

# ВЫЧИСЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОСТИ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ПОЛЯ В КРЕМНИЕВОМ АВТОЭМИССИОННОМ НАНОКАТОДЕ

В.И. Кретов

*Московский технический университет связи и информатики*

vkretov@mtuci.ru

Поступила 19.09.2016

В статье представлены результаты расчета потенциала и напряженности электрического поля при автоэлектронной эмиссии из конического катода малого размера. Сравниваются три задачи: в одной потенциал вычисляется непосредственно внутри катода, в другой учитывается пространство, заполненное вакуумом, вокруг катода, в третьей, в дополнение ко второй задаче, учитывается зазор между катодом и анодом.

УДК 519.6

## 1. Введение

В данной статье мы продолжаем исследование электронной автоэмиссии, начатое в [1, 2, 3, 10]. В тех статьях мы изучали теплоперенос и возможный фазовый переход (плавление катода) в коническом автоэмиссионном катоде из кремния. Мы рассматривали область, включающую только катод (рис. 1.1). В настоящей статье мы будем рассматривать три варианта формулировки задачи, обозначим их I, II, III.

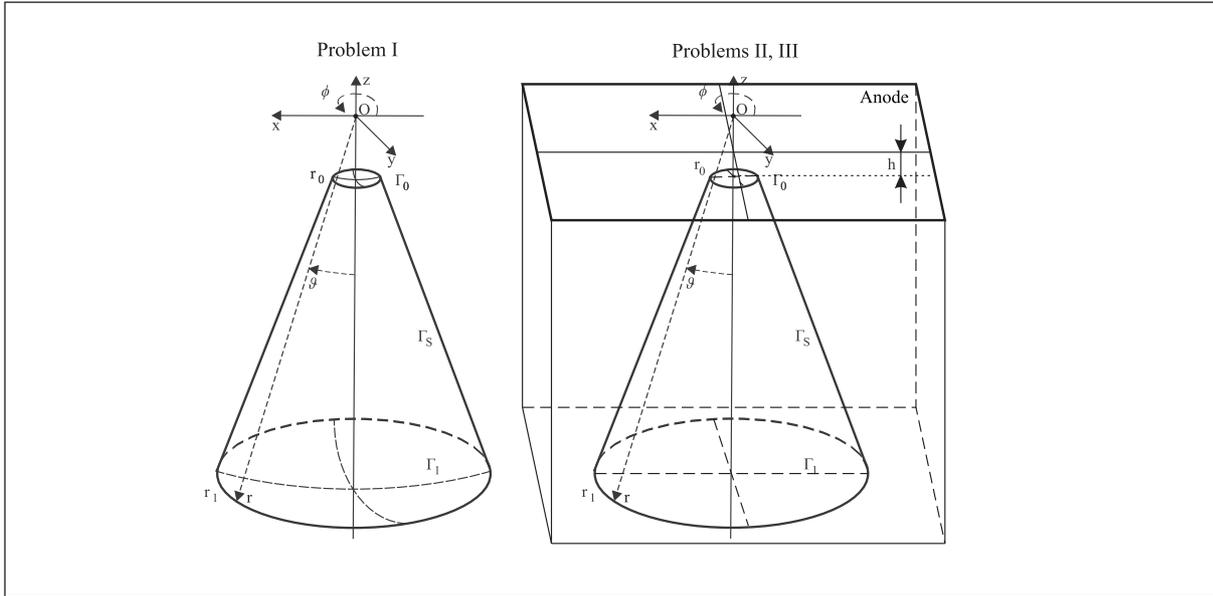


Рис. 1.1. Модель катода

Вариант I — это задача из работ [1, 2, 3]. В задачах II и III катод помещен в параллелепипед, заполненный вакуумом, который моделирует пространство вокруг катода. II и III отличаются тем, что в II верхнее основание катода лежит на верхней стороне параллелепипеда, а в III основание катода находится внутри параллелепипеда, соответственно, между верхним основанием катода и верхней стороной параллелепипеда есть зазор, заполненный вакуумом, см. рис. 1.1. Более подробно об этих вариантах см. ниже.

Математическая формулировка задачи, исследуемой в [1] имеет вид:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \hat{k} \Delta \theta = -\frac{1}{2} \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \hat{F}, \quad (1.1)$$

$$\varepsilon \hat{\alpha} \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \varepsilon \hat{\beta}^2 \Delta \varphi = \frac{1}{\varepsilon} (\varphi - \varphi^3) + \chi (1 - \varphi^2) (\theta - \bar{\theta}_0), \quad (1.2)$$

$$\operatorname{div} j = 0. \quad (1.3)$$

Эта модель учитывает возможность фазового перехода (плавления внутри катода). Здесь  $\theta$  — безразмерная температура,  $\varphi$  — функция порядка, определяющая фазовое состояние вещества,  $j$  — плотность тока внутри катода,  $\hat{F}$  — джоулево тепло,  $\varepsilon$  — малый параметр, который получается при регуляризации задачи Стефана-Гиббса-Томсона, см. [4]. Остальные параметры являются константами,  $\hat{\alpha}$  и  $\hat{\beta}$  получены из условия Гиббса-Томсона [4],  $\hat{k}$  — удельная теплопроводность. Все параметры безразмерные, подробнее см. [1].

