О МЕТОДЕ ВКБ ДЛЯ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ: ВЕЙЛЕВСКИЙ СИМВОЛ И ФАЗОВАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Е.В. Выборный

Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики", Лаборатория "Математические методы естествознания", Москва, Россия

evgeniy.bora@gmail.com

Поступила 11.07.2016

В работе рассматривается задача о построении асимптотик решений разностных (рекуррентных) уравнений с медленно меняющимися коэффициентами. Как известно, в этом случае локальная асимптотика решений строится по аналогии с ВКБ приближением для линейных дифференциальных уравнений. В отличие от непрерывного случая, одним из существенных препятствий для широкого применения дискретного метода ВКБ является отсутствие геометрической интерпретации полученных асимптотических формул. В работе показано, что если рассматривать разностное уравнение, как псевдодифференциальное и ввести соответствующий вейливский гамильтониан, то можно построить простую геометрическую интерпретацию локальных асимптотик, точек поворота, правила Бора-Зоммерфельда и других базовых элементов квазиклассического приближения.

УДК 517.9

1 Введение

Широко известно, что существует полное соответствие между методами построения решений для однородных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами и методами построения решений для аналогичных разностных уравнений

$$\sum_{k=0}^{n} a_k\, y_{m+k} = 0, \tag{1}$$

где n — порядок уравнения ($a_0, a_n \neq 0$), а m — целочисленная переменная (см., например, обзор в книгах [1–3]). При построении решений ключевую роль играет характеристический многочлен:

$$P(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k. \tag{2}$$

Например, в случае, когда все корни λ_k, $k = 1, \ldots, n$, характеристического многочлена $P(\lambda)$ различны, общее решение разностного уравнения имеет простой вид:

$$y_m = C_1 e^{i\varphi_1 m} + \cdots + C_n e^{i\varphi_n m}, \qquad e^{i\varphi_k} = \lambda_k.$$

В настоящей работе рассматриваются разностные уравнения вида (1), где коэффициенты не являются постоянными $a_k = a_k(m)$, но медленно меняются в зависимости от m. В этом случае для разностного уравнения можно построить дискретный аналог метода ВКБ, хорошо разработанного для непрерывного случая. Тогда фундаментальная система решений может быть составлена из решений вида:

$$y_m = e^{i\Phi(m)},$$

где показатель экспоненты $\Phi(m)$ в главном определяется из уравнения

$$e^{i\Phi'(m)} = \lambda_k(m)$$

для одного из корней $\lambda_k(m)$ характеристического многочлена (2).

Общие идеи и строгое обоснование дискретного метода ВКБ, насколько нам известно, впервые появились в работе [4] для систем разностных уравнений, когда все корни характеристического многочлена различны. Затем в [5] была представлена асимптотика фундаментальной системы решений при наличии простой точки поворота, то есть в случае, когда пара корней характеристического многочлена вырождается для некоторого фиксированного m_0. Данные результаты в несколько иной форме были открыты заново в работах [6, 7], см. также [8, 9]. Заметим, что в работе [7] вопрос о поведении решения вблизи простой точки поворота был исследован значительно полнее, чем в [5]: так, в [7] была построена равномерная асимптотика фундаментальной системы решений на большом промежутке, содержащем одну простую точку поворота, а в работе [5] рассматривалась лишь малая окрестность точки поворота.

Дискретный метод ВКБ успешно применяется в различных областях математики, например, в задачах построения асимптотики зонного спектра для уравнения Хилла (см. обзор в [10, 11]), в задачах о построении асимптотик семейств ортогональных полиномов (см. обзор в [7, 12, 13]), или в теории узлов [8].

Дискретный метод ВКБ также нашел широкое применение в различных задачах квантовой механики, см. обзор в [14]. Мы отметим в первую очередь работы П.А. Брауна [14–16] (см. также ссылки в [14]), в которых дискретный метод ВКБ был развит для эрмитовых трехчленных рекуррентных соотношений и применялся в различных задачах квантовой механики. Стоит отметить также серию работ А. Гарга (A. Garg) [17–21] по спиновому туннелированию, где возникает необходимость рассматривать разностные уравнения более высоких порядков.

В работах Брауна теория дискретного метода ВКБ была развита для трехчленного рекуррентного уравнения

$$a_1(m) y_{m+1} + a_0(m) y_m + a_{-1}(m) y_{m-1} = 0, \tag{3}$$

в предположении, что коэффициенты $a_i(m)$ являются действительными и уравнение (3) является эрмитовым, то есть $\overline{a_1(m)} = a_{-1}(m+1)$. В этом случае уравнение (3) можно интерпретировать как матричное уравнение с симметричной трехдиагональной бесконечной матрицей (якобиева матрица).

Эрмитовы трехчленные действительные разностные уравнения наиболее часто встречаются в различных задачах и являются простейшей моделью для применения дискретного метода ВКБ. В работах Брауна [14, 15] были в явном виде представлены правила согласования ВКБ решений с разных сторон от простой точки поворота и аналог правила дискретизации энергетических уровней Бора-Зоммерфельда для уравнения (3).

С другой стороны, в приложениях также часто встречается случай разностных уравнений высшего порядка и уравнений с комплексными коэффициентами a_i. Отметим, что даже при рассмотрении простейшего трехчленного уравнения (3) возникают простые точки поворота двух различных типов и простые выкладки, свойственные непрерывному методу ВКБ, существенно усложняются. Так, например, правило дискретизации Бора-Зоммерфельда, представленное в [14], имеет четыре возможных варианта, в зависимости от комбинации типов точек поворота. Как показано в работе [19], для уравнений высших порядков возникают новые типы простых точек поворота, которые требуют дополнительного анализа.

Подобное усложнение теории, по сравнению с непрерывном случаем, во многом связано с потерей простой геометрической интерпретации результатов дискретного метода ВКБ в терминах классической гамильтоновой механики. Данная проблема также существенно затрудняет качественный физический анализ полученных результатов (см. обсуждение в [17]). В работах Брауна и Гарга предлагались различные варианты формально сопоставлять классический Гамильтониан $H(x, p)$ с соответствующим разностным уравнением, но данные подходы не были развиты.

В данной работе показано, что разностному уравнению можно естественным образом сопоставить классический гамильтониан $H(x, p)$, если рассматривать его как псевдодифференциальное уравнение и ввести соответствующий вейливский символ. Тогда локальные ВКБ асимптотики решений разностного уравнения приобретают стандартный ВКБ вид:

$$\frac{c}{\sqrt{v}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int p dx\right), \tag{4}$$

где $v = \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p}$ — классическая скорость. Простую геометрическую интерпретацию приобретают также точки поворота, правило Бора-Зоммерфельда и другие базовые элементы квазиклассического приближения.

