

ДИНАМИКА ТОПОЛОГИЧЕСКИХ ТРЕХСОЛИТОННЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ СИГМА-МОДЕЛИ

Х.Х. Муминов, Ф.Ш. Шокиров

Физико-технический институт им. С.У. Умарова АН РТ, Душанбе

khikmat@inbox.ru, shokirov@rambler.ru

Поступила 13.09.2017

Представлены результаты численного моделирования процессов взаимодействия топологических вихрей (солитонов) с доменными границами нееловского и блоховского типов в $(2+1)$ -мерной анизотропной $O(3)$ нелинейной сигма-модели. Исследованы свойства поэтапного распада топологических вихрей при взаимодействии с блоховскими доменными границами на локализованные возмущения, обладающие половинными значениями топологического заряда и движущиеся вдоль плоскости доменных границ. Получены модели трехсолитонных взаимодействий типа кинк-вихрь-антикинк, где наблюдается поэтапный распад топологического вихря, сопровождающийся аннигиляцией доменных границ.

УДК 519.6, 530.1

1. Введение

Нелинейные сигма-модели (НСМ) впервые возникли как эффективные теории безмассовых возбуждений в задаче, связанной с теорией трех псевдоскалярных пионов (π -мезонов), которые отождествлялись с псевдоскалярными полями. Для описания динамики изотопического триплета пионов было предложено использование некоторого симметричного псевдоскалярного трёхкомпонентного поля $\mathbf{S}(s_i)$ ($i = 1, 2, 3$). Псевдо-

скалярная мезонная теория, в частности, даёт объяснения короткодействующего характера ядерных сил, обменных сил Майорана и Гейзенберга, спиновой зависимости ядерных сил, наличие тензорной составляющей ядерных сил и т.д. В двумерном случае НСМ (n -поле, АЗ-поле) оказываются очень похожими по своим свойствам на четырехмерные теории Янга-Миллса. С одной стороны нетривиальной двумерной теории Янга-Миллса не существует, с другой стороны структура расходимостей НСМ оказывается похожей на таковую для квантовой теории калибровочных полей. Особый интерес к НСМ объясняется главным образом, их прямой связью с геометрией – геометрия многообразия проявляется в ее простых свойствах как в квантовой теории поля [1-3]. НСМ также можно применять для описания таких явлений как квантовый эффект Холла, сверхтекучего ${}^3\text{He}$, антиферромагнитных спиновых цепочек, непрерывного классического двумерного ферромагнетика Гейзенберга.

Исследуемая в настоящей работе $O(3)$ инвариантная НСМ описывает киральное поле на двумерной (блоховской) сфере $S^2 = SU(2)/U(1) = SO(3)/SO(2)$ и обладает интересными топологическими свойствами. В этом случае теория взаимодействующих полей получается наложением простейшей квадратичной связи $n^2 = 1$ (n -поле). Для анизотропного случая $O(3)$ НСМ действие имеет следующий вид:

$$S = \int L d^4x = \int g \left[\partial_\mu s_a \partial^\mu s_a + s_3^2 - 1 \right] d^4x, \quad (1)$$

$$\mu = 0, 1, 2; \quad a = 1, 2, 3; \quad g = 1/2; \quad s_a s_a - 1 = 0,$$

где s_i ($i = 1, 2, 3$) – координаты единичного изовектора $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$, эволюционирующего в изотопическом пространстве блоховской сферы $S^2 \in \mathbb{R}^3$ (см., например, рис. 1 для случая 180-градусной доменной границы).

В настоящей работе в рамках (2+1)-мерной анизотропной $O(3)$ НСМ (1) исследуются процессы взаимодействия топологических вихрей (солитонов) белава-полюковского типа [4]

$$\text{tg} \frac{\theta}{2} = \left(\frac{R}{r} \right)^{Q_t}, \quad (2)$$

$$Q_t = \chi^{-1}(\varphi + \omega\tau),$$

с известными решениями в виде доменных границ

$$\text{tg} \frac{\theta}{2} = e^{B_1 \left(\frac{w}{k_1} x - \frac{w}{k_1} x_0 \right) + B_2 \left(\frac{w}{k_2} y - \frac{w}{k_2} y_0 \right)}, \quad (3)$$

$$\varphi(x, y, t) = \epsilon,$$

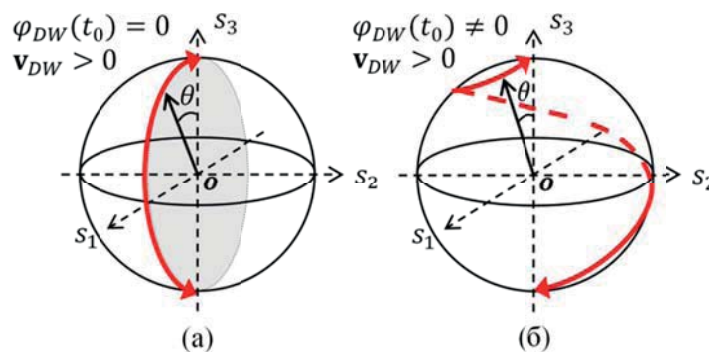


Рис. 1. Динамика $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ 180-градусной движущейся доменной границы в изопространстве блоховской сферы S^2 при: а) $\varphi = 0$; б) $\varphi \neq 0$.

где $\theta(x, y, t)$ и $\varphi(x, y, t)$ – углы Эйлера. При соответствующем подборе параметров решение (3) можно представить также в следующих формах:

$$\begin{aligned}\theta(x, y, t) &= 2\operatorname{tg}^{-1}\left(e^{f(x, y, t)}\right), & \varphi(x, y, t) &= \epsilon, \\ \theta(x, y, t) &= \cos^{-1}\left(\tanh(x, y, t)\right), & \varphi(x, y, t) &= \epsilon, \\ \theta(x, y, t) &= \sin^{-1}\left(\pm\operatorname{sech}(x, y, t)\right), & \varphi(x, y, t) &= \epsilon,\end{aligned}$$

которые являются эквивалентными выражению (3).

Заметим, что решение (3), в частности, при $\epsilon = 0, \pi$ и $\epsilon = \pi/2, 3\pi/2$ описывает динамику так называемых нееловских (N) и блоховских (B) доменных границ соответственно

$$\begin{aligned}\mathbf{S}_{N(0, \pi)} &= \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = (1 + e^{2x})^{-1} \begin{pmatrix} \pm 2e^x \\ 0 \\ 1 - e^{2x} \end{pmatrix}, \\ \mathbf{S}_{B\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)} &= \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{pmatrix} = (1 + e^{2x})^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 2e^x \\ 1 - e^{2x} \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

В данном случае изоспиновые параметры s_i ($i = 1, 2, 3$) определены в следующем виде:

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix},$$

где угол $\theta(x, y, t)$ представляет тип намагниченности доменной границы.

Эволюционные модели стационарных и движущихся топологических вихрей (2), а также модели их взаимодействия были исследованы нами ранее (см., например, [5-7]). В частности, были получены модели дальнедействующих взаимодействий, упругих столкновений и отражений, а также модели с поэтапной аннигиляцией взаимодействующих солитонов вихрей. В работе [8] авторами было проведено численное исследование процессов взаимодействия нееловских доменных границ (3) в рамках двумерной $O(3)$ НСМ (1), где были получены модели упругих столкновений, а также дальнедействующие и осциллирующие модели. В работе [9] было проведено численное исследование моделей двухсолитонных взаимодействий топологических решений вида (2) и (3) (при $\epsilon = 0$).