Здесь мы рассмотрим подробнее часть задачи отвечающую за вычисление плотности тока, и не будем останавливаться на вычислении температуры и функции порядка. Все необходимые для вычисления потенциала величины, зависящие от температуры, мы берем из [1] при температуре, близкой, но меньшей температуры плавления. Плотность тока находится по формуле  $j = \sigma E$ , где  $E$  — напряженность электрического поля, а  $\sigma$  — удельная проводимость катода, которая, вообще говоря, зависит от температуры.  $E$  находится из выражения  $E = -\nabla \Psi$ , где  $\Psi$  — потенциал электриче-

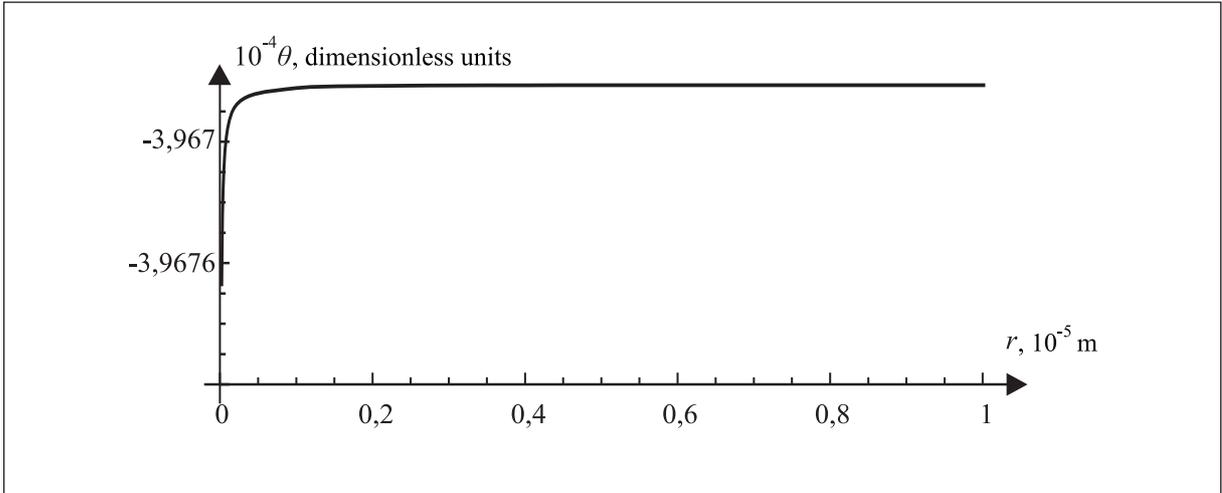


Рис. 1.2. Распределение температуры на оси катода. Температура дана в безразмерных единицах, см. (1.4)

ского поля, который получается из уравнения Лапласа. Удельная проводимость  $\sigma(T)$  находится с помощью формул из [5, 6]. В нашей задаче распределение температуры на оси катода при численном решении (см. [1]) имело вид, изображенный на рис. 1.2. На этом графике температура приведена в безразмерных единицах,

$$\theta = \frac{c}{l}(T - T_0), \quad (1.4)$$

где  $c$  — удельная теплоемкость,  $l$  — скрытая теплота плавления,  $T$  — температура в Кельвинах,  $T_0$  — температура плавления кремния, см. [1]. Как видно, температура во всей области почти постоянна, за исключением верхнего основания (на графике находится слева), где она несколько меньше. На этом и всех последующих графиках единица расстояния вдоль оси катода  $z$  равна  $10^{-5}$  м, что соответствует высоте катода, участвовавшего в эксперименте из [7].

Как отмечено выше, в [1], [2] мы выполняли моделирование при очень высоких температурах (близких к температуре плавления кремния равной 1683 К). Так мы берем во всей области температуру, полученную при прежних вычислениях (см. рис. 1.2) для того, чтобы вычислить удельную проводимость, нужную для вычисления потенциала. Формула для проводимости имеет вид [5, 6, 8]

$$\sigma(T) = \sigma_0 \exp\left(\frac{-W_g}{2k_B T}\right),$$

где

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= e\sqrt{N_c N_v} \left( \frac{eA_n}{\sqrt{3k_B m_n^*}} T^{-3/2} + \frac{eA_p}{\sqrt{3k_B m_p^*}} T^{-3/2} \right) = \\ &= e \frac{(2\pi k_B)^{3/2}}{h^3} \sqrt{(m_n^* m_p^*)^{3/2}} \left( \frac{eA_n}{\sqrt{3k_B m_n^*}} + \frac{eA_p}{\sqrt{3k_B m_p^*}} \right). \end{aligned}$$

Здесь  $e$  — заряд электрона,  $N_c, N_v$  — эффективные плотности состояний для зоны проводимости и валентной зоны,  $k_B$  — постоянная Больцмана,  $h$  — постоянная План-

ка,  $W_g$  — ширина запрещенной зоны,  $m_n^*$  и  $m_p^*$  — эффективные массы электронов и дырок соответственно,  $A_n$  и  $A_p$  — некоторые коэффициенты.

Вычисленная по этой формуле проводимость при температуре как на рис. 1.2 примерно равна  $\sigma \approx 24300$  См/м.