Во втором разделе данной работы представлены явные формулы для гамильтониана $H(x, p)$ в случае эрмитового разностного уравнения (см. (9)). Доказано, что в случае отсутствия точек поворота решения разностного уравнения имеют асимптотику вида (4).

Далее (см. раздел 3) в работе детально рассмотрен случай уравнения второго порядка. Построены явные формулы для асимптотик решения уравнений (теорема 3.1). Представлена асимптотика решения в окрестности простой точки поворота и правила согласования ВКБ асимптотик с разных сторон от точки поворота (см. раздел 4). Представлено правило дискретизации Бора-Зоммерфельда в инвариантной форме, вне зависимости от типов точек поворота (теорема 5.1).

2 Классический гамильтониан и локальная асимптотика решений

Существенным условием применимости дискретного метода ВКБ является предположение, что коэффициенты уравнения (1), хотя и не являются постоянными, но медленно меняются при изменении целочисленной переменной m. Тогда можно считать, что в задаче присутствует малый параметр $\hbar > 0$ и коэффициенты a_k являются функциями “медленной’ переменной $x = \hbar m$.

Предположим, что $a_k = a_k(x, \hbar)$ — гладкие функции при $x = \hbar m \in I$ и $0 < \hbar < \hbar_0$, где I — некоторый фиксированный отрезок действительной оси. Тогда, обозначив $y_m = y(\hbar m) = y(x)$, можно переписать разностное уравнение в виде:

$$\sum_{k=0}^{n} a_k(x, \hbar) y(x + \hbar k) = 0. \tag{5}$$

Уравнение (6) называют $\hbar$-разностным уравнением [6–8] или уравнением с малым запаздыванием [4].

Мы предполагаем, что $y(x)$ является гладкой функцией непрерывной переменной x, но уравнение (5) рассматривается не для любых $x \in I$, а только при $x = \hbar m \in I$, где m — некоторое целое число. Данное ограничение позволяет говорить о конечной фундаментальной системе решений уравнения (5).

В дальнейшем, для простоты, мы будем рассматривать задачу только для эрмитового разностного уравнения

$$\sum_{k=-n}^{n} a_k(x, \hbar) y(x + \hbar k) = 0, \tag{6}$$

где условие эрмитовости имеет вид:

$$\overline{a_k(x,\, \hbar)} = a_{-k}(x + \hbar k,\, \hbar), \qquad k = 0, \ldots, n. \tag{7}$$

В этом случае уравнение (6) можно интерпретировать как матричное уравнение с бесконечной эрмитовой матрицей.

Введя операторы координаты $\hat{x} = x$ и импульса $\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}$ и учитывая, что

$$e^{i\hat{p}} y(x) = y(x + \hbar),$$

уравнение (6) можно записать в операторном виде:

$$\hat{H}y(x) = 0, \qquad \hat{H} = \sum_{k=-n}^{n} a_k(x,\hbar)e^{ik\hat{p}}. \tag{8}$$

Идея рассмотрения разностных уравнений с точки зрения операторных методов была представлена, например, в [22].

Несложно видеть, что условие эрмитовости уравнения (7) означает формальную самосопряженность оператора $\hat{H}$.

Существуют различные способы сопоставления классического гамильтониана $H(x,p)$ оператору $\hat{H}$, см., например, обзор в [23,24]. Оказывается, что асимптотические формулы дискретного метода ВКБ приобретают наиболее простой вид, если в качестве классического гамильтониана выбрать вейлевский символ оператора $\hat{H}$, то есть символ, симметризованный по переменным x и p.

Предложение 2.1.

1. *Вейлевский символ оператора $\hat{H}$ имеет вид:*[1]

$$H(x,p) = \sum_{k=-n}^{n} a_k\left(x - \frac{\hbar k}{2}, \hbar\right)e^{ikp}, \tag{9}$$

$H(x,p)$ — гладкая функция на цилиндре $I \times \mathbb{T}^1$.

2. *Условие эрмитовости разностного уравнения (6) приобретает вид:*

$$H(x,p) = \overline{H(x,p)},$$

то есть гамильтониан H должен быть действительной функцией.

3. *Если коэффициенты a_k эрмитового разностного уравнения (6) действительны, то имеет место симметрия $H(x,-p) = H(x,p)$, и гамильтониан можно записать в виде разложения по косинусам:*

$$H(x,p) = a_0(x,\hbar) + 2a_1\left(x - \frac{\hbar}{2}, \hbar\right)\cos(p) + \cdots + 2a_n\left(x - \frac{\hbar n}{2}, \hbar\right)\cos(np). \tag{10}$$

Доказательство. Воспользуемся известным (см. [23,24]) операторным тождеством, отражающим связь вейлевского и упорядоченного квантования:

$$H(\overset{w}{\hat{x}}, \overset{w}{\hat{p}}) = H\left(\overset{2}{\hat{x}}, \frac{\overset{1}{\hat{p}} + \overset{3}{\hat{p}}}{2}\right),$$

где номера над операторами означают порядок их действия, а символ w означает вейливскую симметризацию операторов. Тогда для символа (9) получаем:

$$H(\overset{w}{\hat{x}}, \overset{w}{\hat{p}}) = \sum_{k=-n}^{n} \exp\left(\frac{ik\hat{p}}{2}\right) a_k\left(\hat{x} - \frac{\hbar k}{2}, \hbar\right)\exp\left(\frac{ik\hat{p}}{2}\right) = \sum_{k=-n}^{n} a_k\left(\hat{x}, \hbar\right)\exp\left(ik\hat{p}\right) = \hat{H}.$$

Таким образом, вейлевский символ оператора $\hat{H}$ — это $H(x,p)$, что и требовалось доказать.

Второй пункт данного предложения является простым следствием того, что оператор $\hat{H}$ является самосопряженным, а вейлевский символ самосопряженных операторов является действительным [23].

Третий пункт данного предложения проверяется непосредственно. □

Заметим, что гамильтониан $H(x,p)$ является 2π-периодической функцией от импульса p. Фазовое пространство соответствующей классической гамильтоновой системы является цилиндром $I \times \mathbb{T}^1$, где x и p — координаты Дарбу.

[1]Здесь и далее опущено явное обозначение зависимости гамильтониана H от малого параметра $\hbar$.