Результаты каждой серии вышеуказанных экспериментов можно охарактеризовать единым образом – поэтапным распадом топологических вихрей (2) на локализованные возмущения с половинными ($Q_i = 1/2$) значениями топологического заряда (индекса Хопфа). В каждом этапе распада наблюдается излучение энергии топологического вихря эквивалентное единичному топологическому заряду ($Q_i = 1$) в виде двух локализованных возмущений, движущихся вдоль плоскости доменной границы со скоростью $c = 1$ (см. рис. 2).

В примере, приведенном на рис. 2 топологический вихрь (2) с топологическим зарядом $Q_i = 3$ при лобовом ($\alpha = \pi/2$) столкновении с доменной границей поэтапно ($t = \{17.1, 21.0, 25.5\}$) распадется на 6 ($2Q_i$) локализованных возмущений с $Q_i = 1/2$, распространяющихся со скоростью света ($c = 1$) вдоль плоскости доменной границы нееловского типа ($\epsilon = 0$). При этом значение намагниченности в центре (поляризация)

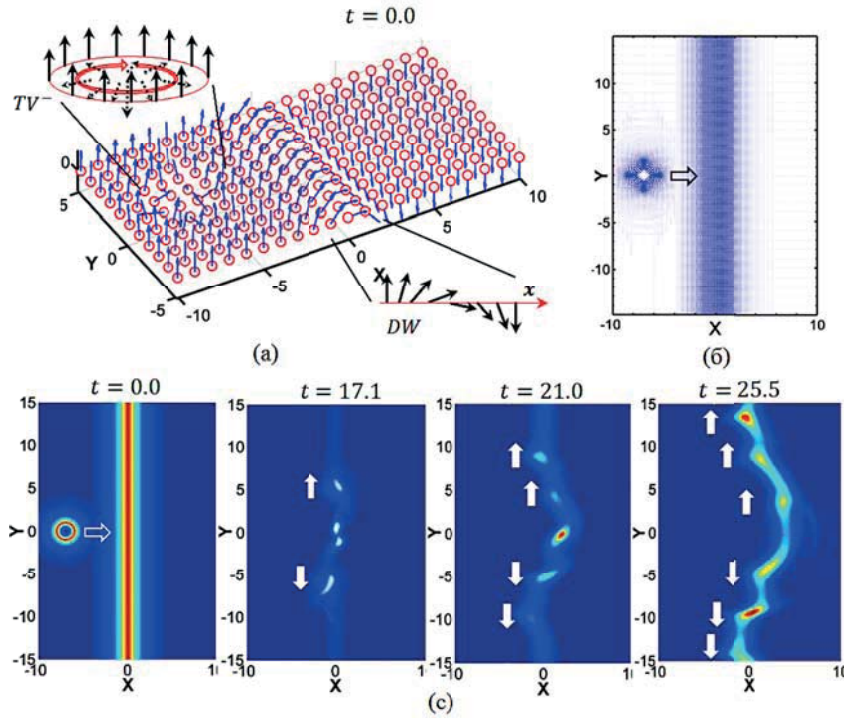


Рис. 2. Взаимодействие движущегося ($\mathbf{v}_{TV}(t_0) \approx 0.447$) топологического вихря (2) ($Q_t = 3$) с неподвижной ($\mathbf{v}_{DW}(t_0) = 0$) доменной границей (3) нееловского типа ($\epsilon = 0$): а) изоспиновая структура – $t = 0$; б) проекция $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ на плоскость $z(x, y)$ (4) – $t = 0$; в) распад топологического вихря (2) на $2Q_t$ локализованных возмущений ($Q_{t(1, \dots, 6)} = 1/2$) – $t \in [0.0, 25.5]$.

вихря (2) равно $p = Q_t(r=0) = -1$ [10], а частота ω внутреннего вращения изотопического вектора $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ доменной границы (3) равна нулю: $\varphi(x, y, t) = \epsilon - \omega t$ (см. рис. 1, а).

Аналогичные результаты были получены в серии численных двухсолитонных экспериментов с различными параметрами системы взаимодействующих солитонов (2) и (3):

- $Q_t(TV) = 1, 2, \dots, 6$; – $0 < \alpha < \pi/2$;
- $\mathbf{v}_{TV}(t_0) \in [0.0, 0.893]$; – $\mathbf{v}_{DW}(t_0) \in [0.0, 0.707]$;
- $0 \leq \omega \leq 1$; – $p = \pm 1$.

В каждой серии вышеуказанных экспериментов наблюдается поэтапный распад топологического вихря (2) при взаимодействии с доменной границей (3) на $2Q_t$ локализованных возмущений, движущихся вдоль плоскости доменной границы со скоростью $c = 1$.

Во втором пункте настоящей работы приведены результаты численного моделирования взаимодействия топологических вихрей (2) и доменных границ (3) блоховского типа ($\epsilon = \pi/2, 3\pi/2$), которые оказались аналогичными случаю с нееловскими доменными границами [8].

Основная часть работы посвящена исследованию эволюции системы трехсолитонных взаимодействий, которая изложена в третьем и четвертом пунктах работы. В пятом и шестом пунктах соответственно обсуждены полученные результаты и подведены итоги настоящей работы.

Численные модели построены на основе методов теории конечных разностных схем, использованием свойств стереографической проекции, с учетом теоретико-

групповых особенностей конструкций класса $O(N)$ НСМ теории поля. По периметру двумерной области моделирования установлены специально разработанные граничные условия, которые поглощают линейные волны возмущений, излучаемые взаимодействующими солитонными полями. Таким образом, осуществлено моделирование процессов взаимодействия локализованных решений в бесконечном двумерном фазовом пространстве. Разработан программный модуль, позволяющий провести комплексный анализ эволюции многосолитонных взаимодействующих решений НСМ теории поля, с учетом ее групповых особенностей в двумерном псевдоевклидовом пространстве [5-9]. Использована трехслойная разностная схема второго порядка точности $O(r^2 + h^2)$ на пятиточечном шаблоне с весами явного типа [11]. Аппроксимация проведена на прямоугольной сетке $L(x, y)$, в кубе (h_{xy}, t_τ) : $\tau_{\max}(2E^{+4})$. Устойчивость разностной схемы удовлетворяет требованиям для гиперболических систем уравнений: $\tau \leq \min(h / |\Delta|_{\max})$.

Для численной схемы, применен алгоритм, разработанный на основе предложенных в работах [12,13] методов исследования, где использованы свойства стереографической проекции: точки верхней полусферы ($s_3 > 0$) проецируются на касательную комплексную плоскость $z(x, y)$, проходящую через «северный полюс»; точки нижней полусферы ($s_3 < 0$) проецируются на касательную плоскость, проходящую через «южный полюс» блоховской сферы S^2 . В точках «экватора» ($s_3 = 0$) специальным образом производится «прошивка» решения, и, таким образом, осуществляется взаимно однозначная проекция (компактификация $(S^2 - R^2_{comp})$) всех точек комплексной плоскости $z(x, y)$

$$z = x + iy = \frac{s_1 + is_2}{1 \pm s_3} = tg \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \tag{4}$$

включая $(x, y) = \infty$ и сферы $S^2: s_i s_i = 1, (i = 1, 2, 3)$. С более подробным описанием разработанного алгоритма и численной схемы можно ознакомиться в [14].