## 2. Методы

В [1], [2] рассматривалась область, состоящая только из катода, причем задача решалась в сферических координатах. Катод представлял собой усеченный конус, см. рис. 1.1. На поверхности катода ставились граничные условия  $\Psi|_{r=r_0} = 0$ ,  $\Psi|_{r=r_1} = \Psi_1$ ,  $\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_S} = 0$ .

В реальности в автоэмиссионной установке катод окружен вакуумом, в который эмитируют электроны. Поэтому естественно рассматривать катод, помещенный в вакуум. Мы рассматриваем катод как усеченный конус, помещенный в параллелепипед, заполненный вакуумом, см. рис. 1.1. Итак, мы имеем три варианта области, в которой проводится моделирование: только катод в виде усеченного конуса в задаче I из [1], [2], см. рис. 1.1, катод, помещенный в параллелепипед, заполненный вакуумом, и где верхнее основание катода совпадает с верхней стороной параллелепипеда (задача II), и, наконец, задача III, где верхнее основание находится внутри параллелепипеда.

В задаче II (без зазора) на верхней и нижней стороне параллелепипеда, ограничивающего рассматриваемую область, ставятся следующие граничные условия:  $\Psi|_{\Gamma_0} = 0$  и  $\Psi|_{\Gamma_1} = \Psi_1$ , соответственно. Как и в статье [1],  $\Psi_1 = 4$  В. На боковой поверхности катода и на боковой поверхности области, в которой решаются уравнения, ставятся условия Неймана (см. [9]). В задаче III верхнее основание катода находится внутри области моделирования. В этом случае верхняя сторона области моделирования соответствует аноду, и между анодом и катодом имеется некоторый зазор  $h$ . Т.е. в отличие от задач I и II, рассматривающих только катод, задача III достаточно точно моделирует реальную задачу об эмиссии с анодом и катодом.

Во всех областях в задачах I, II и III мы решаем уравнение Лапласа для нахождения потенциала (с соответствующими граничными условиями):

$$\nabla(\sigma \nabla \Psi) = 0, \quad (2.1)$$

$$\Psi|_{\Gamma_0} = 0, \quad (2.2)$$

$$\Psi|_{\Gamma_1} = \Psi_1. \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{n}}|_{\Gamma_S} = 0, \quad (2.4)$$

$$E = -\nabla \Psi. \quad (2.5)$$

Здесь  $\Gamma_0$  и  $\Gamma_1$  — верхняя и нижняя границы области моделирования соответственно,  $\Gamma_S$  — боковая поверхность области моделирования. В уравнении  $\sigma$  вне катода считается малой. В вычислениях мы берем значение  $\sigma = 10^{-7}$ . Дальнейшее уменьшение  $\sigma$  не влияет на результат. Геометрические параметры варьировались в определенных пределах. Мы базируемся на параметрах, используемых в экспериментах [7]. Везде, где не оговаривается иное, высота катода равна  $10^{-5}$  м (одна безразмерная единица