Подобный нестандартный вид гамильтониана приводит к ряду важных отличий по сравнению с привычным случаем $H = p^2/2 + V(x)$. Например, точки поворота, то есть точки, в которых скорость $v = \dot{x}$ равна нулю, определяемые из уравнений:

$$\frac{\partial H}{\partial p}(x,p) = 0, \qquad H(x,p) = 0, \tag{11}$$

не обязательно соответствуют импульсу $p = 0$, а могут отвечать произвольному, в том числе и комплексному, импульсу p.

Будем говорить, что x_0 — точка поворота, если точка (x_0, p_0) является решением уравнений (11) для некоторого $p_0 \in \mathbb{C}$.

Уравнение

$$H(x,p) = 0, \tag{12}$$

определяет импульс p как многозначную комплексную функцию переменной x. В окрестности каждой точки, за исключением точек поворота, уравнение (12) определяет $2n$ различных гладких ветвей $p_1(x), \dots, p_{2n}(x)$, с точностью до сдвига на 2π. В случае уравнения с действительными коэффициентами (10) всегда можно считать, что $p_{k+n}(x) = -p_k(x)$.

В точках поворота возникает пересечение ветвей многозначной функции $p(x)$. Точку поворота называют простой, если в этой точке не равно нулю ускорение $\ddot{x}$:

$$\ddot{x} = \frac{d}{dt}\frac{\partial H}{\partial p} = \frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\,\dot{p} + \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial p}\,\dot{x} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\,\frac{\partial H}{\partial x}.$$

Следовательно, точка поворота (x_0, p_0) является простой, если $H''_{pp}(x_0,p_0) \neq 0$ и $H'_x(x_0,p_0) \neq 0$. Тогда в окрестности точки поворота (x_0, p_0) гамильтониан H имеет вид:

$$H(x,p) = \frac{H''_{pp}(x_0,p_0)}{2}(p-p_0)^2 + H'_x(x_0,p_0)\,(x-x_0) + \dots .$$

В таких точках происходит не более чем попарное пересечение ветвей импульса p.

Заметим, что гамильтониан $H(x,p)$, а следовательно, и ветви функции $p(x)$ зависят от малого параметра $\hbar$, для сокращения записи мы опускаем явное указание $\hbar$. Из условий гладкости следует, что справедливо асимптотическое разложение по $\hbar$:

$$p_k(x) = p_k^0(x) + \hbar\, p_k^1(x) + \cdots .$$

Известно, что в случае отсутствия точек поворота асимптотика решений уравнения (6) имеет ВКБ вид. Общая теорема была доказана в работе [6]. Для полноты изложения приведем формулировку соответствующей теоремы для эрмитового уравнения (6) в обозначениях, применяемых в настоящей работе.

Теорема 2.1 (O. Costin, R. Costin)**.**
Пусть выполнены условия:

1. *Коэффициенты $a_k(x,\hbar)$ являются гладкими функциями на $I \times [0, \hbar_0]$.*
2. *Уравнение (6) не является сингулярным, то есть*
$$a_n(x,0) \neq 0, \qquad \forall x \in I.$$
3. *На отрезке I отсутствуют точки поворота:*
$$\inf_{x\in I} |p_k^0(x) - p_l^0(x)| > 0, \qquad \forall k \neq l.$$
4. *Ветви функции $p(x)$ можно упорядочить так, что*
$$\operatorname{Im} p^0_{\sigma(1)}(x) \leq \operatorname{Im} p^0_{\sigma(2)}(x) \leq \dots \leq \operatorname{Im} p^0_{\sigma(2n)}(x), \qquad \forall x \in I,$$
где σ — некоторая перестановка индексов $\{1, 2, \dots 2n\}$.

Тогда существует $\hbar_1 \in (0, \hbar_0]$ *и гладкие функции* $\Phi_k(x,\hbar)$ *на* $I \times [0,\hbar_1]$ *такие, что функции* $y_k(x,\hbar)$ *вида:*

$$y_k(x,\hbar) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\Phi_k(x,\hbar)\right), \qquad k = 1,\ldots,2n, \tag{13}$$

являются линейно независимыми решениями уравнения (6) *для каждого* $\hbar \in (0,\hbar_1]$. *Таким образом, функции* (13) *образуют фундаментальную систему решений уравнения* (6).

Замечание 1. *Условие 2 можно ослабить, считая, что точки поворота отсутствуют не в главном при* $\hbar = 0$, *а хотя бы для некоторого порядка* N, *то есть*

$$\inf_{x\in I} |p_k(x) - p_l(x)| \geq const\,\hbar^N, \qquad \forall l \neq m.$$

Тогда, как показано в работе [6], теорема 2.1 сохраняет силу.

Замечание 2. *Отметим ,что в работе [6] не вводилось понятие классического гамильтониана системы* $H(x,p)$ *и ветвей функции* $p(x)$, *а теорема была сформулирована в терминах корней характеристического многочлена.*

Явный вид разложения функций $\Phi_k(x,\hbar)$ по степеням $\hbar$ можно найти, подставляя (13) в уравнение (6) и приравнивая коэффициенты при равных степенях $\hbar$. Следовательно, если

$$\Phi_k(x,\hbar) = \Phi_k^0(x) + \hbar\Phi_k^1(x) + \cdots, \tag{14}$$

то в главном получаем уравнение на $\Phi_k^0(x)$:

$$\frac{d\Phi_k^0(x)}{dx} = p_k^0(x).$$

Таким образом, если $\operatorname{Im} p_k^0(x) \neq 0$, то соответствующие решение $y_k(x)$ экспоненциально растет или убывает по модулю.

Условие 4 теоремы 2.1 связано с так называемым эффектом Стокса (см., например, [25, 26]). Переход через точки, в которых меняется порядок мнимых частей ветвей импульса, но сами ветви не пересекаются, можно интерпретировать как аналог перехода через линию Стокса в теории комплексного метода ВКБ. В этом случае доминирующие решение с одной стороны от такой точки может оказаться доминируемым с другой стороны. Как будет показано далее, для уравнений второго порядка с действительными коэффициентами условие 4 является следствием отсутствия точек поворота (условие 3) и данный эффект не проявляется.

Оказывается, что наиболее простое асимптотическое разложение (14) приводит к сложным формулам для амплитудного члена $\Phi_k^1(x)$. Вопрос о выборе вида асимптотического разложения для функции (14) и для решения в целом не является столь однозначным. Например, в работе [4] и [6] предлагались различные способы записи асимптотического разложения для решений y_k, основанные на асимптотике корней характеристического многочлена, а в работах [15] и [17] предлагались асимптотические формулы, основанные на различном эвристическом выборе классического гамильтониана H.

