72]):

$$\begin{cases} v \frac{\partial v}{\partial r} + u \frac{\partial v}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial r} + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \right], \\ v \frac{\partial u}{\partial r} + u \frac{\partial u}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \varepsilon^2 \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right], \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Система уравнений (4.2) дополняется следующим граничным условием (условием прилипания к стенке):

$$\mathbf{U} \Big|_{r=r_s} = 0. \quad (4.3)$$

Далее используются обозначения, введенные в начале раздела 2: через $\tilde{g}(\cdot, \xi)$ обозначается осциллирующая часть функции $g(\cdot, \xi)$; через $\bar{g}(\cdot)$ — средняя; через $\int^\xi \cdot d\xi$ обозначается первообразная, не имеющая среднего, подробнее см. Определения 2.1 и 2.2.

4.2. Формальное асимптотическое решение задачи о течении в трубе

Введем новую переменную:

$$\rho = R_0 - r. \quad (4.4)$$

В переменных (z, ρ) равенство (4.1), описывающее стенку трубы, примет следующий вид: $\rho_s = \varepsilon^{4/5} \mu$, см. рис. 4.2.

Введем погранслойные переменные (характерный масштаб):

$$\theta = \frac{\rho}{\varepsilon^{4/5}}, \quad \tau = \frac{\rho}{\varepsilon^{2/5}}, \quad \xi = \frac{z}{\varepsilon^{2/5}}.$$

Мы будем искать решение задачи (4.2), (4.3) в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(z, \rho) &= u_0(\rho) + \sum_{i \geq 1} \varepsilon^{\frac{2(i+1)}{5}} \left(u_i^I(\xi, \theta) + u_i^{II}(\xi, \tau) + u_i^{III}(\xi, \rho) \right), \\ v(z, \rho) &= \sum_{i \geq 2} \varepsilon^{\frac{2(i+1)}{5}} \left(v_i^I(\xi, \theta) + v_i^{II}(\xi, \tau) + v_i^{III}(\xi, \rho) \right), \\ p(z, \rho) &= p_0 - \varepsilon^2 \hat{p}_0 z + \sum_{i \geq 1} \varepsilon^{\frac{2(i+1)}{5}} \left(p_i^I(\xi, \theta) + p_i^{II}(\xi, \tau) + p_i^{III}(\xi, \rho) \right), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $u_0(\rho)$ — профиль скорости Пуазейля (см., например, [71]):

$$u_0(\rho) = \hat{p}_0 \frac{R_0^2 - (R_0 - \rho)^2}{4}, \quad (4.6)$$

а p_0 и \hat{p}_0 — некоторые положительные постоянные.

Отметим, что мы пренебрегаем зависимостью от переменной z в поправках к скоростям и давлению в разложении (4.5). Вообще говоря, эти поправки теоретически могут зависеть от z , однако в нашем случае ($\mu = \mu(\xi)$) это предположение не подтвердилось, и чтобы не усложнять дальнейшее изложение, мы эту зависимость опускаем сразу.

Наше решение также имеет двухпалубную структуру, состоящую из тонкого пристеночного слоя («нижней палубы»), толстого пограничного слоя («верхней палубы») и области внешнего невозмущенного течения (в нашем случае — течения Пуазейля). Как и раньше, верхний индекс у функций в разложении (4.5) обозначает номер палубы, в которой они определены: функции с верхним индексом I определены в тонком пристеночном слое, функции с верхним индексом II — в толстом пограничном слое, а функции с верхним индексом III определены в области внешнего течения. Все функции, зависящие от ξ являются 2π -периодическими.

Функции с верхними индексами I и II мы будем называть погранслоевыми функциями в смысле Определения 2.3 из раздела 2. Справедлива следующая теорема.

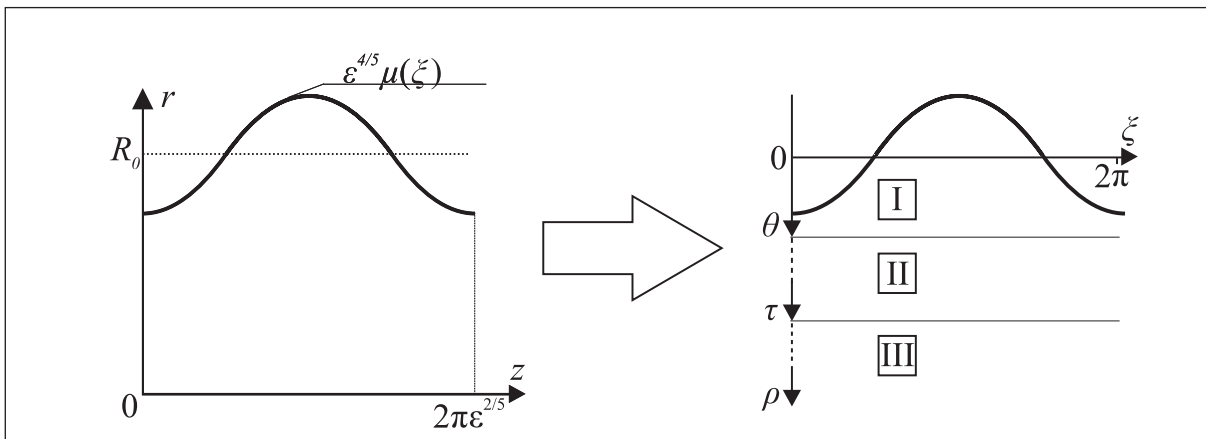


Рис. 4.2. Двухпалубная структура и замена координат, $r = R_0$ — уравнение границы невозмущенной трубы

Теорема 4.1*. *Формальное асимптотическое решение задачи (4.2), (4.3) имеет следующий вид:*

$$\begin{aligned} u(z, \rho) &= u_0(\rho) + \varepsilon^{4/5}(u_1^I(\xi, \theta) + \bar{u}_1^{III}) + \varepsilon^{6/5}(u_2^I(\xi, \theta) + \tilde{u}_2^{II}(\xi, \tau) + \bar{u}_2^{III}) + \mathcal{O}(\varepsilon^{8/5}), \\ v(z, \rho) &= \varepsilon^{6/5}(\tilde{v}_2^I(\xi, \theta) + \tilde{v}_2^{II}(\xi, \tau)) + \mathcal{O}(\varepsilon^{8/5}), \\ p(z, \rho) &= p_0 + \varepsilon^2 p_{01} z + \varepsilon^{8/5} \tilde{p}_3^{II}(\xi, \tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^{12/5}), \end{aligned} \quad (4.7)$$

где $\theta = \rho/\varepsilon^{4/5}$, $\tau = \rho/\varepsilon^{2/5}$, $\xi = z/\varepsilon^{2/5}$, $\rho = R_0 - r$, а $u_0(\rho)$ — скорость Пуазейля (с.м. (4.6)).

Функции

$$u_1^* = u_1^I + \bar{u}_1^{III} + \theta u_0'(0), \quad v_2^* = \tilde{v}_2^I + \tilde{v}_2^{II} \Big|_{\tau=0} \quad (4.8)$$

являются решением краевой задачи (системы уравнений Прандтля с индуцированным давлением)

$$\begin{cases} u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - v_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} = -\frac{\partial \tilde{p}_3}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial v_2^*}{\partial \theta} = 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} u_1^* \Big|_{\theta=\mu} &= \mu u_0'(0), \quad v_2^* \Big|_{\theta=\mu} = 0, \quad u_1^* \Big|_{\xi} = u_1^* \Big|_{\xi+2\pi}, \quad v_2^* \Big|_{\xi} = v_2^* \Big|_{\xi+2\pi}, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} &\rightarrow \frac{du_0}{d\rho} \Big|_{\rho=0}, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Функция \tilde{v}_2^{II} является решением задачи Дирихле для оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{II}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{II}}{\partial \xi^2} = 0, \quad (4.11)$$

$$\tilde{v}_2^{II} \Big|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \tilde{v}_2^{II} \Big|_{\xi} = \tilde{v}_2^{II} \Big|_{\xi+2\pi}, \quad \tilde{v}_2^{II} \Big|_{\tau=0} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^*, \quad (4.12)$$

а функция \tilde{u}_2^{II} имеет следующий вид:

$$\tilde{u}_2^{II} = \int_{\tau}^{\xi} \frac{\partial \tilde{v}_2^{II}}{\partial \tau} d\xi. \quad (4.13)$$

Функция $\tilde{p}_3^{II}(\xi, \tau)$ имеет вид

$$\tilde{p}_3^{II} = \frac{du_0}{d\rho} \Big|_{\rho=0} \left[\int_{\tau}^{\xi} \tilde{v}_2^{II} d\xi - \tau \int_{\tau}^{\xi} \frac{\partial \tilde{v}_2^{II}}{\partial \tau} d\xi \right]. \quad (4.14)$$

Функция \bar{u}_1^{III} является константой и находится из следующего равенства:

$$\bar{u}_1^{III} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} (\bar{u}_1^* - \theta u_0'(0)). \quad (4.15)$$

* См. Замечание 2.1.

Замечание 4.1. Если сделать замену вертикальной переменной, выравнивающую границу $\hat{\rho} = r_s - r$, то асимптотическое решение (4.7) примет следующий вид:

$$\begin{aligned} u &= u_0(\hat{\rho}) + \varepsilon^{4/5} \left(u_1^I(\xi, \hat{\theta}) + \bar{u}_1^{\text{III}} + \mu \frac{du_0}{d\hat{\rho}} \right) + \varepsilon^{6/5} \left(u_2^I(\xi, \hat{\theta}) + \tilde{u}_2^{\text{II}}(\xi, \hat{\tau}) + \bar{u}_2^{\text{III}} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{8/5}), \\ v &= \varepsilon^{6/5} \left(\tilde{v}_2^I(\xi, \hat{\theta}) + \tilde{v}_2^{\text{II}}(\xi, \hat{\tau}) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{8/5}), \\ p &= p_0 + \varepsilon^2 p_{01} z + \varepsilon^{8/5} \tilde{p}_3^{\text{II}}(\xi, \hat{\tau}) + \mathcal{O}(\varepsilon^{12/5}), \end{aligned}$$

где $\hat{\theta} = \hat{\rho}/\varepsilon^{4/5}$, $\hat{\tau} = \hat{\rho}/\varepsilon^{2/5}$. Краевая задача (4.9), (4.10) примет следующий вид:

$$\begin{cases} u_1^* \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{d\mu}{d\xi} \frac{\partial u_1^*}{\partial \hat{\theta}} \right) - v_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \hat{\theta}} = - \frac{\partial \tilde{p}_3}{\partial \xi} \Big|_{\hat{\tau}=0} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \hat{\theta}^2}, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{d\mu}{d\xi} \frac{\partial u_1^*}{\partial \hat{\theta}} - \frac{\partial v_2^*}{\partial \hat{\theta}} = 0, \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\begin{aligned} u_1^* \Big|_{\hat{\theta}=0} = v_2^* \Big|_{\hat{\theta}=0} = 0, \quad u_1^* \Big|_{\xi} = u_1^* \Big|_{\xi+2\pi}, \quad v_2^* \Big|_{\xi} = v_2^* \Big|_{\xi+2\pi}, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \hat{\theta}} \Big|_{\hat{\theta} \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{du_0}{d\hat{\rho}} \Big|_{\hat{\rho}=0}, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\hat{\theta} \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{d\mu}{d\xi} \frac{du_0}{d\hat{\rho}} \Big|_{\hat{\rho}=0}. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Краевая задача (4.11), (4.12) и выражение для давления (4.14) не изменят свой вид, а равенство (4.15) примет вид

$$\bar{u}_1^{\text{III}} = \lim_{\hat{\theta} \rightarrow \infty} (\bar{u}_1^* - (\hat{\theta} + \mu)u_0'(0)).$$

Для доказательства Теоремы 4.1 нам потребуются следующие Леммы (аналоги Лемм 2.1–2.3 из раздела 2.1).

Лемма 4.1. Пусть функции $f^I(\xi, \theta)$, $g^{\text{II}}(\xi, \tau)$ — погранслойные функции (в смысле Определения 2.3). Тогда справедливо следующее асимптотическое разложение:

$$f^I(\xi, \theta)g^{\text{II}}(\xi, \tau) = g^{\text{II}} \Big|_{\tau=0} f^I + \varepsilon^{2/5} \theta \frac{\partial g^{\text{II}}}{\partial \tau} \Big|_{\tau=0} f^I + \varepsilon^{4/5} \frac{\theta^2}{2} \frac{\partial^2 g^{\text{II}}}{\partial \tau^2} \Big|_{\tau=0} f^I + \mathcal{O}(\varepsilon^{6/5}). \quad (4.18)$$

Лемма 4.2. Асимптотическое разложение произведения функций $h^{\text{III}}(\xi, \rho)f^I(\xi, \theta)$ имеет следующий вид:

$$h^{\text{III}}(\xi, \rho)f^I(\xi, \theta) = h^{\text{III}} \Big|_{\rho=0} f^I + \varepsilon^{4/5} \theta \frac{\partial h^{\text{III}}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} f^I + \varepsilon^{8/5} \frac{\theta^2}{2} \frac{\partial^2 h^{\text{III}}}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=0} f^I + \mathcal{O}(\varepsilon^{12/5}), \quad (4.19)$$

где функция $f^I(\xi, \theta)$ — погранслойная функция в смысле Определения 2.3.

Лемма 4.3. Асимптотическое разложение произведения функций $h^{\text{III}}(\xi, \rho)g^{\text{II}}(\xi, \tau)$ имеет следующий вид:

$$h^{\text{III}}(\xi, \rho)g^{\text{II}}(\xi, \tau) = h^{\text{III}} \Big|_{\rho=0} g^{\text{II}} + \varepsilon^{2/5} \tau \frac{\partial h^{\text{III}}}{\partial \rho} \Big|_{\rho=0} g^{\text{II}} + \varepsilon^{4/5} \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 h^{\text{III}}}{\partial \rho^2} \Big|_{\rho=0} g^{\text{II}} + \mathcal{O}(\varepsilon^{6/5}). \quad (4.20)$$

где функция $g^{\text{II}}(\xi, \tau)$ — погранслойная функция в смысле Определения 2.3.