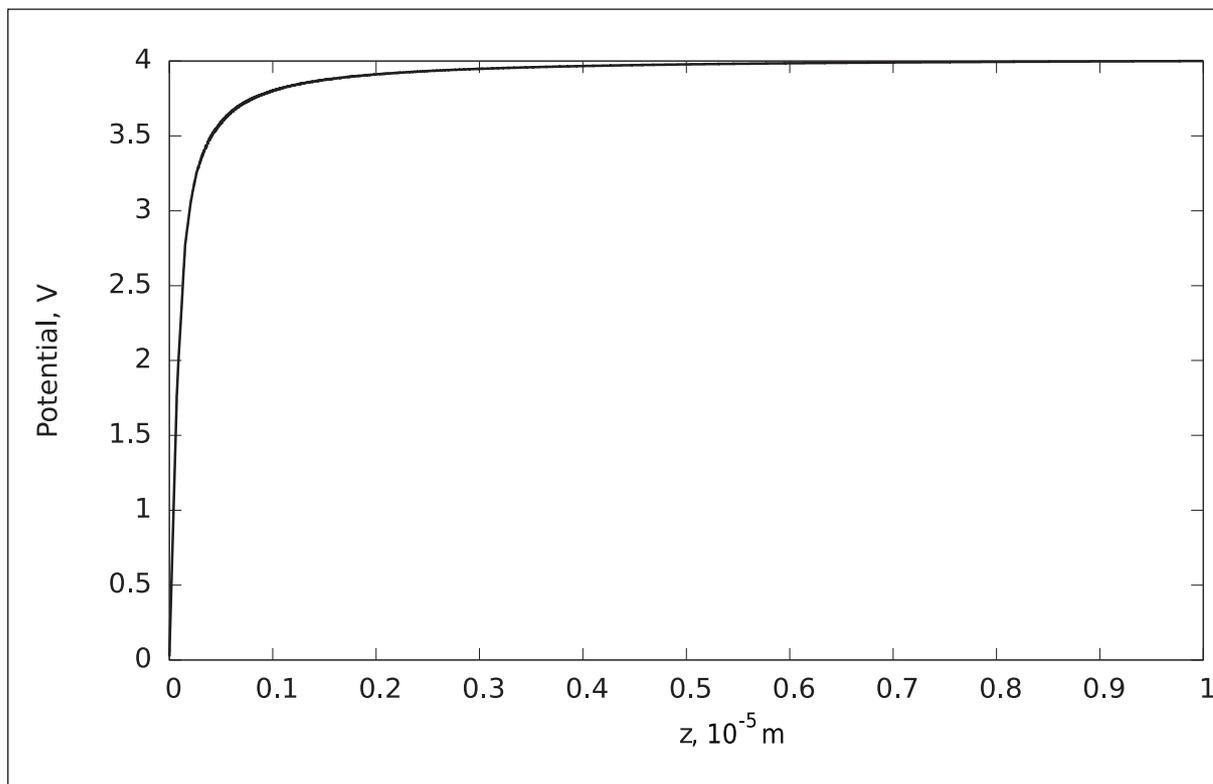


Рис. 2.1. Потенциал в катоде. Вариант II

на графике), расстояние от вершины конуса до пересечения боковой поверхности с верхним основанием —  $2 \cdot 10^{-8}$  м, угол  $\vartheta$  при вершине конуса — 0,1 радиан.

В задачах II и III используется метод конечных элементов, в отличие от задачи I, где использовался метод конечных разностей.

В первую очередь приведем типичные графики потенциала и напряженности, см. рис. 2.1, 2.2. Для всех наших вычислений в задачах I и II распределение потенциала и напряженности не имеет качественных различий, поэтому мы приводим эти графики только один раз для задачи II. На графиках изображен потенциал и напряженность на оси катода. Верхнее основание катода соответствует нулю на графике.

Приведем результаты вычислений, изменяя угол  $\vartheta$  при вершине катода. При этом мы будем сохранять площадь верхнего основания и высоту.

Результаты вычислений приведены на графике, см. рис. 2.3. На графике показана напряженность в центре верхнего основания катода. В остальной области напряженность меняется мало, как видно на рис. 2.2.

Наконец, перейдем к задаче III. В задаче III распределение потенциала и напряженности принципиально отличается от задач I и II, см. рис. 2.4, 2.5. Видно, что потенциал существенно изменяется только в зазоре между катодом и анодом. Соответственно, максимальное значение напряженности по-прежнему достигается на верхнем основании, а внутри области напряженность меняется мало. Для большей наглядности оба графика приведены не на всей оси катода, а только на ее части, прилегающей к верхнему основанию катода.

В задаче III при моделировании мы будем варьировать зазор между катодом и анодом при том, что остальные параметры останутся неизменными. Приведем соот-