Одним из существенных преимуществ использования вейливского символа $H(x,p)$ состоит в том, что асимптотика решений разностного уравнения (6) имеет стандартный ВКБ вид.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Тогда для решений* $y_k(x,\hbar)$ *справедливы асимптотические формулы:*

$$y_k(x,\hbar) = \frac{1}{\sqrt{v_k(x)}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_{x_0}^{x} p_k(x)dx\right)[1 + O(\hbar)], \qquad k = 1,\ldots,2n, \tag{15}$$

где $p_k(x) = p_k(x,\hbar)$ — *гладкая при* $x \in I$ *ветвь импульса,* $v_k(x) = H_p'(x, p_k(x)) \neq 0$ — *классическая скорость на данной траектории, а* x_0 — *произвольная фиксированная точка из* I.

Существенное отличие асимптотики (15) от асимптотик, основанных на корнях характеристического многочлена, которые были представлены в работах [4, 6], состоит в возникновении сдвига $\frac{\hbar k}{2}$ для аргумента коэффициента $a_k(x,\hbar)$ в гамильтониане (9). Наличие этих сдвигов приводит к тому, что даже если коэффициенты уравнения a_k не зависели явно от параметра $\hbar$, то гамильтаниан (9) все равно будет явно зависеть от $\hbar$, а следовательно, и импульс p в формуле (15). Таким образом, зависимость от $\hbar$ возникает уже в главном члене разложения фазы Φ_k, что принципиально отличает асимптотику ВКБ вида (15) от простого разложения фазы Φ_k по степеням $\hbar$.

В работах [14, 15] было замечено, что полуцелый сдвиг в аргументе коэффициентов разностного уравнения приводит к упрощению асимптотических формул для решений, но происхождение данного эффекта не было выявлено.

3 Асимптотика решений уравнения второго порядка

Рассмотрим подробнее спектральную задачу для эрмитового уравнения второго порядка с действительными коэффициентами. Записывая рекуррентное соотношение в виде $\hbar$-разностного уравнения, получаем:

$$a(x+\hbar,\hbar)y(x+\hbar)+u(x,\hbar)y(x)+a(x,\hbar)y(x)=Ey(x), \tag{16}$$

где $a(x,\hbar)$ и $u(x,\hbar)$ — гладкие действительные функции, $x=\hbar m\in I$ — медленная переменная, а E — спектральный параметр (энергия).

Мы предполагаем, что уравнение (16) не является сингулярным, то есть

$$a(x,0)\neq 0, \qquad \forall x\in I.$$

В конкретных задачах уравнение (16) дополняется либо краевыми условиями на границах в случае конечного интервала I, либо условиями ограниченности решений $y(x)$ для неограниченного интервала I.

Как следует из предложения 2.1, гамильтониан уравнения (16) имеет вид:

$$H(x,p)=u(x,\hbar)+2a\left(x+\frac{\hbar}{2},\,\hbar\right)\cos(p). \tag{17}$$

Действительно, $a_1(x-\hbar/2,\hbar)=a(x+\hbar-\hbar/2,\hbar)=a(x+\hbar/2,\hbar)$.

Тогда уравнение $H(x,p)=E$ принимает вид:

$$u(x,\hbar)+2a\left(x+\frac{\hbar}{2},\,\hbar\right)\cos(p)=E. \tag{18}$$

Данное уравнение определяет две ветви импульса $p_{1,2}=\pm p(x)$ как неявно заданные функции. Из условий эрмитовости также следует, что для каждого решения $p(x)$ уравнения (18) комплексно сопряженная функция $\overline{p(x)}$ также является решением.

Найдем явный вид зависимости импульса от координаты. Для этого перепишем уравнение (18), определив вспомогательную функцию $b(x,\hbar)$:

$$\cos(p)=b(x,\hbar), \qquad b(x,\hbar)=\frac{E-u(x,\hbar)}{2a\,(x+\hbar/2,\,\hbar)}.$$

Возможны три различных случая:

I Классически допустимая зона, где импульс p принимает действительные значения. Возникает при условии

$$|b(x,\hbar)|<1.$$

Тогда

$$p(x)=\arccos(b(x,\hbar))=\arccos\left(\frac{E-u(x,\hbar)}{2a\,(x+\hbar/2,\,\hbar)}\right).$$

II Классически запрещенная зона, где импульс p принимает чисто мнимые значения. Возникает при условии

$$b(x,\hbar)>1.$$

Тогда

$$p(x)=i\,\mathrm{arch}(b(x,\hbar))=i\,\mathrm{arch}\left(\frac{E-u(x,\hbar)}{2a\,(x+\hbar/2,\,\hbar)}\right),$$

где $\operatorname{arcch}(b) = \ln\left(b + \sqrt{b^2 - 1}\right) > 0$.

III Классически запрещенная зона, где импульс p принимает комплексные значения и действительная часть p равна π. Возникает при условии

$$b(x, \hbar) < -1.$$

Тогда

$$p(x) = \pi + i \operatorname{arcch}(-b(x, \hbar)) = \pi + i \operatorname{arcch}\left(\frac{u(x, \hbar) - E}{2a\,(x + \hbar/2,\, \hbar)}\right).$$

Наличие данного решения не противоречит условиям эрмитовости, поскольку сопряженное решение $\overline{p(x)}$ отличается от второй ветви $p_2 = -p(x)$ на 2π, а мы отождествляем соответствующие точки.

Таким образом, область I изменения координаты x разбивается на зоны трех типов. Подобная классификация впервые была рассмотрена в работе [15]. Будем называть соответствующие зоны — зонами I, II и III типа.

Точки поворота определяются из уравнения

$$v = \frac{\partial H}{\partial p} = -2a\,(x + \hbar/2,\, \hbar) \sin p = 0.$$

Следовательно, точки поворота соответствуют значениям импульса $p = 0$ или $p = \pi$. Подставляя в уравнение (18) импульс $p = 0$ и $p = \pi$, получаем уравнение на координаты точек поворота:

$$V_{\pm}(x) = u(x, \hbar) \pm 2a\left(x + \frac{\hbar}{2},\, \hbar\right) = E,$$

где V_+ и V_- отвечают $p = 0$ и $p = \pi$ соответственно. Функции $V_{\pm}$ называют потенциальными кривыми уравнения (16) (см. [15]). В терминах функции $b(x, \hbar)$, получаем, что точки поворота отвечают решениям уравнения

$$b(x, \hbar) = \pm 1,$$

где знак "+" соответствует $p = 0$, а знак "−" соответствует $p = \pi$.