Доказательство приведенных Лемм 4.1–4.3 очевидно и не будет приводиться здесь подробно. Теперь перейдем к доказательству Теоремы 4.1.

Доказательство Теоремы 4.1. Мы будем искать решение около стенки в виде разложения (4.5).

1. Функции, описывающие течение в области вне пограслоев (III).

Подставляя u , v и p из разложения (4.5) в систему уравнений (4.2), полагая $\tau \rightarrow \infty$ и $\theta \rightarrow \infty$, собирая коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра ε и приравнивая их к нулю, мы получим уравнения на функции, описывающее течение в области вне пограничных слоев.

При $\varepsilon^{2/5}$ имеем следующую систему уравнений:

$$\frac{\partial p_1^{\text{III}}}{\partial \xi} + u_0 \frac{\partial u_1^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u_1^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0. \quad (4.21)$$

Из (4.21) следует, что $\tilde{u}_1^{\text{III}} = 0$ и $\tilde{p}_1^{\text{III}} = 0$ (см. утверждение 3 из (2.9)).

При $\varepsilon^{4/5}$ имеем

$$-\frac{\partial \bar{p}_1^{\text{III}}}{\partial \rho} + u_0 \frac{\partial v_2^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial p_2^{\text{III}}}{\partial \xi} + u_0 \frac{\partial u_2^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u_2^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0. \quad (4.22)$$

Осредняя (в смысле Определения 2.1) первое уравнение в системе (4.22), получаем

$$-\frac{\partial \bar{p}_1^{\text{III}}}{\partial \rho} = 0.$$

Следовательно $\bar{p}_1^{\text{III}} = \text{const}$, и без ограничения общности можно положить $\bar{p}_1^{\text{III}} = 0$. В итоге, из (4.22) получаем $\tilde{v}_2^{\text{III}} = 0$, $\tilde{p}_2^{\text{III}} = 0$, и $\tilde{u}_2^{\text{III}} = 0$.

Рассматривая коэффициенты при $\varepsilon^{6/5}$ и используя ранее полученные результаты, получаем следующую систему уравнений:

$$-\frac{\partial \bar{p}_2^{\text{III}}}{\partial \rho} + u_0 \frac{\partial v_3^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad u_0 \frac{\partial u_3^{\text{III}}}{\partial \xi} - \bar{v}_2^{\text{III}} \frac{du_0}{d\rho} + \frac{\partial p_3^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u_3^{\text{III}}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{v}_2^{\text{III}}}{\partial \rho} + \frac{\bar{v}_2^{\text{III}}}{R_0 - \rho} = 0. \quad (4.23)$$

Осредняя каждое уравнение в (4.23), мы получаем следующую систему уравнений:

$$-\frac{\partial \bar{p}_2^{\text{III}}}{\partial \rho} = 0, \quad -\bar{v}_2^{\text{III}} \frac{du_0}{d\rho} = 0, \quad -\frac{\partial \bar{v}_2^{\text{III}}}{\partial \rho} + \frac{\bar{v}_2^{\text{III}}}{R_0 - \rho} = 0. \quad (4.24)$$

Из второго уравнения системы (4.24) следует, что $\bar{v}_2^{\text{III}} = 0$ (т.к. $\frac{du_0}{d\rho} \neq 0$ из постановки задачи, см. (4.6)). Из первого уравнения системы (4.24) получаем, что $\bar{p}_2^{\text{III}} = \text{const}$ и, аналогично, без ограничения общности мы можем положить $\bar{p}_2^{\text{III}} = 0$. Следовательно, осциллирующая часть системы (4.23) имеет следующий вид:

$$u_0 \frac{\partial v_3^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad u_0 \frac{\partial u_3^{\text{III}}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_3^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u_3^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0,$$

откуда следует, что $\tilde{u}_3^{\text{III}} = 0$, $\tilde{v}_3^{\text{III}} = 0$, и $\tilde{p}_3^{\text{III}} = 0$.

При $\varepsilon^{8/5}$, мы получаем систему, похожую на (4.23):

$$-\frac{\partial \bar{p}_3^{\text{III}}}{\partial \rho} + u_0 \frac{\partial v_4^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad u_0 \frac{\partial u_4^{\text{III}}}{\partial \xi} - \bar{v}_3^{\text{III}} \frac{du_0}{d\rho} + \frac{\partial p_4^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u_4^{\text{III}}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{v}_3^{\text{III}}}{\partial \rho} + \frac{\bar{v}_3^{\text{III}}}{R_0 - \rho} = 0. \quad (4.25)$$

Продельвая преобразования по аналогии с системой (4.23), мы получаем, что $\bar{v}_3^{\text{III}} = 0$, $\bar{p}_3^{\text{III}} = 0$, $\tilde{u}_4^{\text{III}} = 0$, $\tilde{v}_4^{\text{III}} = 0$, и $\tilde{p}_4^{\text{III}} = 0$.

При ε^2 , мы имеем

$$\begin{cases} -\frac{\partial \bar{p}_4^{\text{III}}}{\partial \rho} + u_0 \frac{\partial v_5^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \\ u_0 \frac{\partial u_5^{\text{III}}}{\partial \xi} - \bar{v}_4^{\text{III}} \frac{du_0}{d\rho} + \frac{\partial p_5^{\text{III}}}{\partial \xi} - p_{01} + \frac{1}{R_0 - \rho} \frac{du_0}{d\rho} - \frac{d^2 u_0}{d\rho^2} = 0, \\ \frac{\partial u_5^{\text{III}}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{v}_4^{\text{III}}}{\partial \rho} + \frac{\bar{v}_4^{\text{III}}}{R_0 - \rho} = 0. \end{cases} \quad (4.26)$$

Используя явный вид функции $u_0(\rho)$ (см. (4.6)) легко получаем, что

$$-p_{01} + \frac{1}{R_0 - \rho} \frac{du_0}{d\rho} - \frac{d^2 u_0}{d\rho^2} = 0.$$

Следовательно, система (4.26) подобна системам (4.25) и (4.23). Действуя по аналогии, получаем $\bar{v}_4^{\text{III}} = 0$, $\bar{p}_4^{\text{III}} = 0$, $\tilde{u}_5^{\text{III}} = 0$, $\tilde{v}_5^{\text{III}} = 0$, и $\tilde{p}_5^{\text{III}} = 0$.

При $\varepsilon^{12/5}$, мы опять получаем систему, подобную (4.23)–(4.26):

$$-\frac{\partial \bar{p}_5^{\text{III}}}{\partial \rho} + u_0 \frac{\partial v_6^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad u_0 \frac{\partial u_6^{\text{III}}}{\partial \xi} - \bar{v}_5^{\text{III}} \frac{du_0}{d\rho} + \frac{\partial p_6^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u_6^{\text{III}}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{v}_5^{\text{III}}}{\partial \rho} + \frac{\bar{v}_5^{\text{III}}}{R_0 - \rho} = 0. \quad (4.27)$$

Аналогично получаем $\bar{v}_5^{\text{III}} = 0$, $\bar{p}_5^{\text{III}} = 0$, $\tilde{u}_6^{\text{III}} = 0$, $\tilde{v}_6^{\text{III}} = 0$, и $\tilde{p}_6^{\text{III}} = 0$.

При $\varepsilon^{14/5}$ мы имеем

$$\begin{cases} -\frac{\partial \bar{p}_6^{\text{III}}}{\partial \rho} + u_0 \frac{\partial v_7^{\text{III}}}{\partial \xi} = 0, \\ u_0 \frac{\partial u_7^{\text{III}}}{\partial \xi} - \bar{v}_6^{\text{III}} \frac{du_0}{d\rho} + \frac{\partial p_7^{\text{III}}}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \bar{u}_1^{\text{III}}}{\partial \rho^2} - \frac{\partial \bar{u}_1^{\text{III}}}{\partial \rho} \frac{1}{R_0 - \rho}, \\ \frac{\partial u_7^{\text{III}}}{\partial \xi} - \frac{\partial \bar{v}_6^{\text{III}}}{\partial \rho} + \frac{\bar{v}_6^{\text{III}}}{R_0 - \rho} = 0 \end{cases} \quad (4.28)$$

с граничным условием $\bar{v}_6^{\text{III}}(0) = 0$, см. подробнее (4.60) в пункте 4 данного доказательства. Осреднение последнего уравнения системы (4.28) дает

$$\frac{\partial \bar{v}_6^{\text{III}}}{\partial \rho} - \frac{\bar{v}_6^{\text{III}}}{R_0 - \rho} = 0.$$

Решением этого уравнения является функция $\bar{v}_6^{\text{III}} = C/(R_0 - \rho)$, где $C = \text{const}$. Из граничного условия следует, что $C = 0$, т.е. $\bar{v}_6^{\text{III}} \equiv 0$. Осредняя первое уравнение системы (4.28), мы получаем $\bar{p}_6^{\text{III}} = \text{const}$, и без ограничения общности мы можем положить $\bar{p}_6^{\text{III}} = 0$. Осреднение второго уравнения системы (4.28) приводит к следующему уравнению на функцию \bar{u}_1^{III} :

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1^{\text{III}}}{\partial \rho^2} - \frac{\partial \bar{u}_1^{\text{III}}}{\partial \rho} \frac{1}{R_0 - \rho} = 0.$$

Его решением является следующая функция:

$$\bar{u}_1^{\text{III}} = -C_1 \ln(R_0 - \rho) + C_2,$$

где C_1 и C_2 — некоторые константы. Очевидно, что функция \bar{u}_1^{III} должна быть ограничена при $\rho = R_0$, следовательно, $C_1 = 0$. В итоге, получаем

$$\bar{u}_1^{\text{III}} = C_2, \quad (4.29)$$

где неизвестная постоянная C_2 определена ниже, см. (4.59) в пункте 4 данного доказательства.

2. Функции, описывающие течение в толстом погранслое (II).

Подставляя u , v , и p из разложения (4.5) в систему уравнений (4.2), полагая $\theta \rightarrow \infty$, используя результаты, полученные в пункте 1 настоящего доказательства, а также используя Лемму 4.3, собирая коэффициенты при различных степенях малого параметра ε и приравнивая их у нулю, мы получаем уравнения на функции, описывающие течение в толстом пограничном слое (на «верхней палубе»).

При $\varepsilon^{2/5}$ мы имеем следующую систему

$$-\frac{\partial p_1^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial u_1^{\text{II}}}{\partial \xi} = 0. \quad (4.30)$$

Следовательно, $\tilde{u}_1^{\text{II}} = 0$ и $p_1^{\text{II}} = 0$ (т.к., согласно Определению 2.3, для любой погранслоевой функции g_i^{II} на бесконечности должно выполняться условие $g_i^{\text{II}}|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, т.е. в данном случае — $p_1^{\text{II}}|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0$).

При $\varepsilon^{4/5}$ мы имеем

$$-\frac{\partial p_2^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial u_2^{\text{II}}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_2^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0. \quad (4.31)$$

Из первого уравнения системы (4.31), опять же в силу Определения 2.3, получаем, что $p_2^{\text{II}} = 0$. Осреднение последнего уравнения системы (4.31) дает

$$\frac{\partial \bar{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0. \quad (4.32)$$

Следовательно, $\bar{v}_2^{\text{II}} = 0$, и

$$\frac{\partial u_2^{\text{II}}}{\partial \xi} = \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau}. \quad (4.33)$$

При $\varepsilon^{6/5}$ мы получаем следующую систему:

$$u_0^\dagger \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \xi} - \frac{\partial p_3^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0, \quad -\tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{du_0^\dagger}{d\tau} + u_0^\dagger \frac{\partial u_2^{\text{II}}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_3^{\text{II}}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial u_3^{\text{II}}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_3^{\text{II}}}{\partial \tau} + \frac{\tilde{v}_2^{\text{II}}}{R_0} = 0. \quad (4.34)$$

где

$$u_0^\dagger(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \tau u_0'(0). \quad (4.35)$$

Осредняя каждое уравнение системы (4.34), имеем

$$\frac{\partial \bar{p}_3^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial \bar{v}_3^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0.$$

Следовательно, $\bar{v}_3^{\text{II}} = 0$ и $\bar{p}_3^{\text{II}} = 0$.

Подставляя (4.33) в осциллирующую часть системы (4.34), мы получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} u_0^\dagger \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \xi} - \frac{\partial \tilde{p}_3^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0, \\ -\tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{du_0^\dagger}{d\tau} + u_0^\dagger \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{p}_3^{\text{II}}}{\partial \xi} = 0, \end{cases} \quad (4.36)$$

Продифференцировав последнее уравнение системы (4.36) по ξ , а первое — по τ , получаем

$$\begin{cases} u_0^\dagger \frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \tilde{p}_3^{\text{II}}}{\partial \xi \partial \tau} = 0, \\ -\frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} \frac{du_0^\dagger}{d\tau} - \tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{d^2 u_0^\dagger}{d\tau^2} + \frac{du_0^\dagger}{d\tau} \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} + u_0^\dagger \frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \tilde{p}_3^{\text{II}}}{\partial \tau \partial \xi} = 0, \end{cases} \quad (4.37)$$

Учитывая, что $d^2 u_0^\dagger / d\tau^2 = 0$, сложив уравнения системы (4.37), получаем уравнение на функцию \tilde{v}_2^{II} :

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \xi^2} = 0. \quad (4.38)$$

Из второго уравнения системы (4.36) получаем выражение для давления:

$$\frac{\partial \tilde{p}_3^{\text{II}}}{\partial \xi} = \tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{du_0^\dagger}{d\tau} - u_0^\dagger \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau},$$

следовательно, учитывая (4.35), имеем

$$\tilde{p}_3^{\text{II}} = u_0^\dagger(0) \left[\int^\xi \tilde{v}_2^{\text{II}} d\xi - \tau \int^\xi \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} d\xi \right], \quad (4.39)$$

где \int^ξ обозначает первообразную, не имеющую среднее, см. Определение 2.2.