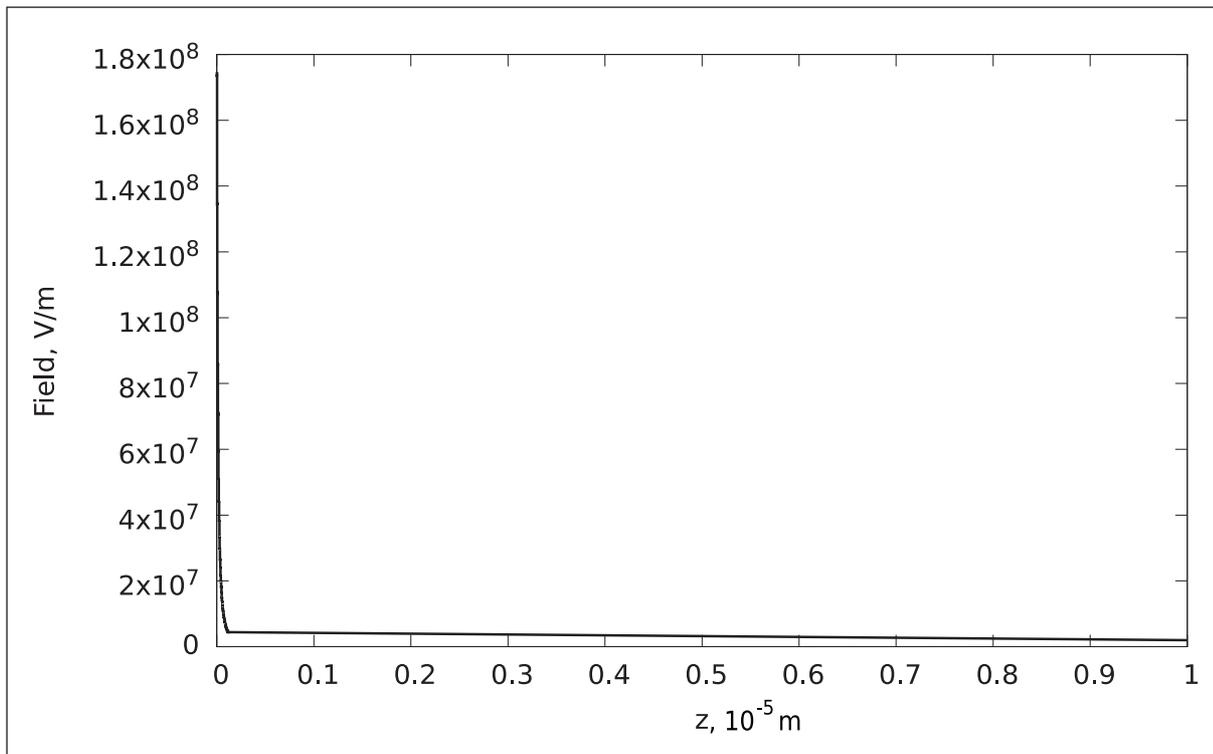
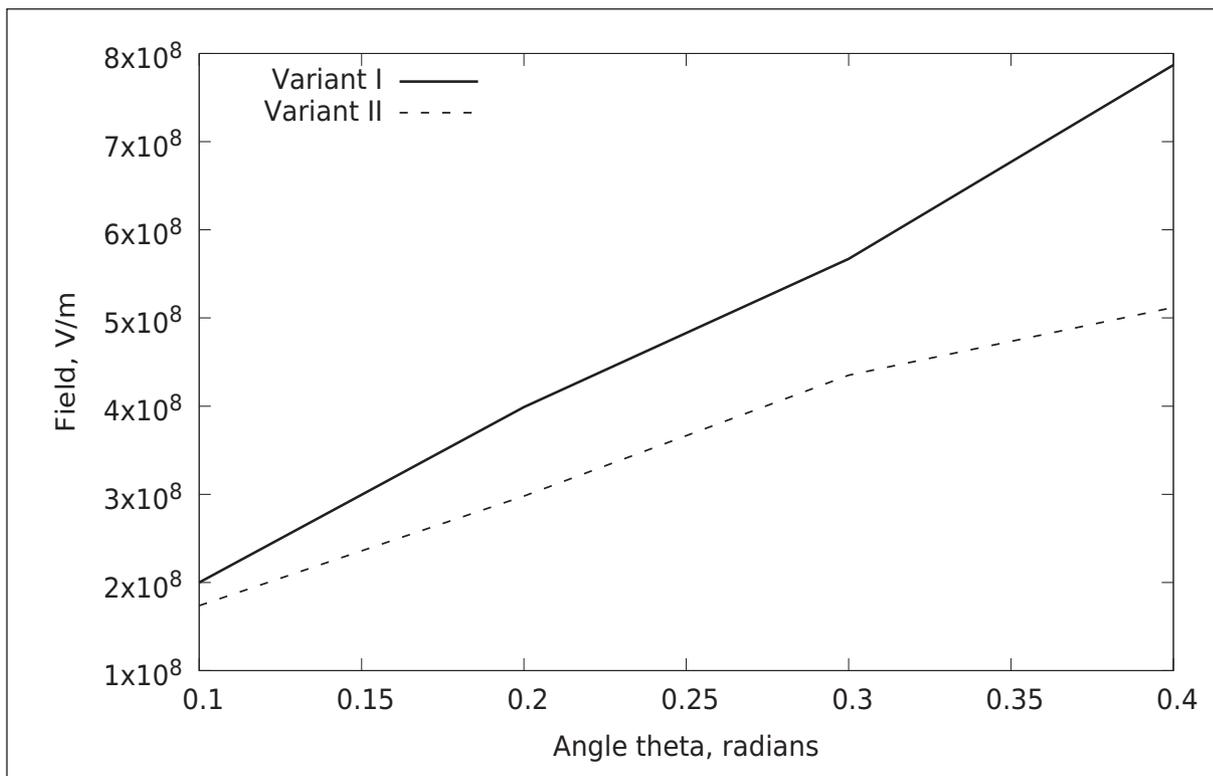


Рис. 2.2. Напряженность поля в катод. Вариант II

Рис. 2.3. График зависимости напряженности от угла  $\vartheta$  при сохранении площади верхнего основания. Варианты I, II

ветствующий график (см. рис. 2.6). Наиболее близко к результатам, приведенным для задач I и II, находится результат при величине зазора, равной 0,004. Варьируя