2. Взаимодействие топологических вихрей с доменной границей

В этой части работы приведены результаты компьютерного моделирования лобовых столкновений топологических вихрей (2) с доменными границами (3) блоховского типа. В таблице 1 в общем виде отображены параметры проведенных численных экспериментов системы взаимодействующих топологических солитонов (2) и (3). Эксперименты проведены в двумерной пространственной сетке $L(x, y) = \{0 \leq x \leq 2001; 0 \leq y \leq 3001\}$, среднее время моделирования $t \in [0, 60]$ (10^4 итерационных циклов).

На рис. 3, в качестве примера отображен процесс эволюции одной из полученных моделей данной серии – лобового столкновения движущегося со скоростью $v(t_0) \approx 0.196$ топологического вихря, обладающего топологическим зарядом $Q_t = -3$ с неподвижной доменной границей блоховского $3\pi/2$ -типа с нулевой частотой вращения вектора А3-поля ($\omega(t_0) = 0$).

Таблица 1

Расчетные параметры системы взаимодействующих топологических решений (2) и (3)

№	Топологический вихрь (→)		Доменная стенка (←)		
	$v(t_0)$	$-Q_t$	$-v(t_0)$	$\omega(t_0)$	ϵ
1.	$0 \leq v(t_0) < 1$	1, ..., 6	$0 \leq v(t_0) < 1$	$ \omega(t_0) \leq 1$	$\pi / 2$
2.	$0 \leq v(t_0) < 1$	1, ..., 6	$0 \leq v(t_0) < 1$	$ \omega(t_0) \leq 1$	$3\pi / 2$

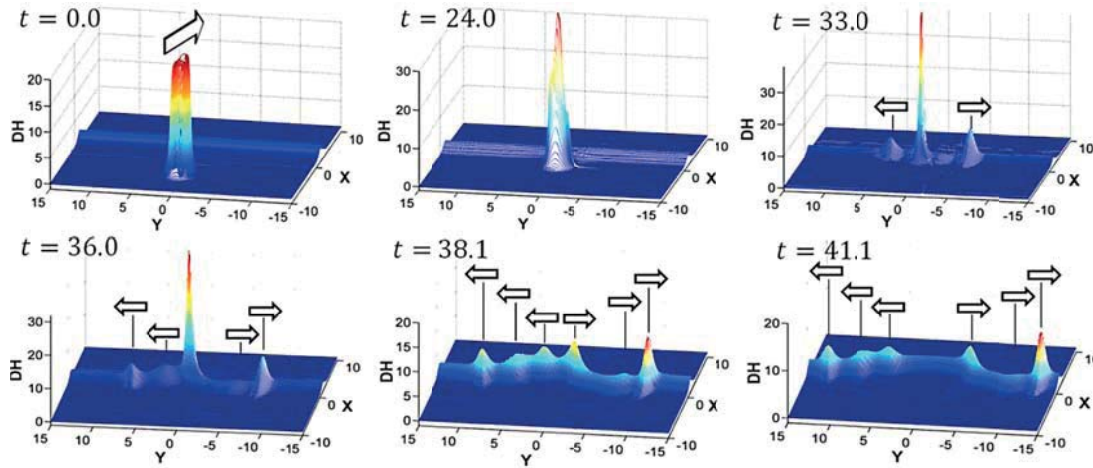


Рис. 3. Эволюция плотности энергии (DH) лобового столкновения движущегося ($\mathbf{v}(t_0) \approx 0.196$) топологического вихря (2) ($Q_t = -3$) с неподвижной ($\mathbf{v}(t_0) = 0$) блоховской ($\epsilon = 3\pi/2$) доменной границей (3). Общее время моделирования: $t \in [0, 60]$.

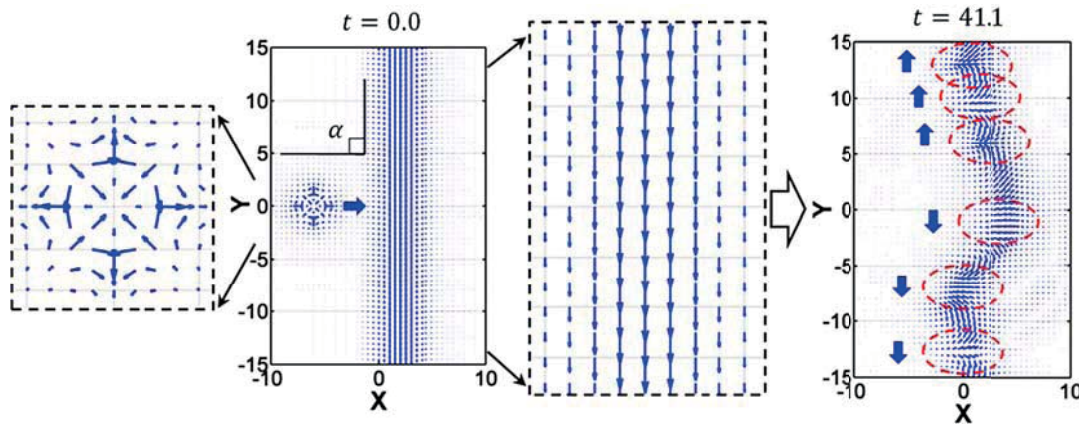


Рис. 4. Динамика проекции изотопического вектора $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ на двумерную сетку $L(x, y)$ ($z(x, y)$) (4) процесса лобового столкновения движущегося ($\mathbf{v}(t_0) \approx 0.196$) топологического вихря (2) ($Q_t = -3$) с неподвижной ($\mathbf{v}(t_0) = 0$) блоховской ($\epsilon = 3\pi/2$) доменной границей (3). Общее время моделирования: $t \in [0, 60]$.

При столкновении топологического вихря с доменной границей ($t = 24$) плотности энергии (DH) взаимодействующих солитонных полей испытывают некоторые возмущения. Далее происходит поэтапный ($t = 33, 36, 38$) распад топологического вихря на 3 пары локализованных возмущений, которые распространяются вдоль плоскости доменной границы со скоростью $c = 1$ в противоположных $\pm y$ -направлениях (см. рис. 3). Проекция изоспиновой динамики данной модели на двумерную сетку $L(x, y)$ ($z(x, y)$) (4) при $t = 0$ и $t = 41.1$ приведена на рис. 4. Комплекс численных экспериментов (см. таблицу 1) показал, что аналогично результатам предыдущих работ [8,9,14] с доменными границами нееловского типа характер взаимодействия топологического вихря (2) с блоховскими доменными границами (3) не зависит от значения скорости движущихся солитонов ($\mathbf{v}(t_0)$) и частоты вращения вектора АЗ-поля ($\omega(t_0)$).