При $\varepsilon^{8/5}$ мы имеем

$$\begin{cases} u_0^\dagger \frac{\partial \tilde{v}_3^{\text{II}}}{\partial \xi} + u_1^\dagger \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \xi} - \frac{\partial p_4^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0, \\ -\tilde{v}_3^{\text{II}} \frac{du_0^\dagger}{d\tau} - \tilde{v}_2^{\text{II}} \frac{du_1^\dagger}{d\tau} + u_0^\dagger \frac{\partial u_3^{\text{II}}}{\partial \xi} + u_1^\dagger \frac{\partial u_2^{\text{II}}}{\partial \xi} + \frac{\partial p_4^{\text{II}}}{\partial \xi} = 0, \\ \frac{\partial u_4^{\text{II}}}{\partial \xi} - \frac{\partial v_4^{\text{II}}}{\partial \tau} + \frac{\tilde{v}_3^{\text{II}}}{R_0} + \frac{\tau \tilde{v}_2^{\text{II}}}{R_0^2} = 0. \end{cases} \quad (4.40)$$

где

$$u_1^\dagger(\tau) \stackrel{\text{def}}{=} \tau^2 u_0''(0)/2 + \bar{u}_1^{\text{II}} + \bar{u}_1^{\text{III}}(0). \quad (4.41)$$

Осредняя каждое уравнение системы (4.40), получаем $\frac{\partial \bar{p}_4^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0$, $\frac{\partial \bar{v}_4^{\text{II}}}{\partial \tau} = 0$. Следовательно, $\bar{v}_4^{\text{II}} = 0$ и $\bar{p}_4^{\text{II}} = 0$.

При ε^2 мы получаем систему

$$\begin{cases} u_0^\dagger \frac{\partial \tilde{v}_4^\Pi}{\partial \xi} + u_1^\dagger \frac{\partial \tilde{v}_3^\Pi}{\partial \xi} + u_2^\dagger \frac{\partial \tilde{v}_2^\Pi}{\partial \xi} - \frac{\partial p_5^\Pi}{\partial \tau} - \tilde{v}_2^\Pi \frac{\partial \tilde{v}_2^\Pi}{\partial \tau} = 0, \\ -\tilde{v}_4^\Pi \frac{du_0^\dagger}{d\tau} - \tilde{v}_3^\Pi \frac{du_1^\dagger}{d\tau} - \tilde{v}_2^\Pi \frac{\partial u_2^\dagger}{\partial \tau} + u_0^\dagger \frac{\partial u_4^\Pi}{\partial \xi} + u_1^\dagger \frac{\partial u_3^\Pi}{\partial \xi} + u_2^\dagger \frac{\partial u_2^\Pi}{\partial \xi} + \frac{\partial p_5^\Pi}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \bar{u}_1^\Pi}{\partial \tau^2}, \\ \frac{\partial u_5^\Pi}{\partial \xi} - \frac{\partial v_5^\Pi}{\partial \tau} + \frac{\tilde{v}_4^\Pi}{R_0} + \frac{\tau \tilde{v}_3^\Pi}{R_0^2} + \frac{\tau^2 \tilde{v}_2^\Pi}{R_0^3} = 0, \end{cases} \quad (4.42)$$

где

$$u_2^\dagger(\xi, \tau) \stackrel{\text{def}}{=} u_2^\Pi + \bar{u}_2^\Pi(0). \quad (4.43)$$

Осреднение каждого уравнения системы (4.42) дает

$$\frac{\partial^2 \bar{u}_1^\Pi}{\partial \tau^2} = 0, \quad \frac{\partial \bar{v}_5^\Pi}{\partial \tau} = 0.$$

Следовательно, $\bar{v}_5^\Pi = 0$ и $\bar{u}_1^\Pi = C_3\tau + C_4$. Из Определения погранслоевой функции 2.3 имеем $\bar{u}_1^\Pi|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, откуда следует, что $C_3 = C_4 = 0$, и, следовательно, $\bar{u}_1^\Pi = 0$.

При $\varepsilon^{12/5}$ из уравнения неразрывности мы имеем

$$\frac{\partial u_6^\Pi}{\partial \xi} - \frac{\partial v_6^\Pi}{\partial \tau} + \frac{\tilde{v}_5^\Pi}{R_0} + \frac{\tau \tilde{v}_4^\Pi}{R_0^2} + \frac{\tau^2 \tilde{v}_3^\Pi}{R_0^3} + \frac{\tau^3 \tilde{v}_2^\Pi}{R_0^4} = 0,$$

откуда, после осреднения, получаем $\bar{v}_6^\Pi = 0$.

3. Функции, описывающие течение в тонком погранслое (I).

Подставляя u , v и p из разложений (4.5) в систему уравнений (4.2), учитывая результаты, полученные в пунктах 1 и 2 настоящего доказательства, а также применяя Леммы 4.1 и 4.2, собирая коэффициенты при различных степенях малого параметра ε , и приравнявая их к нулю, мы получаем последовательность систем уравнений на функции, описывающие течение в тонком пограничном слое («нижней палубе»).

При ε^0 имеем

$$\frac{\partial p_1^I}{\partial \theta} = 0. \quad (4.44)$$

Следовательно, $p_1^I = 0$, т.к. согласно Определению 2.3 для любой погранслоевой функции f_i^I на бесконечности должно выполняться условие $f_i^I|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow 0$, т.е. в данном случае $-p_1^I|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow 0$.

При $\varepsilon^{2/5}$ получаем систему уравнений

$$\frac{\partial p_2^I}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial u_1^I}{\partial \xi} - \frac{\partial v_2^I}{\partial \theta} = 0. \quad (4.45)$$

Аналогично, $p_2^I = 0$. Осреднение второго уравнения дает

$$\frac{\partial \bar{v}_2^I}{\partial \theta} = 0,$$

и, аналогично в силу Определения 2.3, получаем, что $\bar{v}_2^I = 0$.

При $\varepsilon^{4/5}$ имеем

$$\frac{\partial p_3^I}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial u_2^I}{\partial \xi} - \frac{\partial v_3^I}{\partial \theta} = 0. \quad (4.46)$$

Из первого уравнения и Определения 2.3 следует, что $p_3^I = 0$. Осреднение второго уравнения дает

$$\frac{\partial \bar{v}_3^I}{\partial \theta} = 0,$$

и, аналогично в силу Определения 2.3, получаем, что $\bar{v}_3^I = 0$.

При $\varepsilon^{6/5}$ получаем следующую систему:

$$\begin{cases} -\frac{\partial p_4^I}{\partial \theta} = 0, \\ \theta u_0'(0) \frac{\partial u_1^I}{\partial \xi} + (u_1^I + \bar{u}_1^{\text{III}}) \frac{\partial u_1^I}{\partial \xi} - (\tilde{v}_2^I + \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau=0}) \frac{\partial u_1^I}{\partial \theta} - \tilde{v}_2^I u_0'(0) - \frac{\partial^2 u_1^I}{\partial \theta^2} = 0, \\ \frac{\partial u_3^I}{\partial \xi} - \frac{\partial v_4^I}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}_2^I}{R_0} = 0. \end{cases} \quad (4.47)$$

Аналогично, из первого уравнения следует $p_4^I = 0$, а осреднение второго уравнения дает $\bar{v}_4^I = 0$.

Из (4.39) мы имеем

$$\tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau=0} u_0'(0) = \frac{\partial \tilde{p}_3}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0}. \quad (4.48)$$

Подставляя (4.48) во второе уравнения в системе (4.47), упрощая его, получаем

$$(u_1^I + \theta u_0'(0) + \bar{u}_1^{\text{III}}) \frac{\partial u_1^I}{\partial \xi} - (v_2^I + \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau=0}) \left(\frac{\partial u_1^I}{\partial \theta} + u_0'(0) \right) + \frac{\partial \tilde{p}_3}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} - \frac{\partial^2 u_1^I}{\partial \theta^2} = 0, \quad (4.49)$$

Введем новые функции:

$$u_1^* \stackrel{\text{def}}{=} u_1^I + \theta u_0'(0) + \bar{u}_1^{\text{III}}, \quad (4.50)$$

$$v_2^* \stackrel{\text{def}}{=} v_2^I + \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau=0}. \quad (4.51)$$

В итоге, из второго уравнения системы (4.45) и уравнения (4.49) получаем следующую систему уравнений на функции u_1^* , v_2^* .

$$\begin{cases} u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - v_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} = -\frac{\partial \tilde{p}_3}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial v_2^*}{\partial \theta} = 0. \end{cases} \quad (4.52)$$

При $\varepsilon^{8/5}$ из уравнения неразрывности имеем

$$\frac{\partial u_4^I}{\partial \xi} - \frac{\partial v_5^I}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}_3^I}{R_0} = 0.$$

После осреднения, получаем $\bar{v}_5^I = 0$. Аналогично, из уравнения неразрывности при ε^2 имеем $\frac{\partial u_5^I}{\partial \xi} - \frac{\partial v_6^I}{\partial \theta} + \frac{\tilde{v}_2^I \theta}{R_0^2} = 0$, и после осреднения получаем $\bar{v}_6^I = 0$.

4. Граничные условия.

Из Определения функции пограничного слоя 2.3 получаем граничное условие на функцию \tilde{v}_2^{II} :

$$\tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (4.53)$$

а также условие периодичности по ξ :

$$\tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\xi} = \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\xi+2\pi}. \quad (4.54)$$

Пусть $\theta \rightarrow \infty$ в (4.51). Тогда имеем

$$\tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau=0} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^* \quad (4.55)$$

(т.к. $v_2^{\text{I}}|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ в силу Определения 2.3).

Подставляя разложение для (4.5) u и v в граничное условие (4.3) и используя все полученные выше результаты, при $\varepsilon^{4/5}$ получаем

$$u_1^*|_{\theta=\mu} = \underbrace{u_1^{\text{I}}|_{\theta=\mu} + \bar{u}_1^{\text{III}}}_{=0, \text{ см. (4.3)}} + \mu u_0'(0) = \mu u_0'(0), \quad (4.56)$$

а при $\varepsilon^{6/5}$

$$v_2^*|_{\theta=\mu} = \tilde{v}_2^{\text{I}}|_{\theta=\mu} + \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau=0} = 0. \quad (4.57)$$

Продифференцировав выражение (4.50) по θ и по ξ , переходя к пределу при $\theta \rightarrow \infty$, получаем следующие краевые условия на функцию u_1^* :

$$\frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow u_0'(0), \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \quad (4.58)$$

Переходя к пределу в выражении (4.50) при $\theta \rightarrow \infty$, учитывая, что $u_1^{\text{I}}|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow 0$ (см. Определение 2.3), получаем выражение для определения функции \bar{u}_1^{III} :

$$\bar{u}_1^{\text{III}} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} (\bar{u}_1^* - \theta u_0'(0)). \quad (4.59)$$

Из граничного условия (4.3) при $\varepsilon^{14/5}$ следует, что $\tilde{v}_6^{\text{I}}|_{\theta=\mu} + \tilde{v}_6^{\text{II}}|_{\tau=0} + \bar{v}_6^{\text{III}}|_{\rho=0} = 0$. Осредняя, получаем

$$\bar{v}_6^{\text{III}}|_{\rho=0} = 0. \quad (4.60)$$

Теорема 4.1 доказана. □

Решение системы уравнений тонкого пограничного слоя (4.9) в пристеночной области могут быть получены как решение соответствующей нестационарной задачи на больших временах (т.е. методом установления). Если это решение стабилизируется на больших временах (т.е. при большом числе итераций), это означает что система уравнений (4.9) имеет стационарное решение и мы его нашли. Однако, формально, этот метод означает, что мы рассматриваем нестационарную задачу (4.2). Если решение задачи (4.9) не выходит на стационар на больших временах, то необходимо изначально рассматривать нестационарную задачу, и выбирать масштаб по времени

так, чтобы слагаемое $\partial u_1^*/\partial t$ в системе уравнений тонкого пограничного слоя (4.9) имело порядок 1. Легко показать, что такая задача имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \varepsilon^{2/5} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \langle \mathbf{U}, \nabla \rangle \mathbf{U} = -\nabla p + \varepsilon^2 \Delta \mathbf{U}, \\ \langle \nabla, \mathbf{U} \rangle = 0. \end{cases} \quad (4.61)$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2*. *Формальное асимптотическое решение задачи (4.61), (4.3) имеет вид*

$$\begin{aligned} u(t, z, \rho) &= u_0(\rho) + \varepsilon^{4/5} (u_1^I(t, \xi, \theta) + \bar{u}_1^{\text{III}}(t)) + \\ &\quad + \varepsilon^{6/5} (u_2^I(t, \xi, \theta) + \tilde{u}_2^{\text{II}}(t, \xi, \tau) + \bar{u}_2^{\text{III}}(t)) + \mathcal{O}(\varepsilon^{8/5}), \\ v(t, z, \rho) &= \varepsilon^{6/5} (\tilde{v}_2^I(t, \xi, \theta) + \tilde{v}_2^{\text{II}}(t, \xi, \tau)) + \mathcal{O}(\varepsilon^{8/5}), \\ p(t, z, \rho) &= p_0 + \varepsilon^2 \bar{p}_0 z + \varepsilon^{8/5} \tilde{p}_3^{\text{II}}(t, \xi, \tau) + \mathcal{O}(\varepsilon^{12/5}), \end{aligned}$$