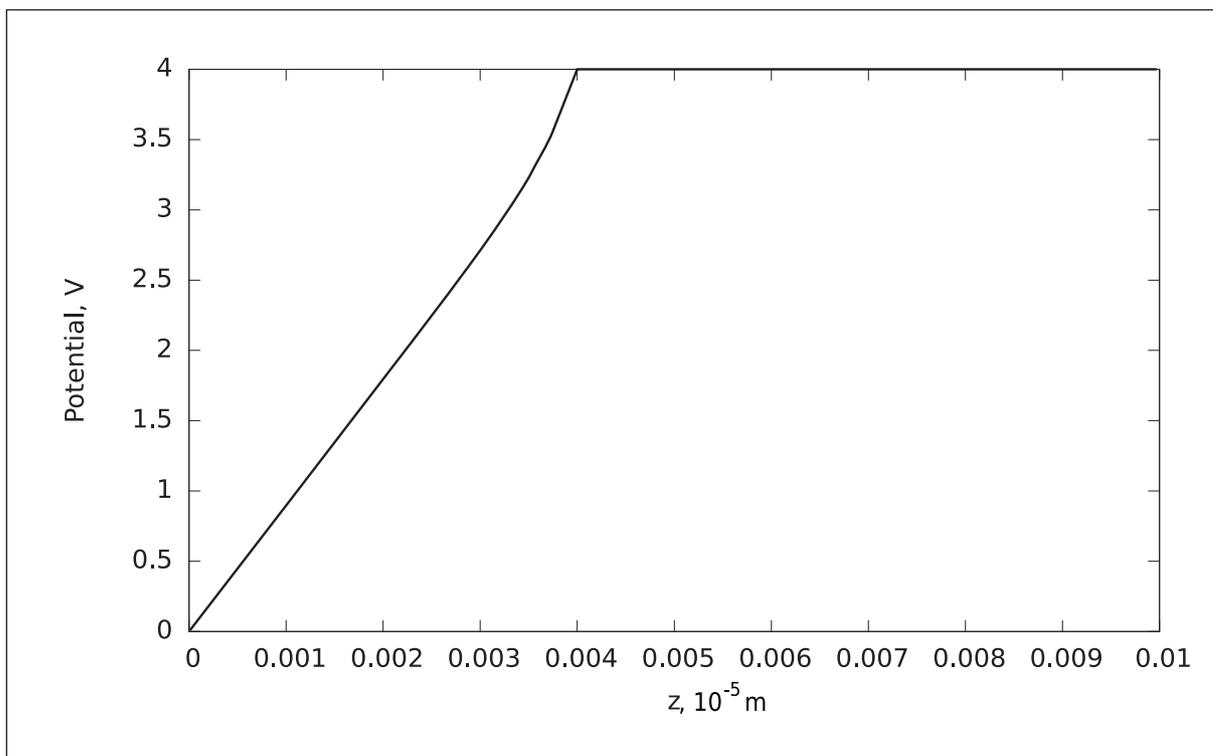


Рис. 2.4. Потенциал. Задача III

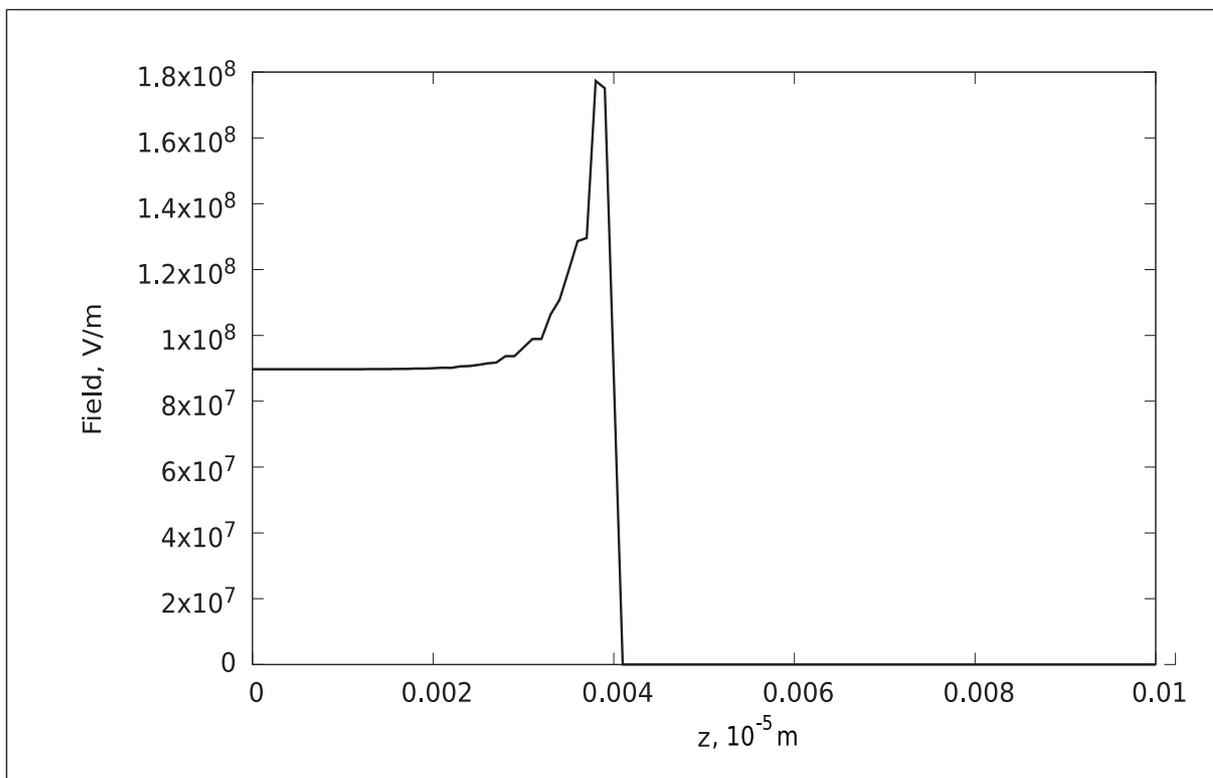


Рис. 2.5. Напряженность поля. Задача III

угол при этом зазоре, получим результаты, приведенные на рис. 2.7. Можно сказать, что зависимость от угла явно не прослеживается, а незначительно отличающиеся значения на графике объясняются погрешностью вычислений.