Нарисовав графики функций $V_{\pm}$ на плоскости (x, E), можно видеть, как изменяется положение точек поворота в зависимости от спектрального параметра E. Во многом анализ данной картины напоминает рассмотрение графика потенциала $V(x)$ для гамильтониана $p^2/2 + V(x)$, который также можно интерпретировать, как кривую зависимости точек поворота от энергии E. Так например, точка поворота с $p = 0$ или $p = \pi$ является простой, если в этой точке не равна нулю производная $V_+' \neq 0$ или соответственно $V_-' \neq 0$. Действительно, величина ускорения $\ddot{x}$ в точках поворота имеет вид:

$$\ddot{x} = -\frac{\partial^2 H}{\partial p^2}\frac{\partial H}{\partial x} = \pm 2a(x + \hbar/2, \hbar) V_{\pm}'(x).$$

Простые точки поворота, отвечающие $p = 0$, то есть решения уравнения $V_+ = E$ или $b(x, \hbar) = 1$, отделяют классически разрешенную зону I и классически запрещенную зону II, в которой действительная часть импульса равна нулю. Аналогично, простые точки поворота, отвечающие $p = \pi$, отделяют классически разрешенную зону I и классически запрещенную зону III, в которой $\operatorname{Re} p = \pi$. Классически запрещенные зоны II и III не имеют общих границ, если в задаче присутствуют только простые точки поворота.

Заметим, что в каждой из трех зон выполнены все условия теоремы 2.1, в том числе автоматически выполняется условие 4, поскольку мнимые части импульсов либо равны нулю, либо имеют разные знаки.

Простым следствием представленного анализа и общей теоремы 2.2 является следующая теорема.

Теорема 3.1.

Пусть разностное уравнение (16) *с действительными гладкими коэффициентами не является сингулярным:*

$$a(x, 0) \neq 0.$$

Тогда на любом отрезке, не содержащем точек поворота ($|b(x,0)| \neq 1$) *существует фундаментальная система решений* $y_1(x)$, $y_2(x)$ *уравнения* (16) *такая, что справедливы асимптотические формулы:*

$$y_{1,2}(x) = \frac{1}{\sqrt{v(x)}} \exp\left(\pm\frac{i}{\hbar}\int_{x_0}^{x} p(x)dx\right)[1+O(\hbar)], \tag{19}$$

где x_0 *и* $x = \hbar m$ *принадлежат рассматриваемому отрезку.*

Явный вид зависимости скорости v от координаты x с точностью $O(\hbar)$ имеет вид:

$$v = \sqrt{4a^2(x,0) - (E - u(x,0))^2} + O(\hbar) = \sqrt{D(x)} + O(\hbar),$$

где величина $D(x) = 4a^2(x,0) - (E-u(x,0))^2$ положительна в классически допустимой области и отрицательна в запрещенных областях.

В зависимости от рассматриваемой зоны, явные формулы для асимптотики фундаментальной системы решений примут вид:

I В классически допустимой зоне I ($|b| < 1$) существуют решения с асимптотикой:

$$y_1(x) = \frac{1}{(D(x))^{1/4}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x_0}^{x} \arccos\left(\frac{E-u(x,\hbar)}{2a\,(x+\hbar/2,\,\hbar)}\right)dx\right) + O(\hbar),$$

$$y_2(x) = \frac{1}{(D(x))^{1/4}} \sin\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x_0}^{x} \arccos\left(\frac{E-u(x,\hbar)}{2a\,(x+\hbar/2,\,\hbar)}\right)dx\right) + O(\hbar).$$

В данной области решения разностного уравнения быстро осциллируют.

II В классически запрещенной зоне II ($b > 1$) существуют решения с асимптотикой:

$$y_{1,2}(x) = \frac{1+O(\hbar)}{(-D(x))^{1/4}} \exp\left(\pm\frac{1}{\hbar}\int_{x_0}^{x} \operatorname{arcch}\left(\frac{E-u(x,\hbar)}{2a\,(x+\hbar/2,\,\hbar)}\right)dx\right).$$

В данной области решения разностного уравнения экспоненциально растут или убывают.

III В классически запрещенной зоне III ($b < -1$) существуют решения с асимптотикой:

$$y_{1,2}(x) = \frac{(-1)^m+O(\hbar)}{(-D(x))^{1/4}} \exp\left(\pm\frac{1}{\hbar}\int_{x_0}^{x} \operatorname{arcch}\left(\frac{u(x,\hbar)-E}{2a\,(x+\hbar/2,\,\hbar)}\right)dx\right),$$

где $x = \hbar m$. В данной области решения разностного уравнения быстро осцилируют как $(-1)^m$ и экспоненциально растут или убывают по модулю.

4 Асимптотика вблизи точек поворота и правила согласования решений

Теоремы предыдущих разделов дают представление о локальной асимптотике решений разностного уравнения на отрезке, не содержащем точек поворота. Следующим базовым шагом ВКБ приближения является построение асимптотики решений в окрестности простой точки поворота и построение правил согласования ВКБ асимптотик с разных сторон от простой точки поворота. Данный результат позволяет строить глобальные асимптотики решений в задачах с несколькими простыми точками поворота.

Строгие результаты об асимптотике фундаментальной системы решений на отрезке, содержащем одну простую точку поворота были представлены в работах [5–7, 27]. Для наших целей наиболее удобной является формулировка, представленная в работе [6]. Приведем соответствующую теорему в обозначениях, применяемых в настоящей работе.

Теорема 4.1 (O. Costin, R. Costin)**.**
Рассмотрим уравнение (16) *при* $x \in I$, *предполагая, что на отрезке* I *присутствует единственная простая точка поворота* $x_0 = x_0(\hbar) \in I$. *Предположим, что*

$$b(x_0(\hbar),\hbar)=1, \qquad \frac{\partial b}{\partial x}\Big|_{x=x_0}>0.$$

Зафиксируем два числа α и β так, что $1/2<\alpha<\beta<2/3$. Тогда:

1. *Для $|x-x_0|>\hbar^\beta$ уравнение (16) имеет по два линейно независимых решения ВКБ вида (19) с каждой стороны от точки x_0.*
2. *Для $|x-x_0|<\hbar^\alpha$ уравнение (16) имеет два линейно независимых решения вида*

$$y_\pm(x)=\exp\left\{\Phi_\pm(\hbar^{-2/3}(x-x_0),\hbar^{1/3})\right\},$$

где $\Phi_\pm$ — гладкие функции, $\exp(\Phi_\pm(z,0))=Ai(\Theta z)\pm Bi(\Theta z)$, Ai и Bi — это функции Эйри [26]. Константа Θ и следующие члены разложения функции $\Phi_\pm$ могут быть найдены при подстановке асимптотики решений в исходное уравнение.