где $\theta = \rho/\varepsilon^{4/5}$, $\tau = \rho/\varepsilon^{2/5}$, $\xi = z/\varepsilon^{2/5}$, $\rho = R_0 - r$, а $u_0(\rho)$ — скорость течения Пуазейля. Функции

$$u_1^* = u_1^I + \bar{u}_1^{\text{III}} + \theta u_0'(0), \quad v_2^* = \tilde{v}_2^I + \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau=0} \quad (4.62)$$

являются решением краевой задачи

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1^*}{\partial t} + u_1^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - v_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} = -\frac{\partial \tilde{p}_3^{\text{II}}}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \theta^2}, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial v_2^*}{\partial \theta} = 0, \end{cases} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} u_1^*|_{\theta=\mu} &= \mu u_0'(0), \quad v_2^*|_{\theta=\mu} = 0, \quad u_1^*|_{\xi} = u_1^*|_{\xi+2\pi}, \quad v_2^*|_{\xi} = v_2^*|_{\xi+2\pi}, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} &\rightarrow \frac{du_0}{d\rho} \Big|_{\rho=0}, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Функция \tilde{v}_2^{II} является решением задачи Дирихле для оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \xi^2} = 0,$$

$$\tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\xi} = \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\xi+2\pi}, \quad \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau=0} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^*,$$

а функция \tilde{u}_2^{II} имеет вид

$$\tilde{u}_2^{\text{II}} = \int \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} d\xi.$$

Давление $\tilde{p}_3^{\text{II}}(t, \xi, \tau)$ имеет следующий вид:

$$\tilde{p}_3^{\text{II}} = \frac{du_0}{d\rho} \Big|_{\rho=0} \left[\int \tilde{v}_2^{\text{II}} d\xi - \tau \int \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} d\xi \right].$$

Функция $\bar{u}_1^{\text{III}}(t)$ определяется из следующего равенства

$$\bar{u}_1^{\text{III}}(t) = \lim_{\theta \rightarrow \infty} (u_1^* - \theta u_0'(0)).$$

* См. Замечание 2.1.

Доказательство Теоремы 4.2 аналогично доказательству Теоремы 4.1, приведенному выше.

4.3. Алгоритм численного решения и результаты его использования

Алгоритм нахождения решения задачи (4.2), (4.3) аналогичен алгоритмам, приведенным в разделах 2.4 и 3.3, и имеет следующий вид.

1. Найти функции u_1^* , v_2^* , описывающее течение в тонком пограничном слое, решив задачу (4.9), (4.10) (см. подраздел 4.3.1).
2. Найти $\lim_{\theta \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^*$, являющийся граничным условием для задачи (4.11), (4.12).
3. Найти функцию \tilde{v}_2^{II} , описывающую осцилляции в толстом пограничном слое, решив задачу (4.11), (4.12) (см. подраздел 4.3.2).

4.3.1 Течение в тонком пограничном слое

Мы будем численно решать краевую задачу на функции, описывающие течение в тонком пограничном слое (4.9), (4.10) методом установления, т.е. фактически мы решаем задачу (4.63). Для упрощения численного счета мы будем решать задачу (4.9), (4.10) в области с выровненной границей (см. Замечание 4.1 к Теореме 4.1), т.е. в переменных $(\xi, \hat{\theta})$, где $\hat{\theta} = \theta - \mu$. В этих переменных задача (4.63) имеет следующий вид (см. (4.16), (4.17)):

$$\begin{cases} \frac{\partial u^*}{\partial t} + u^* \left(\frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \hat{\theta}} \right) - v^* \frac{\partial u^*}{\partial \hat{\theta}} = - \frac{\partial \tilde{p}_3^{\text{II}}}{\partial \xi} \Big|_{\hat{\tau}=0} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial \hat{\theta}^2}, \\ \frac{\partial u^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u^*}{\partial \hat{\theta}} - \frac{\partial v^*}{\partial \hat{\theta}} = 0, \end{cases} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} u^*|_{\hat{\theta}=0} = v^*|_{\hat{\theta}=0} = 0, \quad u^*|_{\xi} = u^*|_{\xi+2\pi}, \quad v^*|_{\xi} = v^*|_{\xi+2\pi}, \\ \frac{\partial u^*}{\partial \hat{\theta}} \Big|_{\hat{\theta} \rightarrow \infty} \rightarrow u'_0(0), \quad \frac{\partial u^*}{\partial \xi} \Big|_{\hat{\theta} \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial \xi} u'_0(0), \end{aligned} \quad (4.65)$$

где функции $u^* = u_1^*|_{\theta=\hat{\theta}-\mu}$ и $v^* = v_2^*|_{\theta=\hat{\theta}-\mu}$, а $u_0(\rho)$ — профиль течения Пуазейля, см. (4.6). Однако, результаты численного счета мы будем приводить на иллюстрациях, в «старых координатах» (ξ, θ) , т.е. в координатах, в которых граница (стенка трубы) криволинейная.

Заменой $\check{\theta} = -\hat{\theta}$, $\check{\mu} = -\mu$ система уравнений (4.64), (4.65) приводится к виду, аналогичному (с точностью до коэффициентов) уравнениям (2.24), (2.25) для задачи обтекания пластины с периодическими неровностями, рассмотренной в разделе 2. Алгоритм их численного решения приведен в разделе 2.4.1, и мы не будем здесь его повторять.

Для численного моделирования мы будем считать, что функция $\mu(\xi)$ имеет следующий вид:

$$\mu(\xi) = A \cos \xi,$$

где $A = \text{const}$ — амплитуда, которую мы будем варьировать.

Для определения стационарности полученного решения, введем функцию $\text{eps}(t)$ следующим образом:

$$\text{eps}(t) = \max \left\{ \left\| u^*|_{t+h_\tau} - u^*|_t \right\|, \left\| v_2^*|_{t+h_\tau} - v_2^*|_t \right\| \right\},$$

где h_τ — шаг разностной схемы по времени. Мы будем считать, что наше решение является стационарным, если

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists t^* > 0 : \|\text{eps}(t)\| < \epsilon \quad \forall t > t^*.$$

Мы положили $\epsilon = 0.0001$.

Теперь мы представим основные результаты численного решения задачи (4.64), (4.65). Изменяя величину амплитуды неровности A , мы наблюдаем несколько характерных типов поведения решения. Более того, существует несколько критических значений амплитуды A , в которых происходит изменение поведения решения.

Сначала зафиксируем радиус трубы: пусть $R_0 = 1$. При амплитуде $A = 0.5$ мы наблюдаем ламинарное течение в пограничном слое (см. рис. 4.4 а)), и, начиная с некоторого момента времени — стационарное (см. рис. 4.4 б)).

При амплитуде $A = 1$ мы наблюдаем образование вихрей в потоке, но они разрушаются после некоторого (малого) промежутка времени. Динамика образования вихрей показана на рис. 4.6. Однако, начиная с некоторого момента времени, течение становится ламинарным и стационарным, см. 4.6 д), е).

При дальнейшем увеличении амплитуды ($A > 1$) мы также наблюдаем вихревое течение. Однако, после образования вихря на левой стенке «ямки» и его перемещения по потоку, на левой стенке снова образуется вихрь, и так далее, см. рис. 4.7 а) и

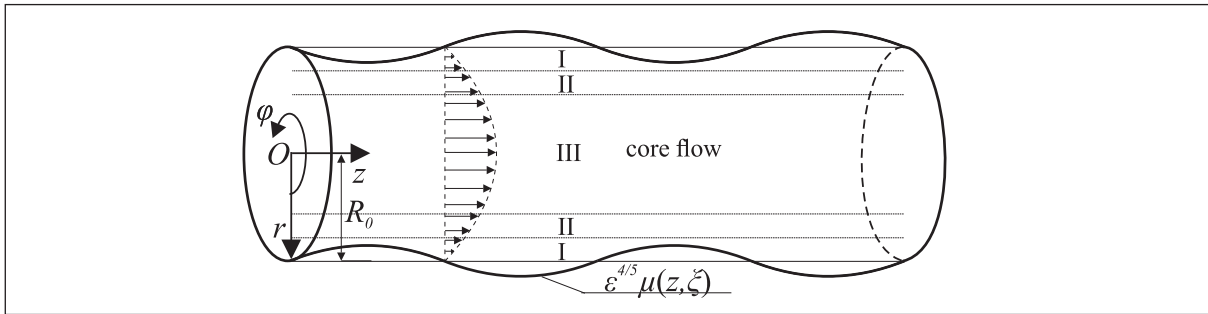


Рис. 4.3. Схема пограничных слоев в течении внутри трубы

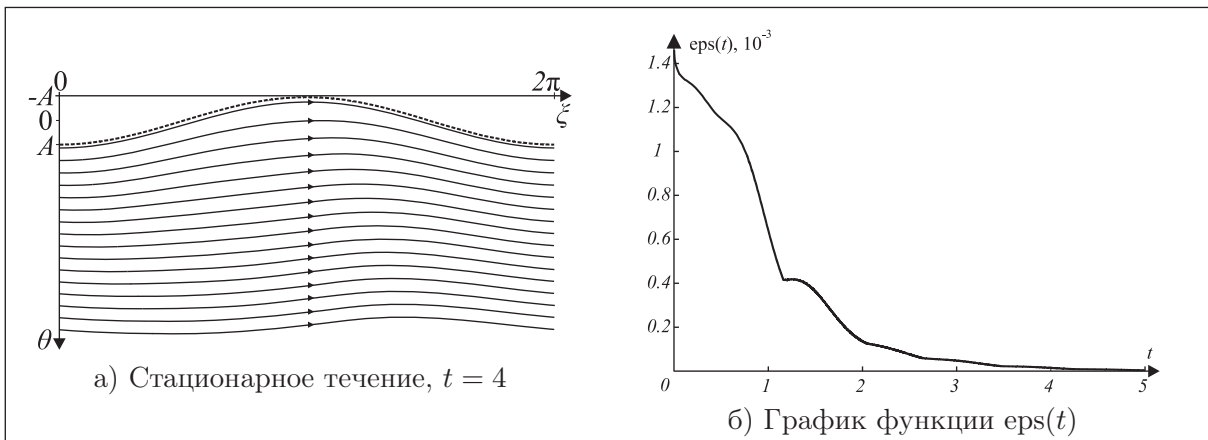


Рис. 4.4. Ламинарный поток, $A = 0.5$, $R_0 = 1$

рис. 4.9. Этот процесс продолжается некоторое время, спустя которое течение становится стационарным, но не ламинарным как в случае $A = 1$ — в «ямке» мы наблюдаем стационарный вихрь, см. рис. 4.7б) и рис. 4.8. Отметим, что мы не исследовали поведение поведения решения на больших временах, т.е. не известно останется ли этот стационарный вихрь или произойдет его разрушение.

Таким образом, существует две критические амплитуды A^* и A^{**} . При амплитуде $A < A^*$ течение ламинарное и с некоторого момента времени — стационарное, при $A^* < A < A^{**}$ в начале наблюдается образование вихрей, с некоторого момента времени оно становится ламинарным и стационарным, а при $A > A^{**}$ течение имеет вихревой характер.

Также мы исследовали влияние радиуса трубы на характер течения, в результате которого мы пришли к следующему выводу: критические амплитуды A^* и A^{**} уменьшаются при увеличении радиуса трубы R_0 . Например, при $R_0 = 0.3$ и $A = 1.1$ наблюдается ламинарное течение (см. рис. 4.5), а при $R_0 = 1$ и $A = 1.1$, как уже написано выше, в потоке наблюдается формирование вихрей (см. рис. 4.6).

Также отметим, что давление (точнее его компонента p_{01}) тоже оказывает точно такое же влияние на характер течения. А именно, при фиксированном радиусе R_0 и амплитуде A , критические амплитуды неровности уменьшаются с увеличением p_{01} .