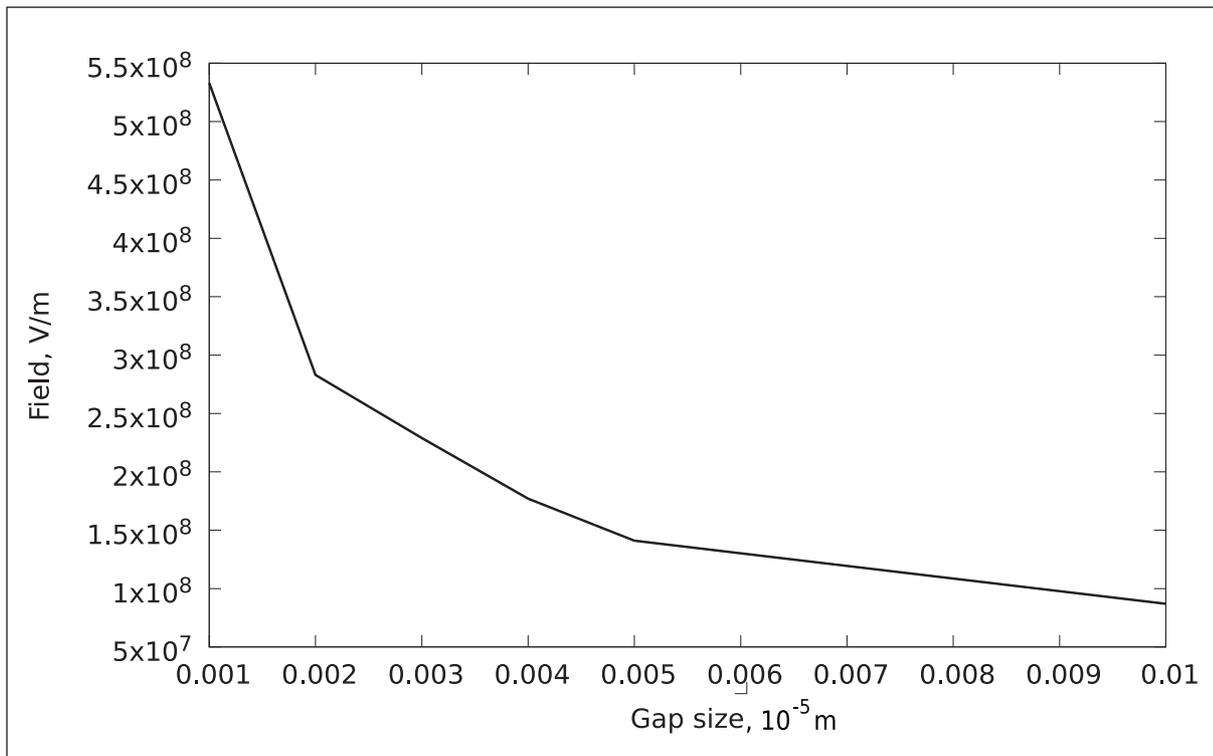


Рис. 2.6. Зависимость напряженности поля от величины зазора. Угол  $\theta = 0,1$ . Зазор приведен в единицах  $10^{-5}$  м, как на остальных графиках