Таким образом, исходя из результатов работы [9] и результатов, полученных при компьютерном моделировании взаимодействия топологических вихрей с блоховскими доменными границами в настоящей работе, можно сформулировать ряд установленных свойств полученных моделей, которые приведены ниже.

А) Взаимодействие топологических вихрей вида (2), обладающих топологическим инвариантом Q_t с 180-градусными доменными границами (π -кинк) вида (3) нееловского ($\epsilon = 0, \pi$) или блоховского ($\epsilon = \pi/2, 3\pi/2$) типов приведет к поэтапному распаду топологического вихря на $2Q_t$ локализованных возмущений. При этом доменная стенка сохраняет структурную устойчивость, испытывая лишь некоторые возмущения плотности энергии (DH).

Б) Каждое из локализованных возмущений обладает топологическим инвариантом $Q_t = 1/2$ и распространяется вдоль плоскости доменной границы со скоростью $c = 1$ (попарно в противоположные направления, см. рис. 3–4).

В) Результаты столкновений в данной конфигурации, в общем, не зависят от скорости движения ($\mathbf{v}(t_0)$) взаимодействующих солитонов, частоты ($\omega(t_0)$) вращения вектора АЗ-поля и углового параметра ($0 < \alpha < \pi$) столкновения.

В следующих пунктах рассмотрены некоторые виды трехсолитонных взаимодействий, состоящих из композиций топологических решений (2) и (3). Получены модели распада топологических вихрей (2) на локализованные возмущения с единичными значениями топологического заряда, сопровождающееся парной аннигиляцией доменных границ (3).

3. Трехсолитонные взаимодействия: кинк (0) – вихрь – антикинк (π)

В предыдущих (двухсолитонных) экспериментах (см., например, рис. 3–4) локализованным возмущениям (с $Q_t = 1/2$), распространяющимся вдоль плоскости доменной границы соответствует движущаяся со скоростью $c = 1$ область перехода между локальными вакуумными состояниями ($0, \pm\pi$, для нееловских доменных границ)

$$\mathbf{S}(\uparrow) \leftrightarrow \mathbf{S}(\downarrow).$$

В этом случае определенный интерес представляет рассмотрение процессов взаимодействия топологических вихрей (2) с 360-градусными доменными границами (2π -кинк). Отметим, что 180-градусные доменные границы вида (3) (π -кинк) являются точными решениями исследуемой O(3) НСМ (1) и соответствующей ей в частном случае ($\varphi(x, y, t) = 0$) уравнения синус-Гордона вида [8,9,14]

$$2\Box\theta = -\sin(2\theta).$$

В этой части работы рассмотрим модель трехсолитонных взаимодействий следующей конфигурации:

$$\pi\text{-кинк} \rightarrow \text{топологический вихрь} \leftarrow \pi\text{-антикинк}$$

Для случая топологических вихрей (2) с $Q_t = 3$ и нееловских 180-градусных доменных границ вида (3) (π -кинк – 0 типа, π -антикинк – π типа) пробная функция примет следующий вид:

$$\mathbf{S}_{K(0)+V+Ak(\pi)} = \mathbf{S}_{Kink}(0) \rightarrow \mathbf{S}_{Vortex} \leftarrow \mathbf{S}_{Antikink}(\pi), \quad (5)$$

где

$$\mathbf{S}_{Kink}(0) = (1 + e^{2x})^{-1} \begin{pmatrix} 2e^x \\ 0 \\ 1 - e^{2x} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_{Vortex} = 2(1 + r^6)^{-1} \begin{pmatrix} (x^3 - 3xy^2)\cos\tau - (y^3 - 3x^2y)\sin\tau \\ (3x^2y - y^3)\cos\tau + (3xy^2 - x^3)\sin\tau \\ 2^{-1}(1 - r^6) \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{S}_{Antikink}(\pi) = -(1 + e^{2x})^{-1} \begin{pmatrix} 2e^x \\ 0 \\ 1 - e^{2x} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, начальное условие для конфигурации (5) изоспиновых полей принимает следующий вид:

$$\mathbf{S}_{K(0)+V+Ak(\pi)} = \Lambda_3 \begin{pmatrix} \xi_1 \cos \tau + \xi_2 \sin \tau \\ \xi_2 \cos \tau - \xi_1 \sin \tau \\ -2^{-1}(1 - r^6) \end{pmatrix}, \quad (5.1)$$

$$\Lambda_3 = 2(1 + r^6)^{-1},$$

$$\xi_1(x, y) = x^3 - 3xy^2, \quad \xi_2(x, y) = 3x^2y - y^3.$$

На рис. 5 приведена иллюстрация компьютерной модели трехсолитонного поля (5.1) при $t = 0$.

На основе конфигурации (5) разработаны аналогичные (5.1) начальные условия с вариацией параметров системы трехсолитонных взаимодействий (см. таблицу 2).

На основе аналитических расчетов проведены численные моделирования и получены эволюционные модели, качественно отличающиеся от результатов предыдущих экспериментов по двухсолитонным взаимодействиям (см., например, рис. 6). В частности, общим результатом всех полученных трехсолитонных моделей является аннигиляция доменных границ и распад топологических вихрей на локализованные возмущения с единичными значениями топологического заряда.

На рис. 6 приведены результаты проведенных экспериментов конфигурации (5) для движущихся со скоростью $\mathbf{v}(t_0) \approx \pm 0.0995$ в противоположных $\pm x$ -направлениях 180-градусных нееловских доменных границ ($\epsilon = 0, \pi$) и неподвижных топологических вихрей с $Q_i = 1, \dots, 4$.

Таблица 2

Расчетные параметры моделей трехсолитонных взаимодействий (5)

Доменная стенка: (\rightarrow) кинк ($\epsilon = 0, \pi, \pi/2, 3\pi/2$)		Топологический вихрь		(\leftarrow) Доменная стенка: антикинк ($\epsilon = 0, \pi, \pi/2, 3\pi/2$)	
$\mathbf{v}(t_0)$	$\omega(t_0)$	$\mathbf{v}(t_0)$	$ Q_i $	$\mathbf{v}(t_0)$	$\omega(t_0)$
$0 \leq \mathbf{v}(t_0) < 1$	$ \omega(t_0) \leq 1$	0	1, ..., 6	$0 \leq \mathbf{v}(t_0) < 1$	$ \omega(t_0) \leq 1$

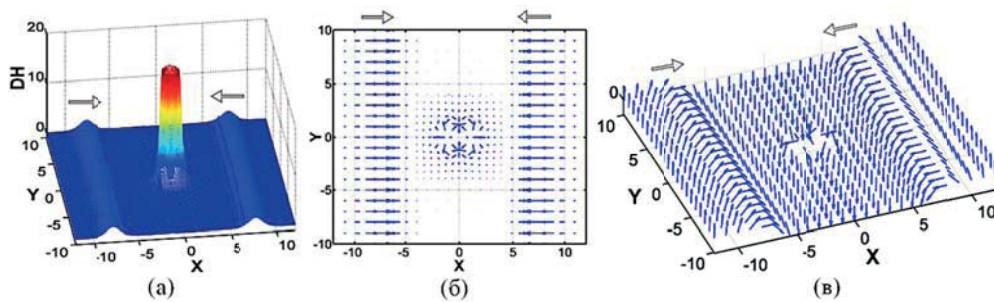


Рис. 5. Трехсолитонное поле модели (5.1) конфигурации (5) при $t = 0$: а) плотность энергии (DH); б) проекция $\mathbf{S}(s_1, s_2, s_3)$ на пространственную сетку $L(x, y)$ ($z(x, y)$ (4)); в) изоспиновая структура модели (5.1).