Кроме того, у уравнения (16) существует частное решение y_0 вида:

$$y_0(x)=Ai(\Theta\hbar^{-2/3}(x-x_0))\left[1+O(\hbar^{1/3})\right], \tag{20}$$

при $|x-x_0|<\hbar^\alpha$.

Теорема 4.1 показывает, что ВКБ решения вида (19) применимы достаточно близко к простым точкам поворота, вплоть до $\hbar^\beta$ окрестности точки поворота x_0, а в малой окрестности порядка $\hbar^\alpha$ решения приближаются функциями Эйри, как и в непрерывном случае. Оба асимптотических представления решений справедливы при $\hbar^\beta<|x-x_0|<\hbar^\alpha$, что позволяет согласовать ВКБ асимптотики решений с разных сторон от точки поворота.

Заметим, что в теореме 4.1 рассмотрен только случай точек поворота с $p=0$, когда слева от точки x_0 расположена классически допустимая зона I, а справа — классически запрещенная зона II. Основываясь на теореме 4.1, можно получить следующие правила согласования ВКБ асимптотик.

Предложение 4.1.

Пусть выполнены все условия теоремы 4.1. Тогда, если решение $y(x)$ уравнения (16) имеет в классически запрещенной зоне $(x>x_0)$ асимптотику вида

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{|v|}}\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_{x_0}^{x}|p|dx\right)[1+O(\hbar)], \tag{21}$$

то в классически разрешенной зоне $(x<x_0)$ решение имеет вид:

$$y(x)=\frac{2}{\sqrt{v}}\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_0}pdx-\frac{\pi}{4}\right)+O(\hbar). \tag{22}$$

Важно отметить, что обратное утверждение неверно, то есть, если решение в классически допустимой зоне имеет вид (22), то вообще говоря, оно не обязательно экспоненциально убывает в классически запрещенной зоне. В действительности, подобное решение будет экспоненциально расти в классически запрещенной зоне с амплитудой порядка $O(\hbar)$. Таким образом, правила перехода принципиально применимы только в одну сторону.

Аналогичное правило согласования решений для случая, когда классически запрещенная зона находится слева от точки поворота x_0, получается при замене x на $-x$. Тогда экспоненциально убывающие решение в классически запрещенной зоне

$$y(x)=\frac{1}{\sqrt{|v|}}\exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_0}|p|dx\right)[1+O(\hbar)],$$

переходит в

$$y(x)=\frac{2}{\sqrt{v}}\cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x_0}^{x}pdx-\frac{\pi}{4}\right)+O(\hbar),$$

в классически разрешенной зоне.

Правила перехода (21)–(22) полностью совпадают с правилами перехода в непрерывном методе ВКБ для уравнения Шредингера (см., например, [28]). Различия возникают при рассмотрении точек поворота, в которых $p = \pi$. Данный случай можно свести к исходному сдвигом по импульсам на π, то есть умножением волновой функции $y(x)$ на плоскую волну $e^{i\pi x/\hbar}$.

Предложение 4.2.

Пусть $y(x)$ решение уравнения (16) с простой точкой поворота x_0:

$$b(x_0(\hbar), \hbar) = -1, \qquad \frac{\partial b}{\partial x}\Big|_{x=x_0} < 0$$

и $y(x)$ экспоненциально убывает вглубь классически запрещенной зоны ($x > x_0$):

$$y(x) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{|v|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_{x_0}^{x} \operatorname{arcch}(-b(x,\hbar))dx\right)[1 + O(\hbar)],$$

где $x = \hbar m$.

Тогда в классически разрешенной зоне ($x < x_0$) решение имеет вид:

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{v}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_0} \arccos(b(x,\hbar))\,dx - \frac{\pi}{\hbar}x_0 + \frac{\pi}{4}\right) + O(\hbar). \tag{23}$$

Доказательство. Пусть $\tilde{y}(x) = e^{i\pi x/\hbar}y(x)$. Тогда $\tilde{y}$ удовлетворяет уравнению

$$-a(x+\hbar,\hbar)\tilde{y}(x+\hbar) + u(x,\hbar)y(x) - a(x,\hbar)\tilde{y}(x) = E\tilde{y}(x),$$

то есть уравнению аналогичного вида с гамильтонианом, сдвинутым на π по импульсам:

$$\tilde{H}(x,p) = u(x,\hbar) - 2a(x+\hbar/2,\,\hbar)\cos(p) = H(x, \pi - p).$$

Следовательно, если x_0 — точка поворота H с импульсом $p = \pi$, то x_0 — точка поворота гамильтониана $\tilde{H}$ с импульсом $p = 0$.

Функция $\tilde{y}(x) = e^{i\pi x/\hbar}y(x)$ в классически запрещенной зоне имеет вид:

$$\tilde{y}(x) = \frac{1}{\sqrt{|v|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_{x_0}^{x} \operatorname{arcch}(\tilde{b}(x,\hbar))dx\right)[1 + O(\hbar)],$$

где $\tilde{b}(x,\hbar) = -b(x,\hbar)$.

Применяя предложение 4.1, получаем, что слева от точки x_0 в классически разрешенной зоне решение $\tilde{y}$ имеет вид:

$$\tilde{y}(x) = \frac{2}{\sqrt{v}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_0} \arccos(\tilde{b}(x,\hbar))\,dx - \frac{\pi}{4}\right) + O(\hbar).$$

Сделав обратную замену, получаем:

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{2(-1)^m}{\sqrt{v}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_0} \arccos(-b(x,\hbar))\,dx - \frac{\pi}{4}\right) + O(\hbar) = \\
&= \frac{2(-1)^m}{\sqrt{v}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_0} (\pi - \arccos(b(x,\hbar)))\,dx - \frac{\pi}{4}\right) + O(\hbar) = \\
&= \frac{2(-1)^m}{\sqrt{v}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_0} \arccos(b(x,\hbar))\,dx - \frac{\pi}{\hbar}(x_0 - x) + \frac{\pi}{4}\right) + O(\hbar) = \\
&= \frac{2}{\sqrt{v}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_0} \arccos(b(x,\hbar))\,dx - \frac{\pi}{\hbar}x_0 + \frac{\pi}{4}\right) + O(\hbar).
\end{aligned}$$

Что и требовалось доказать. □

В случае, когда классически допустимая зона расположена справа от классически запрещенной зоны III, решение, экспоненциально убывающее в классически запрещенной зоне ($x < x_0$):

$$y(x) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{|v|}} \exp\left(-\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_0} p dx\right)[1 + O(\hbar)],$$

в классически допустимой зоне ($x > x_0$) будет иметь вид:

$$y(x) = \frac{2}{\sqrt{v}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x_0}^{x} p dx + \frac{\pi}{\hbar}x_0 + \frac{\pi}{4}\right) + O(\hbar). \tag{24}$$

Таким образом, в правилах согласования решения в простых точках поворота с импульсом $p = \pi$ возникает необычный сдвиг в фазе косинуса, не возникающий в задачах непрерывного метода ВКБ.