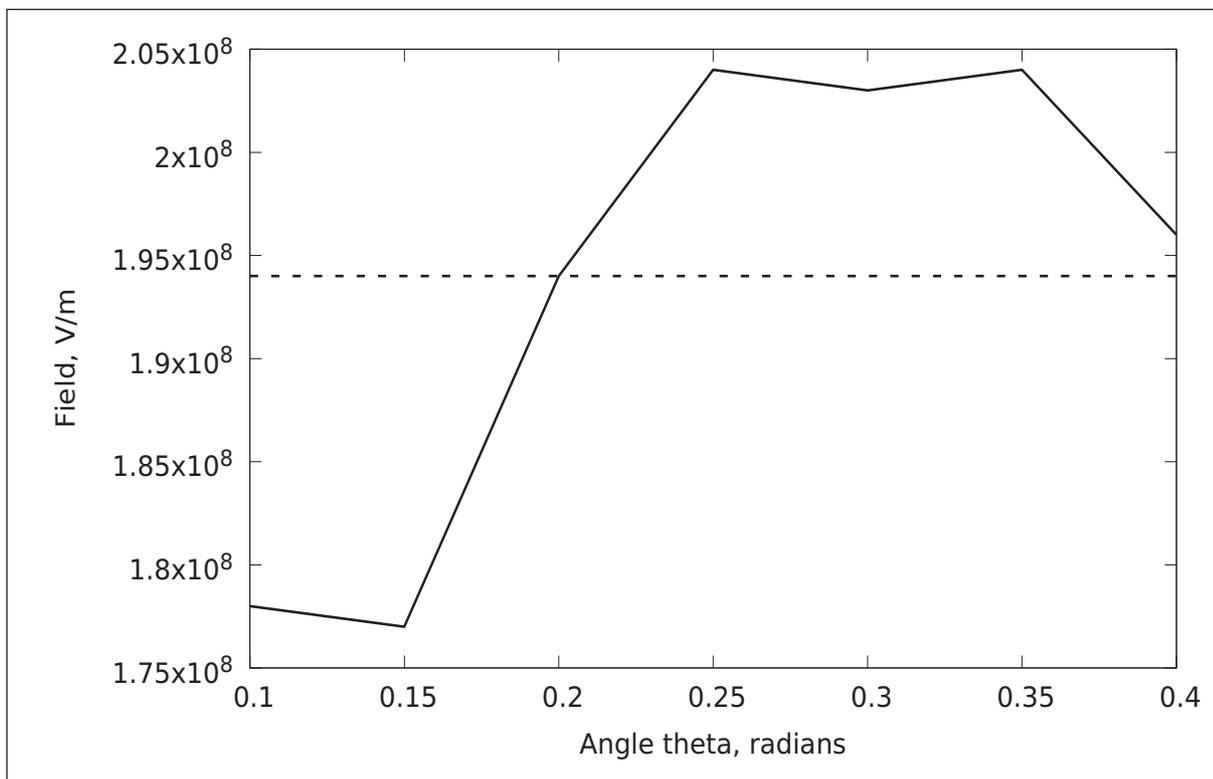


Рис. 2.7. Зависимость напряженности поля от угла. Задача III. Зазор 0,004. Горизонтальная пунктирная линия показывает среднее значение

### 3. Результаты

В результате вычислений установлено, что для I и II вариантов модели результаты численного моделирования не имеют качественных отличий, хотя численные значения напряженности могут заметно отличаться при больших значениях угла при вершине катода. При маленьких углах численные значения отличаются не очень сильно. Результаты моделирования показывают, что задача III (с зазором) имеет качественное отличие от задач I и II. Оно заключается в том что основное падение потенциала, и, следовательно, наибольшие напряженности достигаются в зазоре, а не внутри катода. При этом установлена зависимость напряженности от величины зазора. Еще одно отличие от задач I и II — практическое отсутствие зависимости от угла при вершине катода. Полученные результаты показывают, что, вообще говоря, результаты моделирования для задачи с зазором между катодом и анодом, и задачи, включающей только катод, различаются существенно. Однако, при определенной величине зазора, допустимо использовать первый вариант модели для грубого анализа.

### 4. Discussion

This paper continues our work published in [1, 2, 3] but in opposition to those articles where we concerned on temperature calculation and process of melting and emission itself, here we calculate only potential distribution and field strength. It is shown in this paper that for more accurate results it is not enough to take into consideration only cathode itself, the problem including a space between cathode and anode should be considered instead. The results of these calculation could be applied for further theoretical studies of field emission cathodes. We notice that the problem solved here is electrostatic problem, but in reality there is a current in the experimental device so in our future work we are going to take into account emission current and then perform new calculations of our main (phase-field) problem to get heat distribution and analyze melting and nucleation process with new circumstances.

### Литература

1. *Danilov V.G., Gaydukov R.K., Kretov V.I., Rudnev V.Yu.* Modelling of Liquid Nuclei Generation for Field-Emission Silicon Nanocathode // IEEE Transactions on Electron Devices, 2014, 61, 4232-4239.
2. *Danilov V.G., Rudnev V.Yu., Kretov V.I.* Simulation of the heat transfer in the nanocathode // Open Journal of Applied Sciences, 2012, 2, 78-81.
3. *Danilov V.G., Rudnev V.Yu., Kretov V.I.* Simulation of the heat transmission in the nano-sized cathode. Fourth International Conference for Differential Equations and Applications dedicated to Ya. B. Lopatinskii // Book of Abstracts; Donetsk, Ukraine, 2012, p. 94.
4. *Caginalp G.* Stefan and Hele-Shaw type models as asymptotic limits of the phase field equations // Physical Review A, 1989, 39, 5887-5896.
5. *Стильбанс Л.С.* Физика полупроводников // Советское радио, 1967.
6. *Шалимова К.В.* Физика полупроводников // Энергоатомиздат, М., 1985.
7. *Dyuzhev N., Gudkova S., Makhboroda M., Fedirko V.* Study of emission properties of silicon cathodes of different geometry. Vacuum Science and Technology // Proc. of XII Science-Technical Conference with Participation of Foreign Specialists; Bykov, D.V., Ed.; MIEM, Moscow, 2005, pp. 221-224.
8. *Данилов В.Г., Руднев В.Ю., Гайдуков Р.К., Кретов В.И.* Математическое моделирование эмиссии из катодов малых размеров // Горячая линия - Телеком, М., 2014.
9. *Vinogradova E.M., Egorov E.N., Televnyu D.S.* Mathematical modeling of field emitter array. // Vacuum, 2016, 133, 45-50.
10. *Данилов В.Г., Руднев В.Ю., Гайдуков Р.К., Кретов В.И.* Математическое описание режима “плавление-затвердевание” в автоэмиссионном катоде при учете эффекта Ноттинггама // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2013, 9(1), 39–84.

# **CALCULATION OF ELECTRIC FIELD STRENGTH IN FIELD-EMISSION SILICON NANOCATHODE**

V.I. Kretov

*Moscow Technical University of Communication and Informatics*

vkretov@mtuci.ru

Received 19.09.2016

This paper presents the results of numerical calculations of the potential and electric field strength in field emission from a conic cathode of small dimensions. Here the following three problems are compared: in one of them, the potential is calculated directly inside the cathode, in the second problem, the vacuum space around the cathode is taken into account, and in the third problem, the gap between the cathode and the anode is considered in addition to the second problem.