4.3.2 Течение в толстом пограничном слое

Перейдем к моделированию течения в толстом пограничном слое. Как уже было сказано ранее, оно описывается функциями

$$v^\dagger = \varepsilon^{6/5} \tilde{v}_2^{\text{II}}, \quad u^\dagger = \varepsilon^{2/5} u_0^\dagger + \varepsilon^{4/5} u_1^\dagger + \varepsilon^{6/5} \tilde{u}_2^{\text{II}},$$

где $u_0^\dagger = \tau u'_0(0)$ и $u_1^\dagger = \tau^2 u''_0(0)/2 + \bar{u}_1^{\text{III}}$. Функция \tilde{v}_2^{II} является решением краевой задачи на уравнения Лапласа (4.11), (4.12):

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \xi^2} = 0,$$

$$\tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau=0} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^*, \quad \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\xi} = \tilde{v}_2^{\text{II}}|_{\xi+2\pi},$$

а функция \tilde{u}_2^{II} определяется по формуле (4.13)

$$\tilde{u}_2^{\text{II}} = \int_{\xi}^{\xi} \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} d\xi. \quad (4.66)$$

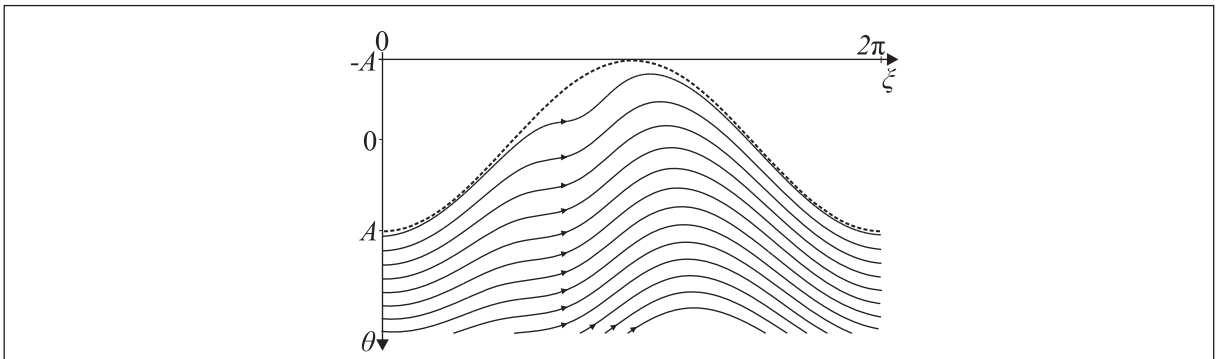
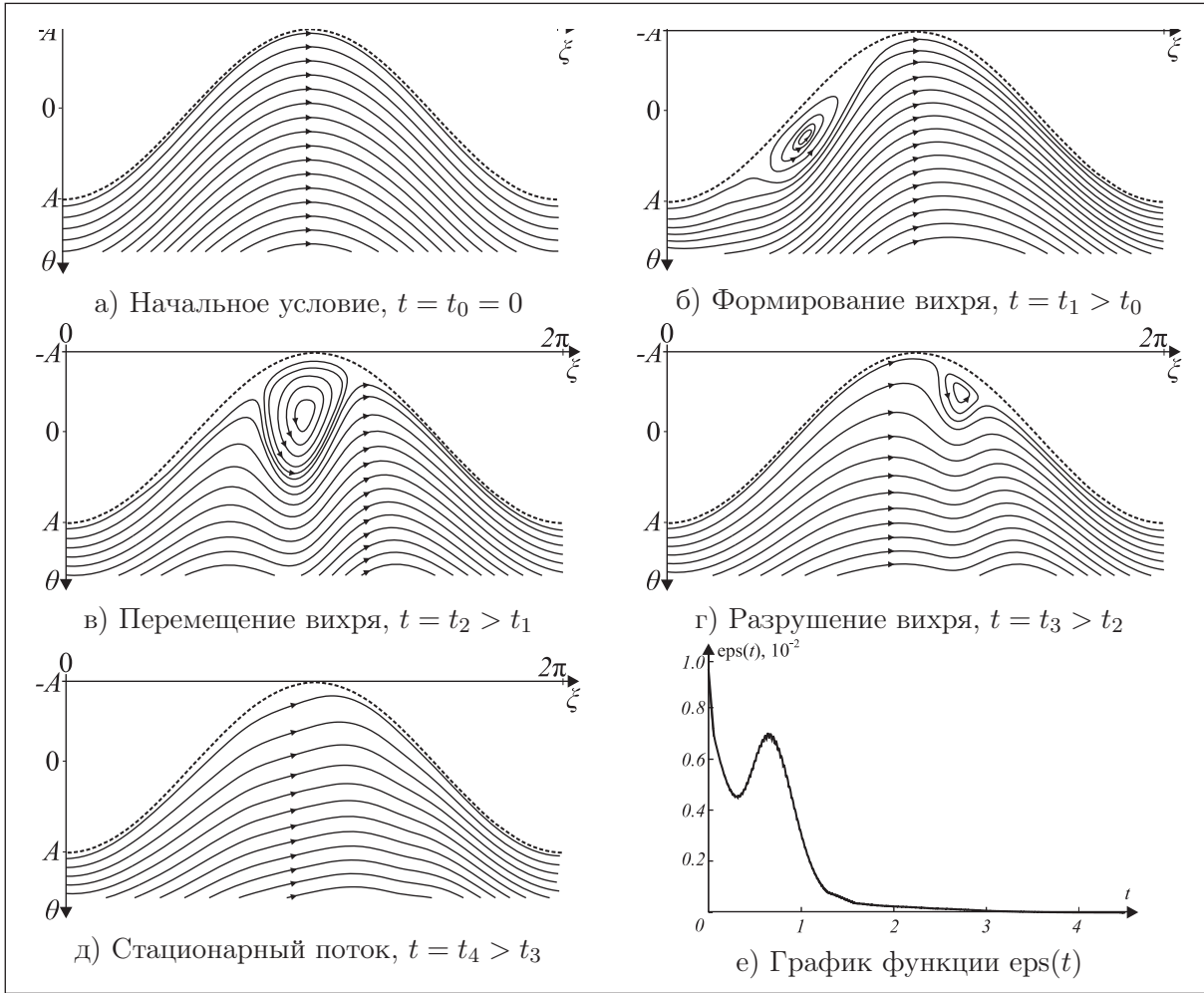


Рис. 4.5. Ламинарный поток, $A = 1.1$, $t = t_1 > 0$, $R_0 = 0.3$

Рис. 4.6. Динамика вихреобразования, $A = 1.1$, $R_0 = 1$

Разложим функцию \tilde{v}_2^{II} в ряд Фурье:

$$\tilde{v}_2^{\text{II}} = \sum_{k \neq 0} v_k(\tau) e^{ik\xi}. \quad (4.67)$$

Тогда задача на функцию \tilde{v}_2^{II} примет следующий вид

$$\frac{d^2 v_k}{d\tau^2} - k^2 v_k = 0, \quad v_k(0) = v_{2,k,\infty}^*, \quad v_k|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad (4.68)$$

где $v_{2,k,\infty}^*$ — коэффициенты разложения в ряд Фурье функции $\tilde{v}_2^*|_{\theta \rightarrow \infty}$ (граничного условия). Решение задачи (4.68) имеет следующий вид:

$$v_k(\tau) = v_{2,k,\infty}^* e^{-|k|\tau}. \quad (4.69)$$

Теперь мы находим искомую функцию \tilde{v}_2^{II} по формуле (4.67).

Горизонтальную компоненту скорости \tilde{u}_2^{II} можно найти по формуле (4.66), в которой первообразную $G = \int^\xi \tilde{g}$ (см. Определение 2.2) можно вычислить по следующей формуле:

$$\int_0^\xi \tilde{g} d\xi = \int_0^\xi \tilde{g}(\xi') d\xi' - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\xi'} \tilde{g}(\xi'') d\xi'' \right] d\xi',$$

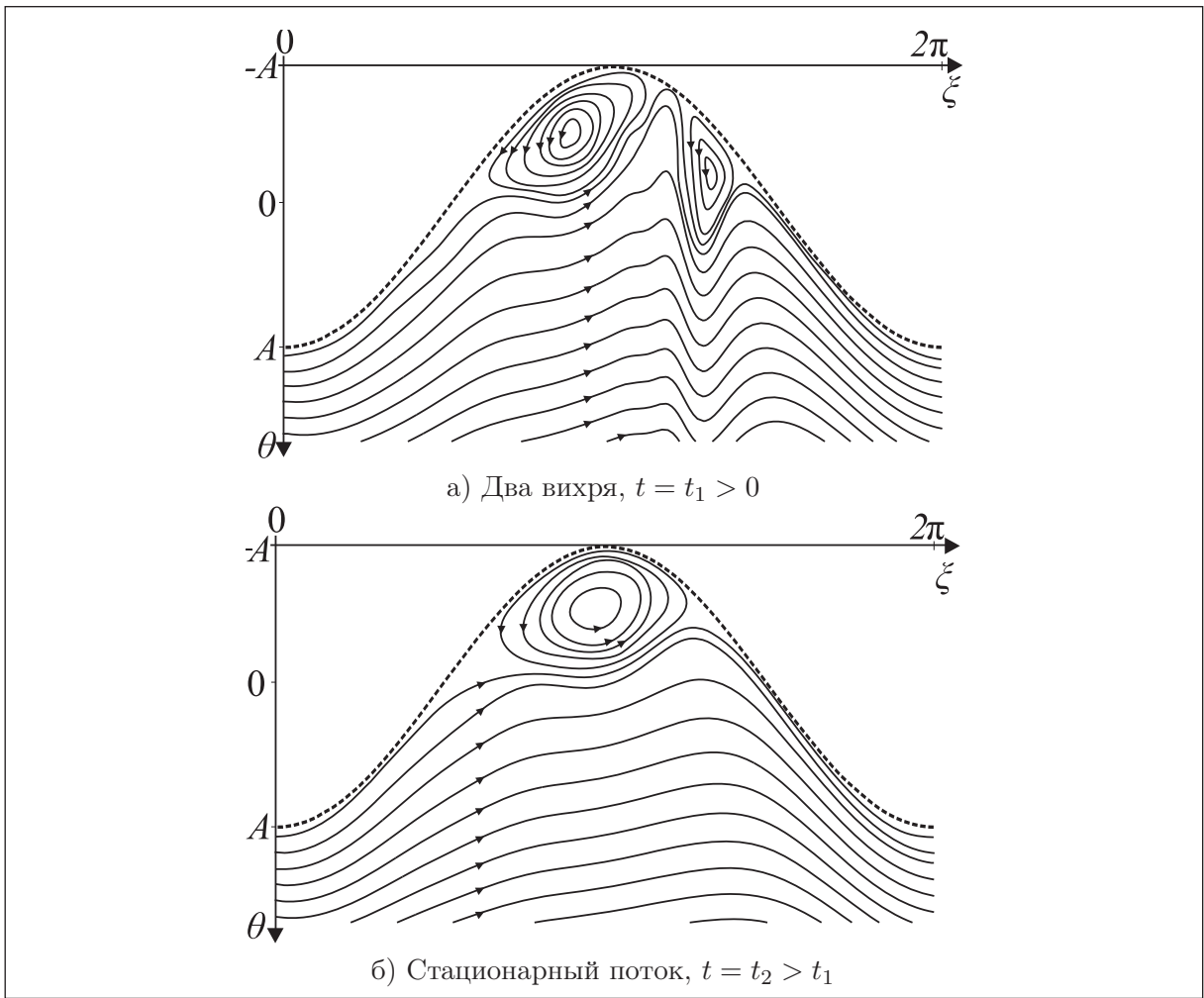


Рис. 4.7. Вихревое течение, $A = 1.5$, $R_0 = 1$

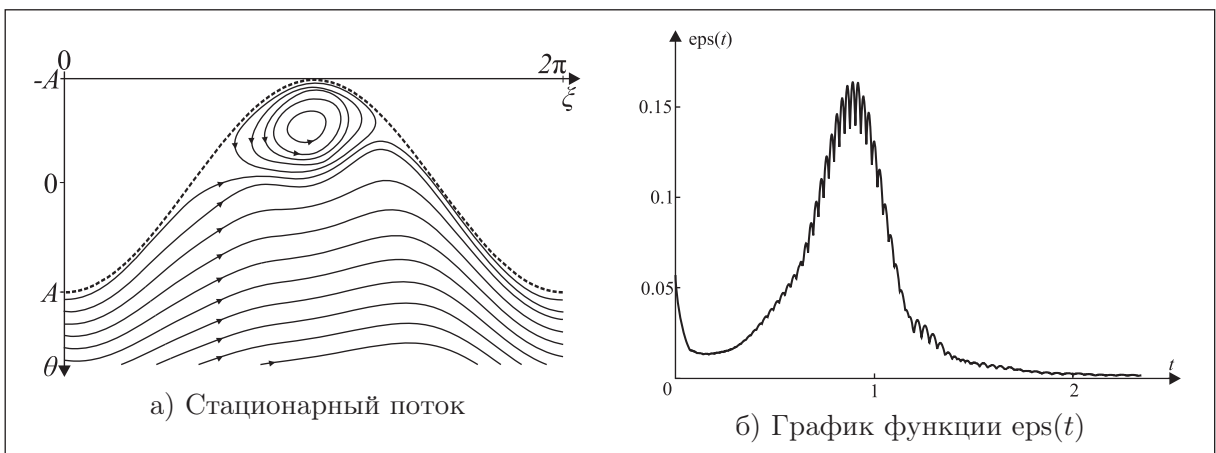
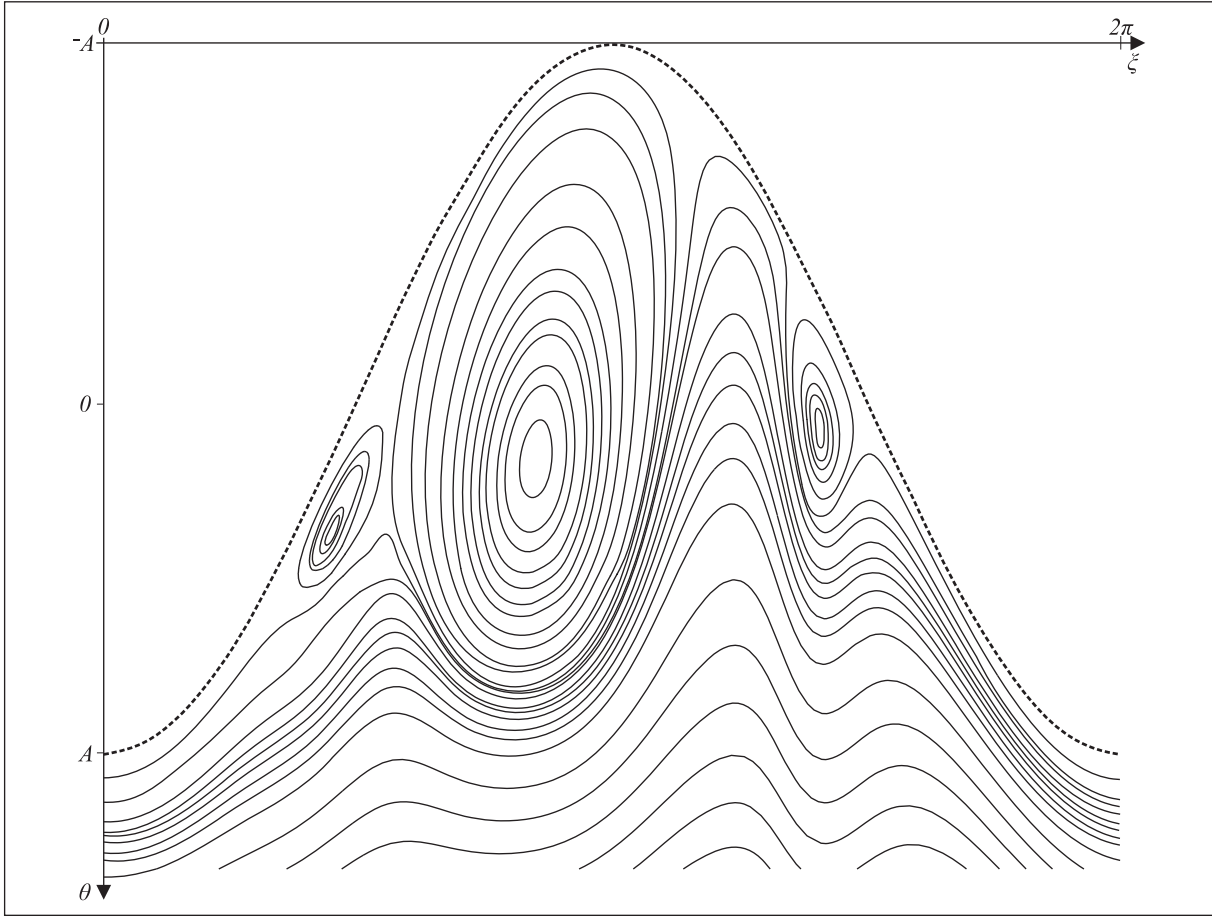