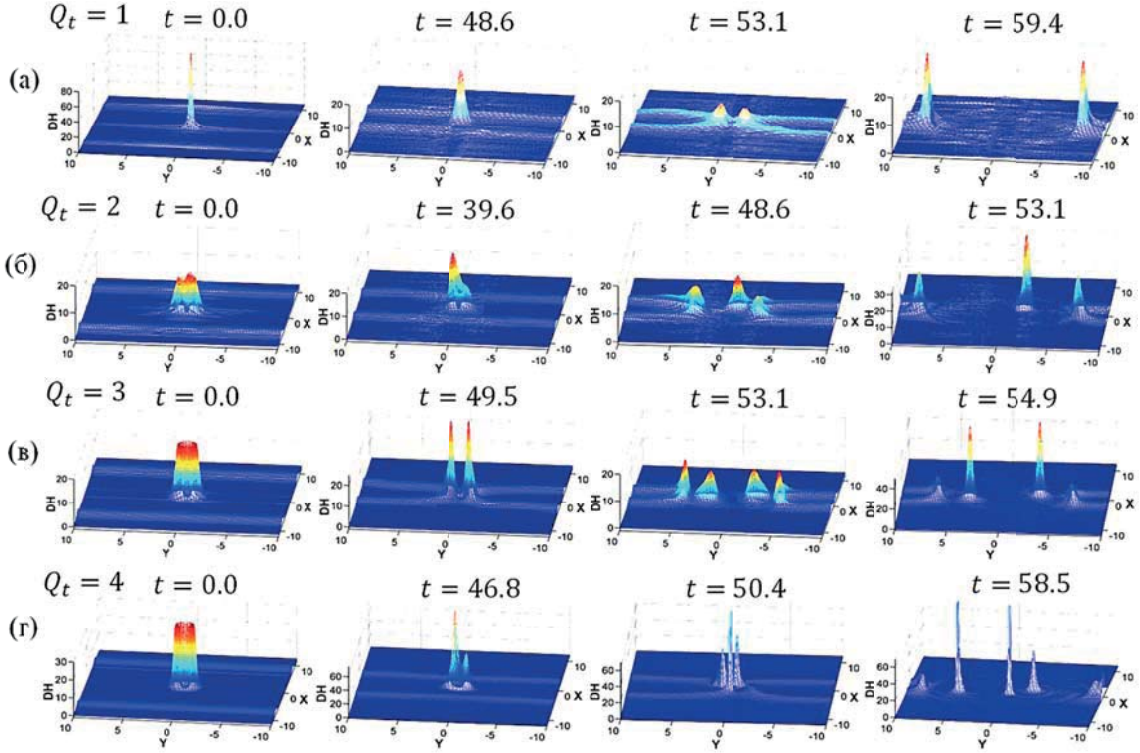


Рис. 6. Эволюция плотности энергии (DH) трехсолитонных взаимодействий (5) неподвижного топологического вихря (2) ($Q_t = 1, \dots, 4$) с движущимися ($\mathbf{v}(t_0) \approx \pm 0.0995$) неслевскими доменными границами (3) ($\epsilon = 0, \pi$): а) $Q_t = 1$; б) $Q_t = 2$; в) $Q_t = 3$; г) $Q_t = 4$. Общее время моделирования: $t \in [0, 60]$.

На рис. 6, а приведена эволюция модели конфигурации (5) при $Q_t = 1$, где

$$\mathbf{S}_{K(0)+V+Ak(\pi)} = \Lambda_1 \begin{pmatrix} \xi_1 \cos \tau + \xi_2 \sin \tau \\ \xi_2 \cos \tau - \xi_1 \sin \tau \\ -2^{-2}(1-4r^2) \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

$$\Lambda_1 = 4(1+4r^2)^{-1}, \quad \xi_1(x, y) = x, \quad \xi_2(x, y) = y.$$

В процессе взаимодействия (см. рис. 6, а, $t = 53.1$) топологический вихрь распадается на 2 локализованных возмущения, каждое из которых обладает половинным значением топологического заряда: $Q_t = 1/2$. На месте распада топологического вихря (x_0, y_0) происходит разрыв каждой из доменных границ с последующим кинк+антикинк объединением (замыкание). При этом образовавшиеся локализованные возмущения действуют в качестве переходного поля ($\theta = 0, \pm\pi$). Далее наблюдается процесс распространения локализованных возмущений в $\pm y$ -направлениях со скоростью $c = 1$ (см. рис. 6, а, при $t = 59.4$), сопровождающийся аннигиляцией доменных границ.

Аналогичные процессы наблюдаются также при $Q_t = 2, 3, 4$ (см. рис. 6, б-г). В остальных случаях $Q_t = 2$ и $Q_t = 4$ изоспиновые поля трехсолитонного взаимодействия описываются следующими начальными условиями:

$$\mathbf{S}_{K(0)+V+Ak(\pi)} = \Lambda_2 \begin{pmatrix} \xi_1 \cos \tau + \xi_2 \sin \tau \\ \xi_2 \cos \tau - \xi_1 \sin \tau \\ -2^{-1}(1-r^4) \end{pmatrix}, \quad (5.3)$$

$$\Lambda_2 = 2(1+r^4)^{-1}, \quad \xi_1(x, y) = x^2 - y^2, \quad \xi_2(x, y) = 2xy.$$

$$S_{K(0)+V+Ak(\pi)} = \Lambda_4 \begin{pmatrix} \xi_1 \cos \tau + \xi_2 \sin \tau \\ \xi_2 \cos \tau - \xi_1 \sin \tau \\ -2^{-1}(1-r^8) \end{pmatrix}, \quad (5.4)$$

$$\Lambda_4 = 2(1+r^4)^{-1}, \quad \xi_1(x, y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4, \quad \xi_2(x, y) = 4xy(x^2 - y^2).$$

В отличие от случая рис. 6, а при $Q_t > 1$ (см. рис. 6, б–г) при взаимодействии топологический вихрь распадается на $Q_t - 1$ локализованных возмущений с единичными значениями топологического заряда. Недостающая единица топологического заряда распространяется вдоль $\pm y$ -направлений (со скоростью $c = 1$) в виде локализованных возмущений с $Q_t = 1/2$. Как и в предыдущем эксперименте, описанном на рис. 6, а во всех экспериментах конфигурации (5) распространение локализованных возмущений вдоль $\pm y$ -направлений (параллельных плоскости доменных границ) сопровождается аннигиляцией доменных границ (см. рис. 6, б–г).

На рис. 7 приведены интегралы энергии (En) системы трехсолитонных взаимодействий (5), описанных на рис. 6. Энергия (En_K, En_{Ak}) доменной границы (3) в данной конфигурации эквивалентна примерно 80.34462 единицам (см. рис. 7, а). Энергия (En_V) топологических вихрей (2) возрастает пропорционально значениям топологического заряда от $En_V \approx 33.59$ для $Q_t = 1$ (рис. 7, а) до $En_V \approx 107.45$ для $Q_t = 4$ (рис. 7, г).