5 Правило дискретизации Бора-Зоммерфельда

Рассмотрим задачу об определении асимптотики решения, локализованного в классические допустимой области между двумя простыми точками поворота $x_1 < x_2$, и экспоненциально убывающее вглубь классически запрещенных областей.

Возможны 4 случая, в зависимости от значений импульса p в точках поворота x_1 и x_2:

1. Классически запрещенные области относятся ко II типу:
$$p(x_1) = 0, \quad p(x_2) = 0.$$
2. Классически запрещенные области относятся к III типу:
$$p(x_1) = \pi, \quad p(x_2) = \pi.$$
3. Смешанный случай:
$$p(x_1) = 0, \quad p(x_2) = \pi.$$
4. Смешанный случай:
$$p(x_1) = \pi, \quad p(x_2) = 0.$$

Во всех случаях, применяя правила перехода, получаем, что решение $y_1(x)$, экспоненциально убывающие вглубь классически запрещенной зоны $x < x_1$, имеет вид:

$$y(x) = \frac{2C_1}{(-D)^{1/4}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x} \arccos(b(x,\hbar))dx + \phi_1\right) + O(\hbar),$$

а решение $y(x)$, экспоненциально убывающее вглубь классически запрещенной зоны $x > x_2$, имеет вид:

$$y_2(x) = \frac{2C_2}{(-D)^{1/4}} \cos\left(\frac{1}{\hbar}\int_{x}^{x_2} \arccos(b(x,\hbar))dx + \phi_2\right) + O(\hbar),$$

где смещения фазы ϕ_i^s для случая $s = 1, 2, 3, 4$ имеют вид:

$$\begin{aligned} &\phi_1^1 = -\pi/4, && \phi_2^1 = -\pi/4, \\ &\phi_1^2 = \pi/4 + x_1/\hbar, && \phi_2^2, = \pi/4 - x_2/\hbar, \\ &\phi_1^3 = -\pi/4, && \phi_2^3 = \pi/4 - x_2/\hbar, \\ &\phi_1^4 = \pi/4 + x_1/\hbar, && \phi_2^4, = -\pi/4. \end{aligned}$$

Сопоставляя два вида представления решения, получаем, что:

$$\frac{1}{\hbar}\int_{x_1}^{x_2} \arccos(b(x,\hbar))dx = \pi n - \phi_1^s - \phi_2^s + O(\hbar),$$

где n — целое число.

Таким образом, для различных комбинаций типов точек поворота получаем следующие правила дискретизации энергетических уровней.

1. Если $p(x_1) = 0,\ p(x_2) = 0$, то

$$\int_{x_1}^{x_2} \arccos(b(x,\hbar))dx = \hbar\pi\left(n+\frac{1}{2}\right)+O(\hbar^2).$$

2. Если $p(x_1)=\pi,\ p(x_2)=\pi$, то

$$\int_{x_1}^{x_2} \arccos(b(x,\hbar))dx = \hbar\pi\left(n+\frac{1}{2}+\frac{x_2-x_1}{\hbar}\right)+O(\hbar^2).$$

3. Если $p(x_1)=0,\ p(x_2)=\pi$, то

$$\int_{x_1}^{x_2} \arccos(b(x,\hbar))dx = \hbar\pi\left(n+\frac{x_2}{\hbar}\right)+O(\hbar^2).$$

4. Если $p(x_1)=\pi,\ p(x_2)=0$, то

$$\int_{x_1}^{x_2} \arccos(b(x,\hbar))dx = \hbar\pi\left(n-\frac{x_1}{\hbar}\right)+O(\hbar^2).$$

Введение гамильтониана H и соответствующей классической механической системы позволяет записать правило дискретизации энергетических уровней Бора-Зоммерфелда в простой форме.

Заметим, что классически допустимая зона, ограниченная двумя простыми точками поворота, является проекцией на ось координат x траектории периодического движения классической гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(x,p)$ на цилиндре. Траектории, у которых значения импульса в точках поворота x_1 и x_2 не совпадают, охватывают цилиндр фазового пространства, а траектории, у которых значения импульсов совпадают, могут быть стянуты в точку. Сопоставим каждому значению энергии E соответствующую траекторию периодического движения $\gamma=\gamma(E)$.

Теорема 5.1. *Правило дискретизации энергетических уровней на траекториях периодического движения с гамильтонианом H может быть записано в стандартном виде, не зависящем от типов точек поворота:*

$$\frac{1}{2\pi}\oint_\gamma xdp = \hbar(n+\sigma)+O(\hbar^2), \tag{25}$$

где индекс $\sigma=0$, если траектория γ охватывает цилиндр, и $\sigma=1/2$ в противном случае.

Доказательство. В случае, когда $p(x_1)=p(x_2)=0$, теорема очевидна. Разберем случай $p(x_1)=p(x_2)=\pi$. Тогда

$$\int_{x_1}^{x_2} \arccos(b(x,\hbar))dx = \hbar\pi\left(n+\frac{1}{2}+\frac{x_2-x_1}{\hbar}\right)+O(\hbar^2).$$

Если одна ветвь импульса $p(x)=\arccos(b(x,\hbar))$, то вторая ветвь импульса, которая непрерывно соединяется с первой в точках поворота имеет вид $2\pi-p(x)$. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi}\oint_\gamma pdx = \frac{1}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx - \frac{1}{2\pi}\int_{x_1}^{x_2}(2\pi-p(x))dx = \frac{1}{\pi}\int_{x_1}^{x_2} p(x)dx-(x_2-x_1) = \hbar(n+1/2)+O(\hbar^2).$$

Аналогично разбираются и оставшиеся случаи. □

Данное правило квантования полностью согласуется с результатами, которые могут быть получены общими методами канонического оператора [29]. Применение дискретного метода ВКБ позволяет получить не только асимптотику спектра трехчленного рекуррентного уравнения, но и асимптотику соответствующих собственных функций.

Можно показать, что правило дискретизации энергетических уровней (25) носит универсальный характер для систем, заданных на цилиндре. Подобной задачей является, например, задача об уравнении Шредингера для квантовой частицы, движущейся по окружности (см., например, в [11]). Представленное правило дискретезации (25) также без изменений переносится на случай разностных эрмитовых уравнений высших порядков.