Рис. 4.8. Вихревое течение, $A = 1.9$, $R_0 = 1$

где $\tilde{g} = \partial \tilde{v}_2^{\text{II}} / \partial \tau$. Однако наиболее оптимально вычислять первообразную G путем разложения ее в ряд Фурье с коэффициентами G_k , которые определяются по следующей формуле ($k \neq 0$, т.к. отсутствует средняя):

$$G_k(\tau) = \frac{1}{ik} \frac{dv_k}{d\tau}.$$

Рис. 4.9. Вихревое течение, $A = 2.3$, $t > 0$, $R_0 = 1$

Мы не будем приводить здесь численную реализацию этого алгоритма в силу его тривиальности.

В итоге, горизонтальная компонента скорости в толстом пограничном слое имеет следующий вид:

$$u^{\ddagger} = \varepsilon^{2/5}(\tau + (\theta_{max} + \mu)\varepsilon^{2/5})u_0'(0) + \varepsilon^{4/5}(\tau^2 u_0''(0) + \bar{u}_1^{\text{III}}) + \varepsilon^{6/5}\tilde{u}_2^{\text{II}}, \quad (4.70)$$

где слагаемое $(\theta_{max} + \mu)\varepsilon^{2/5}$ обусловлено сшивкой с течением в тонком пограничном слое, а θ_{max} — верхняя граница области, в которой ищется решение уравнений тонкого пограничного слоя (см. предыдущий раздел).

В смысле теории асимптотических методов, тонкий (пристеночный) пограничный слой в координатах толстого пограничного слоя имеет нулевую толщину. Однако, стабилизация решения в пристеночном слое, которая в теории наступает при $\theta \rightarrow \infty$, реально наблюдается при $\theta \geq \theta_{max}$. Для построения совместной картины течения в пристеночной области (т.е. тонком погранслое) и в втором (т.е. толстом) пограничном слое мы брали достаточно большие значения ε ($\varepsilon = 0.1$), поэтому толщина пристеночного слоя оказывается вполне конечной и ее учет приводит к появлению слагаемого $(\theta_{max} + \mu)\varepsilon^{2/5}$ в (4.70). При меньших значениях ε течения в погранслоях можно графически представить только отдельными картинками.

На рис. 4.10 а) изображены линии тока в толстом пограничном слое для случая $A = 0.5$. Как было написано ранее, в этом случае в тонком пограничном слое

наблюдается ламинарное течение, см. рис. 4.4. На рис. 4.10 б) изображен случай амплитуды $A = 1.5$, при которой в тонком погранслое наблюдается образование вихрей, см. рис. 4.7. Видно, что вихри из тонкого пограничного слоя не вносят возмущения в течение в толстом погранслое. Сама структура течения в толстом погранслое похожа на структуру течения в тонком погранслое «на бесконечности», см. рис. 4.11. Отметим, что в отличие от рассмотренного в разделе 2 случая пластины, в котором течение во толстом погранслое есть течение Блазиуса, в задаче рассматриваемой здесь нет нетривиального пограничного слоя, а есть только основной поток — течение Пуазейля.

4.4. Задача о течении жидкости внутри двумерного канала с малыми периодическими неровностями на стенках

Рассмотрим двумерное течение несжимаемой жидкости в двумерном канале с малыми периодическими неровностями на стенках при больших значениях числа

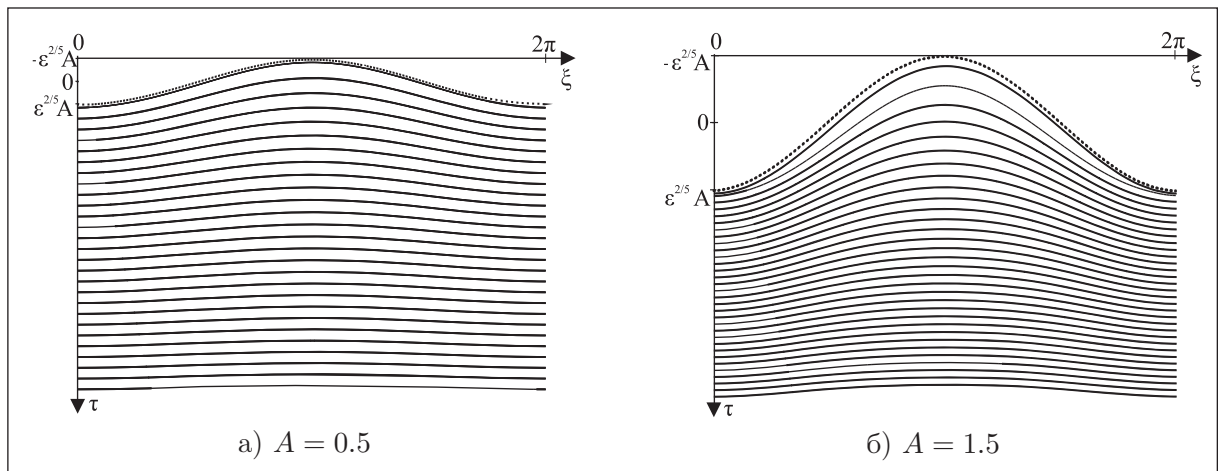


Рис. 4.10. Течение в толстом пограничном слое

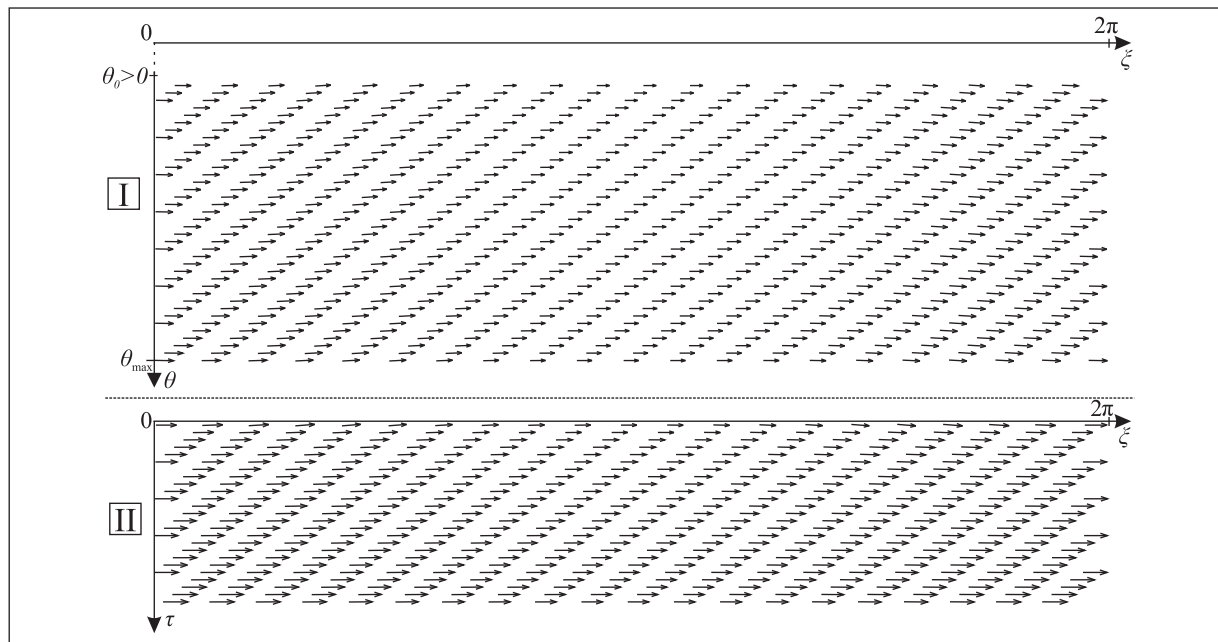


Рис. 4.11. «Сшивка» решений между тонким и толстым пограничными слоями, $A = 1.5$, $\varepsilon = 0.1$

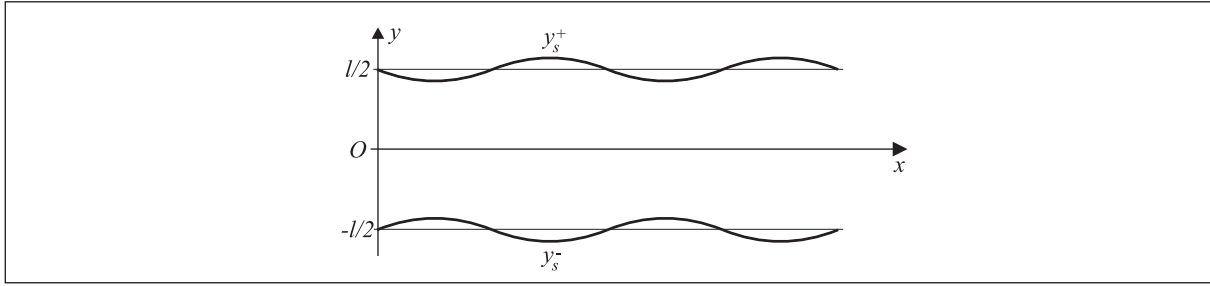


Рис. 4.12. Двумерный канал

Рейнольдса \mathbf{Re} . Для простоты будем считать, что внутри основное течение внутри канала (исключая пограничные слои) есть течение Пуазейля. Будем считать, что стенки канала S описываются следующими уравнениями (см. рис. 4.12):

$$y_s^- = -\frac{l}{2} + \varepsilon^{4/5} \mu_- \left(x, \frac{x}{\varepsilon^{2/5}} \right), \quad y_s^+ = \frac{l}{2} + \varepsilon^{4/5} \mu_+ \left(x, \frac{x}{\varepsilon^{2/5}} \right), \quad (4.71)$$

где l — ширина канала, а $\varepsilon = \mathbf{Re}^{-1/2}$ — малый параметр. Функции $\mu_{\pm}(x, \xi)$ являются гладкими, 2π -периодическими по ξ и имеющими нулевое среднее (в смысле Определения 2.1): $\int_0^{2\pi} \mu_{\pm}(x, \xi) d\xi = 0$.

Данная задача формально является частным случаем задачи о течении в трубе, рассмотренной ранее в этом разделе. Как обычно, эта задача описывается системой уравнений Навье–Стокса и неразрывности, но в отличие от задачи о течении в трубе (где использовались цилиндрические координаты, см. (4.2)), в данной задаче удобнее использовать декартовы координаты:

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (4.72)$$

где $\mathbf{U} = (u, v)$ — вектор скорости, p — давление. Система уравнений (4.72) дополняется граничными условиями прилипания к стенкам

$$\mathbf{U} \Big|_{y=y_s^{\pm}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.73)$$

Мы рассматриваем решение задачи (4.72), (4.73), в котором отсутствует взаимодействие пограничного слоя с внешним течением (это особенность двухпалубной структуры, см. § 1.2 Введения), и, следовательно, в рамках нашей структуры решения отсутствует взаимодействие между пограничными слоями у верхней и нижней стенок. Ввиду этого мы можем строить асимптотическое решение задачи о течении в пристеночной области отдельно у каждой стенки, и, далее мы будем рассматривать течение у только нижней стенки.

Введем новую вертикальную переменную

$$z = y - y_s^-. \quad (4.74)$$

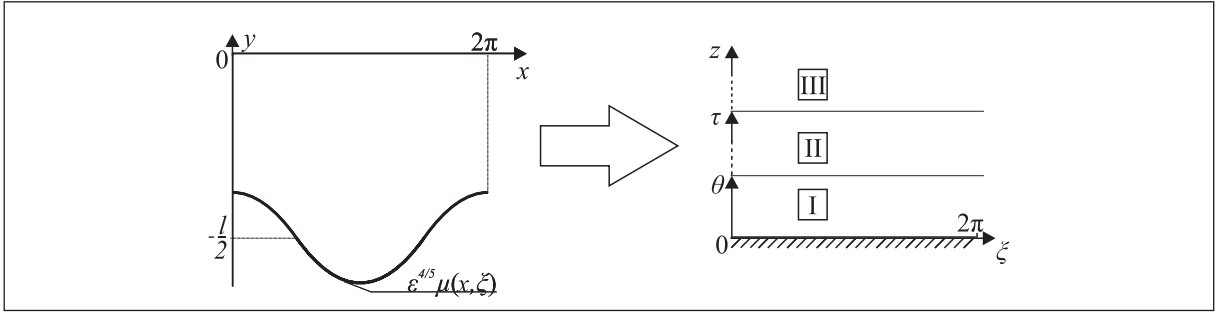


Рис. 4.13. Замена координат и двухпалубная структура решения

В переменных (x, z) стенка канала будет ровной, см. рис. 4.13. Для упрощения дальнейших обозначений, пусть $\mu(x, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} \mu_-(x, \xi)$.