В наших компьютерных моделях общая энергия (En) трехсолитонной системы состоит из энергии взаимодействующих топологических солитонов (2) и (3) а также до-

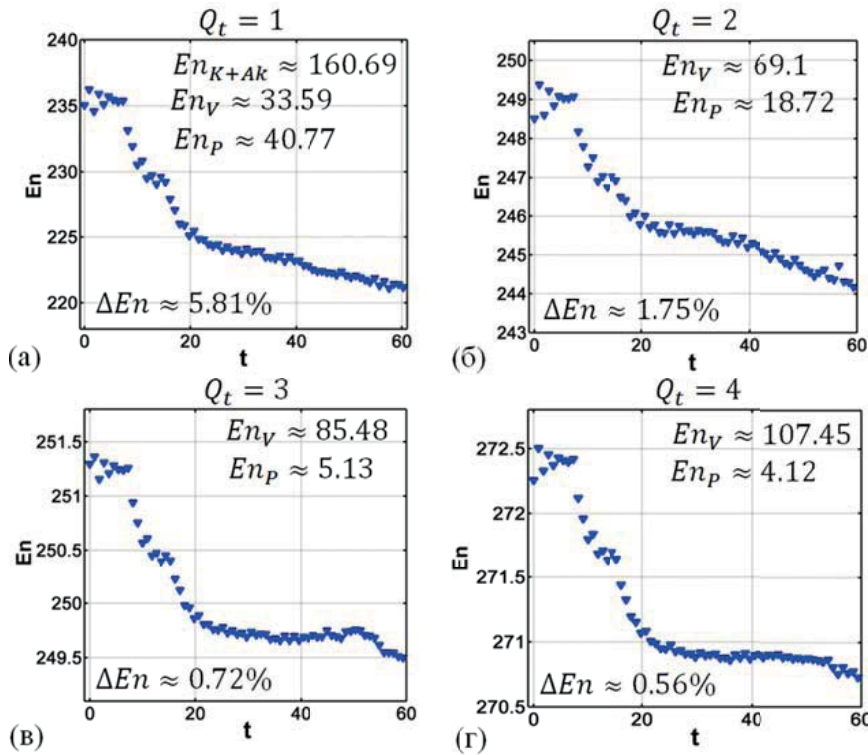


Рис. 7. Интеграл энергии (En) трехсолитонных взаимодействий (5) неподвижного топологического вихря (2) ($Q_t = 1, \dots, 4$) с движущимися ($v(t_0) \approx \pm 0.0995$) нееловскими доменными границами (3) ($\epsilon = 0, \pi$): а) $Q_t = 1$; б) $Q_t = 2$; в) $Q_t = 3$; г) $Q_t = 4$. Общее время моделирования: $t \in [0, 60]$.

полнительной энергии возмущений (En_p) изоспиновых полей, которые уменьшаются увеличением значений Q_i – с $En_p \approx 40$ при $Q_i = 1$ до $En_p \approx 4$ при $Q_i = 4$ (см. рис. 7, а, з). Дополнительная энергия En_p является следствием недостаточной локализации топологических вихрей (2) при $Q_i = 1, 2$, которая приводит к возникновению лишних волн возмущений, оказывающих отрицательное влияние эволюции моделируемых процессов. В этом случае, следует заметить, что на границах области моделирования $L(x, y)$ наших моделей установлены специальные затухающие условия, поглощающие волны возмущений [5-9,14].

В следующем пункте приведены результаты аналогичных экспериментов для доменных границ (3) при $\epsilon = 0$ и значений $Q_i = 2, 3, 4$ топологических вихрей (2), где изменена топологическая конфигурация одной из взаимодействующих доменных границ: антикинк (π) \rightarrow антикинк (0). Получены модели взаимодействий аналогичные моделям настоящего пункта, но отличающиеся значениями топологического заряда излучаемых топологическими вихрями локализованных возмущений.

4. Трехсолитонные взаимодействия: кинк (0) – вихрь – антикинк (0)

Приведем результаты серии компьютерных экспериментов по трехсолитонному взаимодействию топологических вихрей (2) с $Q_i = 2 - 4$ с нееловскими 180-градусными доменными границами вида (3) (π -кинк и π -антикинк – 0 типа) следующей конфигурации:

$$S_{K(0)+V+Ak(0)} = S_{Kink}(0) \rightarrow S_{Vortex} \leftarrow S_{Antikink}(0), \tag{6}$$

В этом случае начальное условие соответствующее (6) состоит из следующих полей:

$$\begin{aligned} \theta_V(x, y, t) &= 2\text{tg}^{-1}\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^{Q_i}, & \varphi_V(x, y, t) &= 2\chi - \tau \\ \theta_K(x, y, t) &= 2\text{tg}^{-1}(e^x), & \varphi_K(x, y, t) &= 0, \\ \theta_{Ak}(x, y, t) &= 2\text{tg}^{-1}(e^{-x}), & \varphi_{Ak}(x, y, t) &= 0, \end{aligned} \tag{6.1}$$

где $Q_i = 2, 3, 4$, r_1 – радиус локализации топологического поля ($r_2 = 1$).

На рис. 8 приведена иллюстрация компьютерной модели трехсолитонного поля (6.1) для $Q_i = 4$ при $t = 0$.

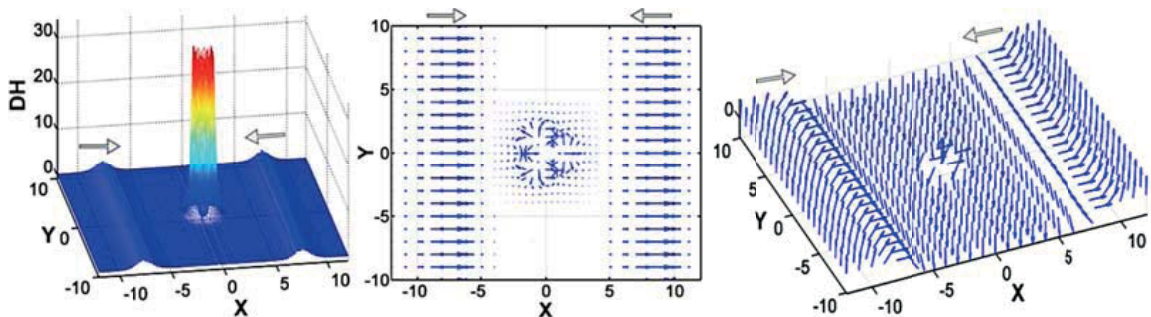


Рис. 8. Трехсолитонное поле модели (6.1) конфигурации (6) для $Q_i = 4$ при $t = 0$: а) плотность энергии (DH); б) проекция $S(s_1, s_2, s_3)$ на пространственную сетку $L(x, y)$ ($z(x, y)$ (4)); в) изоспиновая структура модели (6.1).