Заметим, что интеграл в формуле (25) берется от дифференциальной формы xdp. Для траекторий, охватывающих цилиндр, замена на интеграл от pdx не является корректной, поскольку координата p не определена глобально на цилиндре. В случае траекторий, не охватывающих цилиндр, правило дискретизации (25) может быть переписано как правило дискретизации фазовой площади:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\Sigma} dp \wedge dx = \hbar(n+1/2) + O(\hbar^2),$$

где Σ — область фазового пространства, ограниченная траекторией γ.

Если в исходной задаче переменная x, принимающая дискретные значения, определена не на целочисленной сетке значений, кратных $\hbar$, т.е. $x = \hbar m$, а принимает значения вида $x = \varkappa + \hbar m$, где $\varkappa \in (0, \hbar)$, а m — целые числа, то величина $\varkappa$ должна быть учтена в правиле дискретизации для траекторий, охватывающих цилиндр:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\gamma} x dp = \hbar n + \varkappa + O(\hbar^2).$$

Данное правило получается простым сдвигом по переменной x. Заметим, что это правило является точным, если в качестве гамильтониана $H(x,p)$ на цилиндре рассмотреть саму координату x.

Благодарности

Данная работа выполнена при поддержке программы фундаментальных исследований ВШЭ в 2016 году.

Список литературы

[1] Agarwal R. P. Difference equations and inequalities: theory, methods, and applications // CRC Press, 2000.

[2] Graham R. L., Knuth D. E. and Patashnik O. Concrete Mathematics: A Foundation for Computer Science // Addison-Wesley Longman Publishing Co., 1994.

[3] Elaydi S. An introduction to difference equations // Springer Science & Business Media, 2005.

[4] Васильева А. Б. О соответствии между некоторыми свойствами решений линейных разностных систем и обыкновенных дифференциальных уравнений // Труды семинара по теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. УДН., 1967 **5**, 21–44.

[5] Цыганов Г. А. Асимптотика решения линейной разностной системы с малой разностью при наличии “точки поворота” // Дифф. уравн.1974, **10** (7), 1312–1321.

[6] Costin O. and Costin R. Rigorous WKB for finite-order linear recurrence relations with smooth coefficients // SIAM J. Math. Anal., 1996, **27** (1), 110–134.

[7] Geronimo J. S., Bruno O. and Van Assche W. WKB and turning point theory for second-order difference equations// In book: J. Janas (et al. eds), Spectral methods for operators of mathematical physics, Birkhäuser Basel, 2004,101–138.

[8] Garoufalidis S. and Geronimo J. S. Asymptotics of q-difference equations // In book: T. Kohno (et al. eds), Primes and knots, volume 416 of Contemporary mathematics, American Mathematical Soc., 2006, 83–114.

[9] Geronimo J. S. and Smith D. T. WKB (Liouville-Green) analysis of second order difference equations and applications // J. Approx. Theory, 1992, **69** (3), 269–301.

[10] Выборный Е. В. Расщепление энергий при динамическом туннелировании // ТМФ, 2014, **181** (2), 337–348.

[11] Выборный Е. В. Координатное и импульсное туннелирование в одномерных квантовых системах с дискретным спектром // Нанострыуктуры. Математическая физика и моделирование, 2015, **12** (1), 5–84.

[12] Wong R. Asymptotics of linear recurrences // Analysis and Applications, 2014, **12** (4), 463–484.

[13] Aptekarev A., Geronimo J. S. and Van Assche W. Varying weights for orthogonal polynomials with monotonically varying recurrence coefficients // J. Approx. Theory, 2008, **150** (2), 214–238.

[14] Braun P. Discrete semiclassical methods in the theory of rydberg atoms in external fields // Rev. Modern Phys., 1993, **65** (1), 115–161.

[15] Браун П. А. Метод ВКБ для трехчленных рекуррентных соотношений и квазиэнергии ангармонического осциллятора // ТМФ, 1978, **37** (3), 355–370.

[16] Браун П. А. К теории квадратичного эффекта Зеемана для высоковозбужденных состояний атома водорода // ЖЭТФ, 1983, **84** (3–4), 850–864.

[17] Garg A. Application of the discrete Wentzel–Kramers–Brillouin method to spin tunneling // J. Math. Phys., 1998, **39** (10), 5166–5179.

[18] Garg A. Oscillatory tunnel splittings in spin systems: a discrete wentzel-kramers-brillouin approach // Phys. Rev. Lett., 1999, **83** (21), 4385–4388.

[19] Garg A. Discrete phase integral method for five-term recursion relations // arXiv preprint math-ph/0003005, 2000.

[20] Garg A. Quenched spin tunneling and diabolical points in magnetic molecules. I. Symmetric configurations // Phys. Rev. B, 2001, **64** (9), 094413.

[21] Garg A. Quenched spin tunneling and diabolical points in magnetic molecules. II. Asymmetric configurations // Phys. Rev. B, 2001, **64** (9), 094414.

[22] Маслов В. П. Операторные методы // Наука, М., 1973.

[23] Березин Ф. А., Шубин М. А. Уравнение Шредингера // Изд-во моск. ун-та, 1983, 392 с.

[24] Карасев М. В., Маслов В. П. Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование // Наука, М., 1991.

[25] Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений // Наука, М., 1983.

[26] Olver F. W. Asymptotics and special functions // Academic press, 2014.

[27] Geronimo J. S. WKB and turning point theory for second order difference equations: external fields and strong asymptotics for orthogonal polynomials // arXiv preprint arXiv:0905.1684, 2009.

[28] Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Квантовая механика // Гос. из-во РСФСР, Ленинград, 1948.

[29] Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики // Наука, М., 1976.

ON THE WKB METHOD FOR DIFFERENCE EQUATIONS: WEYL SYMBOL AND THE PHASE GEOMETRY

E.V. Vybornyi

National Research University "Higher School of Economics"

evgeniy.bora@gmail.com

Received 11.07.2016

We study the asymptotics of solutions of linear difference equations (recurrence relations) with slowly varying coefficients. It is known that the local asymptotic behavior of solutions can be obtained similarly to the WKB approximation for linear differential equations. In contrast to the continuous case, one of the major obstacles to the widespread use of discrete WKB method is the lack of a geometric interpretation of the obtained asymptotic formulas. We show that it is possible to build a simple geometric interpretation of discrete WKB method if one consider the difference equation as pseudo-differential with corresponding Weyl symbol (Hamiltonian). We obtain such a geometric interpretation for local asymptotics, turning points, the Bohr-Sommerfeld rule and other basic elements of the semiclassical approximation.