Справедлива следующая теорема (аналог Теоремы 4.1).

Теорема 4.3*. *Формальное асимптотическое решение задачи (4.72), (4.73) имеет следующий вид:*

$$\begin{aligned} u(x, z) &= u_0(z) + \varepsilon^{4/5} \left(u_1^I(x, \xi, \theta) + \bar{u}_1^{\text{II}}(\tau) + \bar{u}_1^{\text{III}}(z) + \mu \frac{du_0}{dz} \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{6/5}), \\ v(x, z) &= \varepsilon^{6/5} \left(v_2^I(x, \xi, \theta) + \tilde{v}_2^{\text{II}}(x, \xi, \tau) + \bar{v}_2^{\text{III}}(z) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{8/5}), \\ p(x, z) &= p_0 + \varepsilon^2 \bar{p}_0 x + \varepsilon^{8/5} \left(\tilde{p}_2^{\text{II}}(x, \xi, \tau) + \bar{p}_2^{\text{II}}(x, z) \right) + \mathcal{O}(\varepsilon^{12/5}), \end{aligned} \quad (4.75)$$

где $\theta = z/\varepsilon^{4/5}$, $z = y + l/2 - \varepsilon^{4/5} \mu$, $\tau = z/\varepsilon^{2/5}$, $\xi = x/\varepsilon^{2/5}$, $u_0(z)$ — профиль скорости течения Пуазейля. Функции

$$\begin{aligned} u_1^* &= u_1^I + \bar{u}_1^{\text{II}}(0) + \bar{u}_1^{\text{III}}(0) + (\theta + \mu) \frac{du_0}{dz} \Big|_{z=0}, \\ v_2^* &= v_2^I + \tilde{v}_2^{\text{II}}(x, \xi, 0) \end{aligned} \quad (4.76)$$

являются решением следующей краевой задачи:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} + \frac{\partial v_2^*}{\partial \theta} = 0, \\ u_1^* \left(\frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} - \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} \right) + v_2^* \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} = - \frac{\partial p_2^{\text{II}}}{\partial \xi} \Big|_{\tau=0} + \frac{\partial^2 u_1^*}{\partial \theta^2}, \end{cases} \quad (4.77)$$

$$\begin{aligned} u_1^* \Big|_{\theta=0} = v_2^* \Big|_{\theta=0} = 0, \quad \bar{v}_2^* \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad u_1^* \Big|_{\xi} = u_1^* \Big|_{\xi+2\pi}, \quad v_2^* \Big|_{\xi} = v_2^* \Big|_{\xi+2\pi}, \\ \frac{\partial u_1^*}{\partial \theta} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{du_0}{dz} \Big|_{z=0}, \quad \frac{\partial u_1^*}{\partial \xi} \Big|_{\theta \rightarrow \infty} \rightarrow \frac{\partial \mu}{\partial \xi} \frac{du_0}{dz} \Big|_{z=0}. \end{aligned} \quad (4.78)$$

Функция \tilde{v}_2^{II} является решением задачи Дирихле для оператора Лапласа

$$\frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau^2} + \frac{\partial^2 \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \xi^2} = 0, \quad (4.79)$$

$$\tilde{v}_2^{\text{II}} \Big|_{\tau \rightarrow \infty} \rightarrow 0, \quad \tilde{v}_2^{\text{II}} \Big|_{\xi} = \tilde{v}_2^{\text{II}} \Big|_{\xi+2\pi}, \quad \tilde{v}_2^{\text{II}} \Big|_{\tau=0} = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \tilde{v}_2^*. \quad (4.80)$$

*См. Замечание 2.1.

Функция $\tilde{p}_2(x, \xi, \tau)$ имеет вид

$$\tilde{p}_2^{\text{II}} = \frac{du_0}{dz} \Big|_{z=0} \left[\tau \int \frac{\partial \tilde{v}_2^{\text{II}}}{\partial \tau} d\xi - \int \tilde{v}_2^{\text{II}} d\xi \right].$$

Замечание 4.2. Член $\mu u'_0(z)$ в (4.75) возникает только за счет замены переменной, выравнивающей границу.

Доказательство Теоремы 4.3 аналогично доказательству Теоремы 4.1 и мы не будем его повторять.

Заметим, что уравнения тонкого пограничного слоя (4.77), (4.78) идентичны с точностью до замены переменной (см. подраздел 4.3.1) уравнениям (4.9), (4.10), полученным ранее при рассмотрении задачи о течении в трубе, а уравнения толстого пограничного слоя (4.79), (4.80) совпадают с (4.11), (4.12). Следовательно, все выводы о характере течения, приведенные в разделе 4.3 справедливы и для случая канала, и мы не будем повторять их здесь.

5. Заключение

В работе исследована двухпалубная структура пограничного слоя, возникающая в ряде задач обтекания вязкой несжимаемой жидкостью поверхностей с малыми неровностями при больших числах Рейнольдса. Эта структура пограничного слоя состоит из двух разномасштабных областей: тонкого пристеночного погранслоя и классического погранслоя Прандтля. Уравнения на функции, описывающие течение в тонком погранслое одинаковы для всех рассмотренных задач. Точнее, различие состоит лишь в коэффициентах — они разные для случая пластины и случая канала и трубы; также отличие есть и в граничных условиях — они разные для периодического случая и для случая локализованных неровностей. В области классического погранслоя ситуация другая — в случае канала и трубы функции, описывающие течение, есть решение хорошо известной задачи Дирихле для оператора Лапласа, а в случае канала — мало исследованного в литературе уравнения Рэлея.

Отдельно стоит отметить еще одну особенность двухпалубной структуры — помимо разномасштабности по пространственной переменной, в ней имеются разные временные масштабы. Например, в случае пластины в тонком пограничном слое время $t \sim 1$, в классическом погранслое время $t \sim \varepsilon^{-1/3}$, а общее время (т.е. время в уравнениях Навье–Стокса) $t \sim \varepsilon^{2/3}$.

Одним из основных результатов этой работы является исследование уравнение типа Рэлея. Доказано существование, единственность и устойчивость решения уравнения типа Рэлея, описывающего осцилляции вертикальной скорости в классическом пограничном слое для задачи обтекания вязкой несжимаемой жидкостью полубесконечной пластины с малыми периодическими неровностями на поверхности при больших значениях числа Рейнольдса (см. Теоремы 2.2 и 2.3). Построен алгоритм численного решения уравнения типа Рэлея и приведены результаты его использования.

Доказано, что двухпалубная структура пограничного слоя возникает в задаче обтекания полубесконечной пластины с малыми периодическими неровностями (см. Теорему 2.1), в задаче обтекания полубесконечной пластины с малыми локализованными неровностями типа горбика, скачка или излома в виде угла (см. Теоремы 3.1

и 3.2), а также в задаче о течении в аксимально–симметричной трубе (см. Теоремы 4.1 и 4.2) и двумерном канале (см. Теорему 4.3) с малыми периодическими неровностями на стенках (но при масштабах неровности, отличных от случая полубесконечной пластины). Для всех рассмотренных задач построено их формальное асимптотическое решение. Для полученных уравнений построен алгоритм численного решения (на основе разностных схем, удовлетворяющих принципу максимума, и следовательно, устойчивых) и приведены результаты его использования. Путем численного моделирования найдена зависимость между параметрами неровности (амплитудой неровности, радиусом трубы, шириной канала) и характером течения.

В итоге, можно сделать вывод о том, что двухпалубная структура пограничного слоя является также неотъемлемым свойством модели Навье–Стокса, равно как и общеизвестная трехпалубная структура, изученная в множестве работ [23–26; 31; 33; 36–41; 43–47; 54; 57; 76–78; 87–94]. Обратные степени числа Рейнольдса Re , задающие двухпалубную структуру, разумеется отличны от тех, которые порождают трехпалубную структуру. Они также различны для случая пластины и случая канала и трубы. Важно отметить, что в случае двухпалубной структуры не появляется задачи о взаимодействии пограничного слоя с внешним потоком (которая появляется в случае трехпалубной структуры), т.к. эта структура устроена так, что возникающие от неровностей на стенках возмущения течения в тонком пристеночном пограничном слое (на «нижней палубе») могут лишь породить затухающие осцилляции в толстом пограничном слое (на «верхней палубе») и не оказывают влияние на внешний поток, что позволяет рассматривать течение, например, в (бесконечном) канале с периодическими неровностями на стенках, где в случае взаимодействия пограничного слоя с внешним потоком возникла бы задача типа задачи о бесконечных отражениях.

Благодарности

Авторы выражают искреннюю благодарность В. В. Пухначеву, Л. А. Калякину, С. Ю. Доброхотову, М. В. Карасеву, А. М. Блохину и Н. Н. Нефедову за плодотворные обсуждения и ценные замечания. Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований НИУ ВШЭ в 2016 году.

Список литературы

- [1] *Blasius H.* Grenzschichten in Flüssigkeiten mit kleiner Reibung // *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 1908, **56**, pp. 1–37.
- [2] *Blokhin A. M., Yegitov A. V., Tkachev D. L.* Linear instability of solutions in a mathematical model describing polymer flows in an infinite channel // *Computational Mathematics and Mathematical Physics*, 2015, **55** (5), pp. 848–873.
- [3] *Borisov D. I., Gaydukov R. K.* Existence of the Stationary Solution of a Rayleigh-Type Equation // *Mathematical Notes*, 2016, **99** (5), pp. 636–642.
- [4] *Boyd J. P.* The Blasius function: computations before computers, the value of tricks, undergraduate projects, and open research problems // *SIAM Review*, 2008, **50** (4), pp. 791–804.

- [5] *Cathalifaud P., Mauss J., Cousteix J.* Nonlinear aspects of high Reynolds number channel flows // *European J. of Mechanics - B/Fluids*, 2010, **29**, pp. 295–304.
- [6] *Danilov V. G., Makarova M. V.* Asymptotic and numerical analysis of the flow around a plate with small periodic irregularities // *Russian J. of Mathematical Physics*, 1994, **2** (1), pp. 49–56.
- [7] *Danilov V. G., Maslov V. P., Volosov K. A.* Mathematical modeling of heat and mass transfer processes // *Kluwer Academic Publishers*, 1995, 316 pp.
- [8] *Dellil A. Z., Azzi A., Jubran B. A.* Turbulent flow and convective heat transfer in a wavy wall channel // *Heat and Mass Transfer*, 2004, **40**, pp. 793–799.
- [9] *Gajjar J. S. B.* Fully developed free surface flows — Liquid layer flow over a convex corner // *Comp. and Fluids*, 1987, **15** (4), pp. 337–360.
- [10] *Gaydukov R. K., Danilov V. G.* Double-Deck Structure of the Boundary Layer in Problems of Flow around Localized Perturbations on a Plate // *Mathematical Notes*, 2015, **98** (4), pp. 561–571.
- [11] *Gaydukov R. K., Danilov V. G.* Vortexes in the Prandtl boundary layer induced by irregularities on a plate // *Russian J. of Mathematical Physics*, 2015, **22** (2), pp. 161–173.
- [12] *Gaydukov R., Danilov V.* Oscillations in classical boundary layer for flow with double-deck boundary layers structure // *Proc. of the International Conference DAYS on DIFFRACTION 2013*, 2013, pp. 28–31.
- [13] *Goldstein S.* On Laminar Boundary-Layer Flow Near a Position of Separation // *Q. J. of Mechanics and Applied Mathematics*, 1948, **1** (1), pp. 43–69.
- [14] *Hunt J. C. R.* A theory for the laminar wake of a two-dimensional body in a boundary layer // *J. of Fluid Mechanics*, 1971, **49** (1), pp. 159–178.
- [15] *Ilin K.* Steady streaming in a channel with permeable walls // *European Journal of Applied Mathematics*, 2014, **25**, pp. 65–82.
- [16] *Lighthill M. J.* On Boundary Layers and Upstream Influence. I. A Comparison between Subsonic and Supersonic Flows // *Proc. of the Royal Society A*, 1953, **217**, pp. 344–357.
- [17] *Lighthill M. J.* On Boundary Layers and Upstream Influence. II. Supersonic Flows without Separation // *Proc. of the Royal Society A*, 1953, **217**, pp. 478–507.
- [18] *Mauss J.* Asymptotic Modelling for separating boundary layers // *Lecture Notes in Physics*, 1995, **442**, pp. 239–254.
- [19] *Mauss J., Achiq A., Saintlos S.* Sur l'analyse conduisant à la théorie de la triple couche // *Comptes Rendus de l'Académie des sciences. S. II*, 1992, **315**, pp. 1611–1614.
- [20] *Mauss J., Cousteix J.* Asymptotic Analysis and Boundary Layers // *Berlin:Springer*, 2007, 434 pp.
- [21] *Mauss J., Saintlos S.* Asymptotic Modelling for Separating Boundary Layers in a Channel // *European J. of Mechanics - B/Fluids*, 1996, **34** (2), pp. 201–211.
- [22] *Merkin J. H.* Free convection boundary layers over humps and indentations // *Q. J. of Mechanics and Applied Mathematics*, 1983, **36**, pp. 71–85.