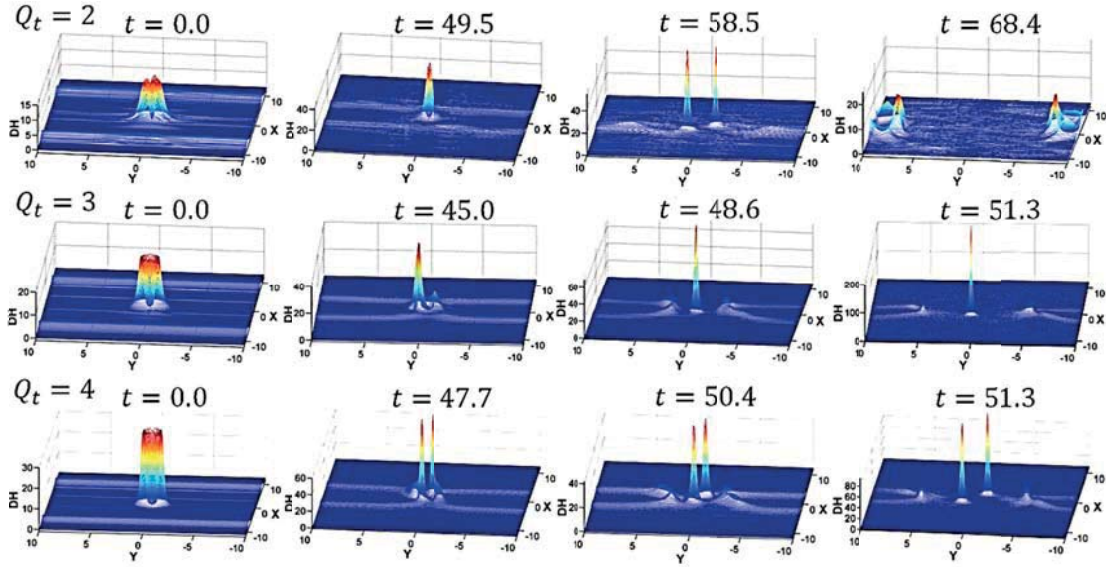


Рис. 9. Эволюция плотности энергии (DH) трехсолитонных взаимодействий (6) неподвижного топологического вихря (2) ($Q_t = 2, 3, 4$) с движущимися ($\mathbf{v}(t_0) \approx \pm 0.0995$) нееловскими доменными границами (3) ($\epsilon = 0$): а) $Q_t = 2$; б) $Q_t = 3$; в) $Q_t = 4$. Общее время моделирования: $t \in [0, 70]$.

Проведением серии численных расчетов конфигурации (6), получены эволюционные модели трехсолитонных взаимодействий, которые по основным параметрам аналогичны моделям, полученным в экспериментах предыдущего пункта. Единственное отличие новых моделей заключается в процессе распада топологических вихрей, где объединение и аннигиляция доменных границ происходит с участием локализованных возмущений, обладающих единичными ($Q_t = 1$) значениями топологического заряда.

На рис. 9 приведены результаты проведенных экспериментов по конфигурации (6) для движущихся со скоростью $\mathbf{v}(t_0) \approx \pm 0.0995$ в противоположных $\pm x$ -направлениях 180-градусных нееловских доменных границ ($\epsilon = 0$) и неподвижных топологических вихрей с $Q_t = 2, 3, 4$.

На рис. 10 приведены интегралы энергии (E_n) систем трехсолитонных взаимодействий (5) и (6). Энергии ($E_{n_k}, E_{n_{Ak}}$) доменной границы (3), а также топологических вихрей (2) (E_{n_v}) в конфигурации (6) аналогичны экспериментам предыдущего пункта.

Как видно из рис. 10, система трехсолитонных взаимодействий $S_{K(0)+V+Ak(0)}$ обладает относительно меньшим значением энергии дополнительных возмущений (E_{n_p}) (см. рис. 7).

5. Обсуждение полученных результатов

Результаты экспериментов по трехсолитонным взаимодействиям, приведенные в третьем пункте, очевидно, можно получить также при следующей (симметричной) конфигурации:

$$S_{K(\pi)+V+Ak(0)} = S_{Kink}(\pi) \rightarrow S_{Vortex} \leftarrow S_{Antikink}(0). \quad (7)$$

Аналогично, результаты экспериментов, приведенные в четвертом пункте настоящей статьи можно получить при симметричной замене параметров доменных границ (3) с $\epsilon = 0$ на $\epsilon = \pi$:

$$S_{K(\pi)+V+Ak(\pi)} = S_{Kink}(\pi) \rightarrow S_{Vortex} \leftarrow S_{Antikink}(\pi). \quad (8)$$

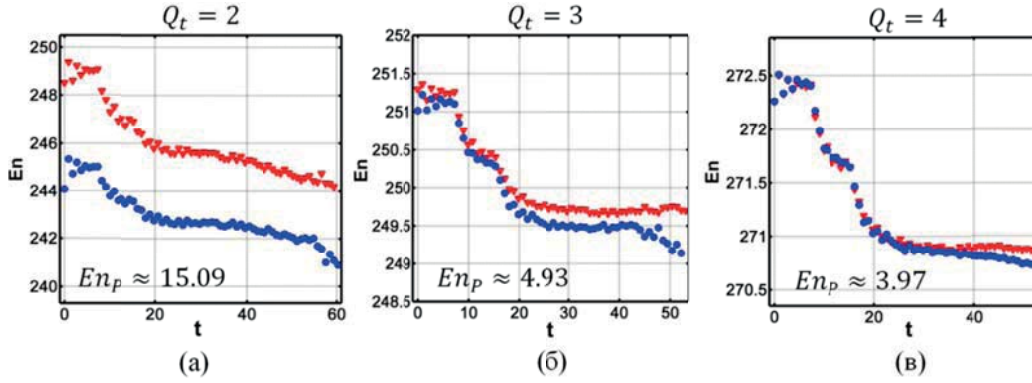


Рис. 10. Интегралы энергий (En) трехсолитонных взаимодействий (5) ($\epsilon = 0, \pi$: \blacktriangledown) и (6) ($\epsilon = 0$: \bullet) неподвижного топологического вихря (2) ($Q_i = 2, 3, 4$) с движущимися ($\mathbf{v}(t_0) \approx \pm 0.0995$) нееловскими доменными границами (3): а) $Q_i = 2$; б) $Q_i = 3$; в) $Q_i = 4$. Общее время моделирования: $t \in [0, 70]$.

Численные эксперименты, проведенные по схемам (7) и (8) показали, что полученные результаты абсолютно идентичны результатам, приведенным соответственно в третьем и четвертом пунктах настоящей статьи. Исследуя вопрос разных значений En_p (см. рис. 10) в моделях, описанных на рис. 6 и 9, мы провели эксперименты по двухсолитонным взаимодействиям следующих конфигураций:

$$\mathbf{S}_{K(0)Ak(0)} = \mathbf{S}_{Kink}(0) \rightarrow \leftarrow \mathbf{S}_{Antikink}(0), \quad (9a)$$

$$\mathbf{S}_{K(\pi)Ak(\pi)} = \mathbf{S}_{Kink}(\pi) \rightarrow \leftarrow \mathbf{S}_{Antikink}(\pi), \quad (9б)$$

$$\mathbf{S}_{K(0)Ak(\pi)} = \mathbf{S}_{Kink}(0) \rightarrow \leftarrow \mathbf{S}_{Antikink}(\pi), \quad (9в)$$

$$\mathbf{S}_{K(\pi)Ak(0)} = \mathbf{S}_{Kink}(\pi) \rightarrow \leftarrow \mathbf{S}_{Antikink}(0). \quad (9г)$$

Полученные эволюционные модели показали, что при взаимодействии однородных (9а, 9б) доменных границ вида (3) происходит свободное их прохождение друг сквозь друга (см. рис. 11, а). Но, в отличие от взаимодействий однородных топологических солитонов при взаимодействии доменных границ вида (3) отличающихся параметром $\epsilon = 0, \pi$ (9в, 9г) мы наблюдаем проявление дальнедействующих сил (см. рис. 11, б).