- [23] *Messiter A. F.* Boundary layer flow near the trailing edge of a flat plate // SIAM Journal on Applied Mathematics, 1970, **18** (1), pp. 241–257.
- [24] *Meyer R. E.* A View of the Triple Deck // SIAM Journal on Applied Mathematics, 1983, **43** (4), pp. 639–663.
- [25] *El-Mistikawy T. M. A., El-Fayez F. M. N.* Supersonic triple deck flow past an eroding hump // European J. of Mechanics B/Fluids, 2005, **24**, pp. 448–456.
- [26] *Nayfeh A. H.* Triple-deck structure // Comp. and Fluids, 1991, **20** (3), pp. 269–292.
- [27] *Nefedov N. N., Nikulin E. I.* Existence and stability of periodic contrast structures in the reaction-advection-diffusion problem // Russian J. of Mathematical Physics, 2015, **22** (2), pp. 215–226.
- [28] *Nemytskii V. V., Stepanov V. V.* Qualitative theory of differential equation // N.Y.: Dover publication Inc., 1989, 523 pp.
- [29] *Prandtl L.* Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung // Verhandlungen des III Internationalen Mathematiker-Kongresses, 1904, pp. 484–491.
- [30] *Roache P. J.* Fundamentals of Computational Fluid Dynamics // Hermosa Pub., 1998, 648 pp.
- [31] *Ryzhov O. S.* Triple-Deck Instability of Supersonic Boundary Layers // AIAA Journal, 2012, **50** (8), pp. 1733–1741.
- [32] *Smith F. T., Merkin J. H.* Free convection boundary layers near corners and sharp trailing edges // ZAMP, 1982, **33**, pp. 36–52.
- [33] *Smith F. T., Merkin J. H.* Triple-Deck Solutions for Subsonic Flow Past Humps, Steps, Concave or Convex Corners and Wedged Trailing Edges // Comp. and Fluids, 1982, **10** (1), pp. 7–25.
- [34] *Smith F. T.* Flow through constricted or dilated pipes and channels: part 1 // Q. J. of Mechanics and Applied Mathematics, 1976, **XXIX** (3), pp. 343–364.
- [35] *Smith F. T.* Flow through constricted or dilated pipes and channels: part 2 // Q. J. of Mechanics and Applied Mathematics, 1976, **XXIX** (3), pp. 364–376.
- [36] *Smith F. T.* Laminar flow over a small hump on a flat plate // J. of Fluid Mechanics, 1973, **57** (4), pp. 803–824.
- [37] *Smith F. T.* On the high Reynolds number theory of laminar flows // IMA Journal of Applied Mathematics, 1982, **28**, pp. 207–281.
- [38] *Smith F. T.* On the Non-Parallel Flow Stability of the Blasius Boundary Layer // Proc. of the Royal Society A, 1979, **366**, pp. 91–109.
- [39] *Smith F. T.* The Laminar Separation of an Incompressible Fluid Streaming Past a Smooth Surface // Proc. of the Royal Society A, 1977, **356**, pp. 443–163.
- [40] *Smith F. T.* The separating flow through a severely constricted symmetric tube // J. of Fluid Mechanics, 1979, **90** (4), pp. 725–754.
- [41] *Smith F. T., Burggraf O. R.* On the development of large-sized short-scaled disturbances in boundary layers // Proc. of the Royal Society A, 1985, **399** (1816), pp. 25–55.

- [42] *Smith F. T., Duck P. W.* Separation of jets or thermal boundary-layers from a wall // Q. J. of Mechanics and Applied Mathematics, 1977, **30**, pp. 143–156.
- [43] *Smith F. T., Stewartson K.* Plate-injection into a separated supersonic boundary layer // J. of Fluid Mechanics, 1973, **58** (1), pp. 143–159.
- [44] *Smith F. T., Sykes R. I., Brighton P. W.* A two-dimensional boundary layer encountering a three-dimensional hump // J. of Fluid Mechanics, 1977, **83** (1), pp. 163–176.
- [45] *Stewartson K.* Multistructured Boundary Layers on Flat Plates and Related Bodies // Advances in Applied Mechanics, 1974, **14**, pp. 145–239.
- [46] *Stewartson K., Williams P. G.* On self-induced separation II // Mathematika, 1973, **20** (01), pp. 98–108.
- [47] *Stewartson K., Williams P. G.* Self-Induced Separation // Proc. of the Royal Society A, 1969, **312** (1509), pp. 181–206.
- [48] *Vajravelu K.* Fluid flow and heat transfer in horizontal wavy channels // Acta Mechanica, 1980, **35**, pp. 245–258.
- [49] *Van Dyke M.* An Album of Fluid Motion // Stranford: The Parabolic Press, 1988, 176 pp.
- [50] *Weyl H.* On the Differential Equations of the Simplest Boundary-Layer Problems // Annals of Mathematics, 1942, **43** (2), pp. 381–407.
- [51] *Yapalparvi R.* Double-deck structure revisited // European J. of Mechanics - B/Fluids, 2012, **31**, pp. 53–70.
- [52] *Yapalparvi R.* Theoretical and numerical analysis of viscous-inviscid interaction: Ph.D. Thesis / Yapalparvi R. — The University of Manchester, 2007. — 197 pp.
- [53] *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики // М.: Едиториал УРСС, 2003, 416 с.
- [54] *Сычев В. В.* [и др.] Асимптотическая теория отрывных течений // М.: Наука, 1987, 256 с.
- [55] *Березин Ф. А., Шубин М. А.* Уравнение Шредингера // М.: Издательство Московского университета, 1983, 392 с.
- [56] *Блохин А. М., Ткачев Д. Л.* Линейная асимптотическая неустойчивость стационарного течения полимерной среды в плоском канале в случае периодических возмущений // Сибирский журнал индустриальной математики, 2014, **17** (3), с. 13–25.
- [57] *Боголепов В. В., Нейланд В. Я.* Исследование локальных возмущений вязких сверхзвуковых течений // Аэромеханика, 1976, с. 104–118.
- [58] *Ван-Дайк М.* Методы возмущений в механике жидкости // М.: Мир, 1967, 310 с.
- [59] *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений // М.: Высшая школа, 1990, 208 с.
- [60] *Васильева А. Б., Бутузов В. Ф., Нефедов Н. Н.* Сингулярно возмущенные задачи с пограничными и внутренними слоями // Труды МИАН, 2010, **268**, с. 268–283.

- [61] *Гайдуков Р. К.* Асимптотики решений задач обтекания несжимаемой жидкостью поверхностей с малыми неровностями при больших числах Рейнольдса // Дисс. канд. физ.-мат. наук, М., 2016, 154 с.
- [62] *Гайдуков Р. К.* Существование решения уравнения типа Релея // Научно-техническая конференция студентов, аспирантов и молодых специалистов НИУ ВШЭ. Материалы конференции, 2014, с. 35.
- [63] *Гайдуков Р. К., Данилов В. Г.* Асимптотическое решение задачи о течении жидкости в двумерном канале с малыми периодическими неровностями на стенках // Современные проблемы вычислительной математики и математической физики: Международная конференция, Москва, МГУ имени М.В. Ломоносова, 16–17 июня 2014 г.: Тезисы докладов, 2014, с. 131–132.
- [64] *Гайдуков Р. К., Данилов В. Г.* Асимптотическое решение задачи о течении жидкости в двумерном канале с малыми периодическими неровностями на стенках // Седьмая международная конференция по дифференциальным и функционально-дифференциальным уравнениям: Тезисы докладов, 2014, с. 136–137.
- [65] *Гайдуков Р. К., Данилов В. Г.* Вихревые течения в пограничных слоях вдоль поверхностей с малыми неровностями // Волны и вихри в сложных средах: 5-ая Международная научная школа молодых ученых, Москва: Сборник материалов школы, 2014, с. 154–157.
- [66] *Гайдуков Р. К., Данилов В. Г.* Моделирование течений в канале с неровными стенками // Т-Comm – Телекоммуникации и Транспорт, 2013, **11/2013**, с. 84–87.
- [67] *Гергель В. П.* Современные языки и технологии параллельного программирования // М.: Издательство Московского университета, 2012, 408 с.
- [68] *Данилов В. Г., Россинский К. Ю.* Обтекание плоской пластины с периодическими неровностями малой амплитуды // Математическое моделирование, 2003, **15** (11), с. 91–109.
- [69] *Ильин А. М.* Согласование асимптотических разложений решений краевых задач // М.: Наука, 1989, 336 с.
- [70] *Коул Д.* Методы возмущений в прикладной математике // М.: Мир, 1972, 274 с.
- [71] *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика. Т 2. // М.: Гос. изд-во физико-математической литературы, 1963, 727 с.
- [72] *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика // М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006, 736 с.
- [73] *Линь Ц.-Ц.* Теория гидродинамической устойчивости // М.: Изд-во иностранной литературы, 1958, 194 с.
- [74] *Лойцянский Л. Г.* Ламинарный пограничный слой // М.: Государственное издательство физико-математической литературы, 1962, 479 с.
- [75] *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа // М.: Дрофа, 2003, 840 с.
- [76] *Нейланд В. Я.* Асимптотическая теория отрыва и взаимодействия пограничного слоя со сверхзвуковым потоком газа // Успехи механики, 1981, **4** (2), с. 3–62.

- [77] *Нейланд В. Я.* Асимптотические задачи теории вязких сверхзвуковых течений // Труды ЦАГИ, 1974, **1529**,
- [78] *Нейланд В. Я.* К теории отрыва ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа, 1969, **4**, с. 53–57.
- [79] *Олейник О. А.* Математические задачи теории пограничного слоя // Успехи математических наук, 1968, **23** (3), с. 3–68.
- [80] *Олейник О. А.* О системе уравнений теории пограничного слоя // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1963, **3** (3), с. 489–507.
- [81] *Олейник О. А., Самохин В. Н.* Математические методы в теории пограничного слоя // М.: Наука, 1997, 510 с.
- [82] *Боресков А. В.* [и др.] Параллельные вычисления на GPU. Архитектура и программная модель CUDA // М.: Издательство Московского университета, 2012, 336 с.
- [83] *Перепелкин Е. Е., Садовников Б. И., Иноземцева Н. Г.* Вычисления на графических процессорах (GPU) в задачах математической и теоретической физики // М.: URSS, 2014, 176 с.
- [84] *Пискунов Н. С.* Интегрирование уравнений теории пограничного слоя // Известия АН СССР. Серия математическая, 1943, **7** (1), с. 35–48.
- [85] *Пухначев В. В., Белоносов В. С.* Уравнения пограничного слоя в задаче истечения осесимметричной струи // Записки научных семинаров ПОМИ, 2008, **362**, с. 48–63.
- [86] *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Т.4: Анализ операторов // М.: Мир, 1982, 428 с.
- [87] *Рубан А. И.* Особое решение уравнений пограничного слоя, непрерывно продолжаемое через точку нулевого поверхностного трения // Известия АН СССР. Механика жидкости и газа, 1981, **6**, с. 42–52.
- [88] *Рубан А. И.* Численное решение локальной асимптотической задачи о нестационарном отрыве ламинарного пограничного слоя в сверхзвуковом потоке // Журнал вычислительной математики и математической физики, 1978, **18** (5), с. 1253–1265.
- [89] *Рубан А. И., Сычев В. В.* Асимптотическая теория отрыва ламинарного пограничного слоя в несжимаемой жидкости // Успехи механики, 1979, **2** (4), с. 57–95.
- [90] *Рыжов О. С.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением при околосзвуковых скоростях внешнего потока // Доклады АН СССР, 1977, **236** (5), с. 1091–1094.
- [91] *Рыжов О. С.* Уравнение нестационарного пограничного слоя с самоиндуцированным давлением // Доклады АН СССР, 1977, **234** (4), с. 780–783.
- [92] *Рыжов О. С., Жук В. И.* О свободном взаимодействии пристеночных слоев с ядром течения Пуазейля // Доклады АН СССР, 1981, **257** (1), с. 55–59.

- [93] *Рыжов О. С., Терентьев Е. Д.* О нестационарном пограничном слое с самоиндуцированным давлением // Прикладная математика и механика, 1977, **41** (6), с. 1007—1023.
- [94] *Рыжов О. С., Тимофеев С. В.* О взаимодействии вихря с локальной шероховатостью на обтекаемой поверхности // Математическое моделирование, 1992, **4** (6), с. 27—49.
- [95] *Самарский А. А.* Теория разностных схем // М.: Наука, 1989, 614 с.
- [96] *Самарский А. А., Гулин А. В.* Численные методы // М.: Наука, 1989, 429 с.
- [97] *Шлихтинг Г.* Теория пограничного слоя // М.: Наука, 1974, 712 с.

ASYMPTOTICS OF SOLUTIONS OF PROBLEMS OF INCOMPRESSIBLE FLUID FLOW ALONG SURFACES WITH SMALL IRREGULARITIES FOR LARGE REYNOLDS NUMBER

R.K. Gaydukov, V.G. Danilov

National Research University “Higher School of Economics”

rgaydukov@hse.ru, vgdanilov@mail.ru

Received 19.08.2016

We study the existence conditions for a double-deck structure of a boundary layer in typical problems of incompressible fluid flow along surfaces with small irregularities (periodic or localized) for large Reynolds number. We obtain characteristic scales (a power of a small parameter included in a solution) which lead to the double-deck structure, and we obtain a formal asymptotic solution of a problem of a flow inside an axially-symmetric pipe and a two-dimensional channel with small periodic irregularities on the wall. We prove that a quasistationary solution of a Rayleigh-type equation (which describes the flow oscillation on the “upper deck” of the boundary layer with the double-deck structure, i.e. in the classical Prandtl boundary layer) exists and is stable. We obtain a formal asymptotic solution with the double-deck structure for the problem of fluid flow along a plate with small localized irregularities such as hump, step or small angle. We construct a numerical solution algorithm for all equations which we obtained and we show the results of their applications.