Таким образом, численные исследования показали, что в полевых конфигурациях (5) и (7) трехсолитонных взаимодействий следует учитывать также наличие дальнедействующих сил между движущимися доменными границами.

Отдельно рассмотрим основные результаты настоящей работы – аннигиляция доменных границ (3) и распад топологического вихря (2) на локализованные возмущения, обладающие единичным топологическим зарядом ($Q_i = 1$). Во всех предыдущих наших экспериментах по двухсолитонным взаимодействиям «вихрь-кинк» (см., например, [9,14]) доменные границы сохраняли устойчивость независимо от скорости налетающего вихря, значения топологического заряда ($Q_i = 1, \dots, 6$) и частоты $\omega(t_0)$ вращения вектора АЗ-поля. При этом топологические вихри при столкновении с доменными границами поэтапно распадались на $2Q_i$ локализованных возмущений, обладающих половинными значениями топологических зарядов ($Q_i = 1/2$). В каждом этапе топологический вихрь излучает пару локализованных возмущений движущихся со скоростью $c = 1$ в противоположные стороны вдоль доменной границы. Таким образом, результаты всех экспериментов в данном направлении как с нееловскими, так и с блоховскими доменными границами (см. таблицу 1) обладают общим свойством – сохранения

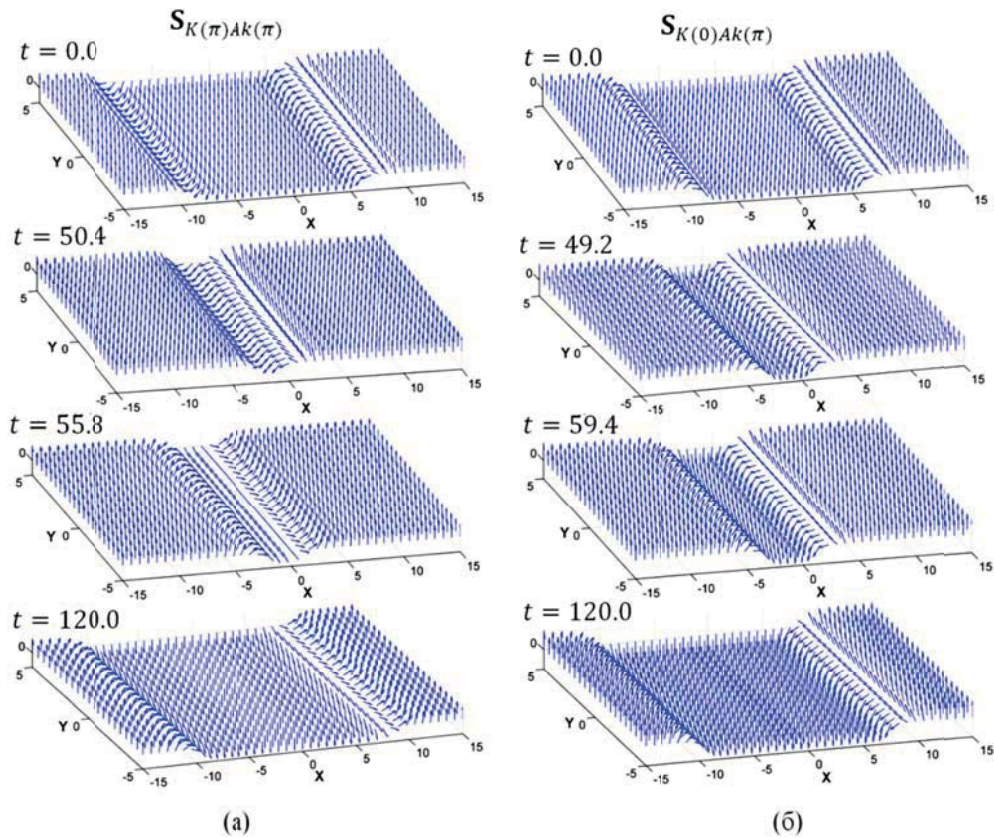


Рис. 11. Изоспиновая структура систем (9б) и (9в) взаимодействующих доменных границ вида (3), движущихся со скоростью $v(t_0) \approx \pm 0.0995$: а) $S_{K(\pi)Ak(\pi)}$; б) $S_{K(0)Ak(\pi)}$. Общее время моделирования: $t \in [0, 120]$.

устойчивости доменных границ и распад топологических вихрей на локализованные возмущения с $Q_i = 1/2$.

Также, следует отметить результаты исследований двухсолитонных взаимодействий вида «кинк-антикинк», аналогичных, приведенным на рис. 11 экспериментам (см., например, [8]). Во всех экспериментах данной серии 180-градусные доменные границы сохраняли структурную устойчивость независимо от значений скорости их движения $v(t_0)$ (до столкновения) и частоты $\omega(t_0)$ вращения изотопического спина.

Таким образом, в наших экспериментах по трехсолитонным взаимодействиям модели аннигиляции доменных границ получены впервые. Как было отмечено выше, процесс аннигиляции доменных границ происходит одновременно с распадом топологических вихрей на локализованные возмущения (см. рис. 6 и 9). В экспериментах настоящей работы указанный процесс распада происходит двумя способами:

Распад на $Q_i - 1$ локализованных возмущений с единичным топологическим зарядом и на 2 локализованных возмущения с половинными значениями топологического заряда. При этом последние распространяются вдоль доменной границы (одновременно с ее аннигиляцией), а оставшиеся $Q_i - 1$ локализованных возмущений свободно эволюционируют, сохраняя устойчивость вплоть до конца времен моделирования.

Распад на Q_i локализованных возмущений с единичным топологическим зарядом. При этом 2 локализованных возмущения распространяются вдоль доменной границы (одновременно с ее аннигиляцией), а оставшиеся $Q_i - 2$ локализованных возмущений свободно эволюционируют, сохраняя устойчивость вплоть до конца времен моделирования.

Первому способу соответствуют конфигурации (5) и (7), второму способу соответствуют конфигурации (6) и (8).

Заметим, что во всех экспериментах настоящей работы локализованные возмущения, формирующиеся после распада топологических вихрей (2) обладают либо половинным ($Q_t = 1/2$), либо единичным ($Q_t = 1$) значением топологического заряда. Однако в предыдущих наших экспериментах по взаимодействию топологических вихрей (см., например, [14,15]) при их распаде образовавшиеся локализованные возмущения обладали произвольным значением Q_t , хотя общая сумма топологических зарядов системы взаимодействующих солитонов всегда сохранялась.

Отметим также, что топологические вихри вида (2) являются моделями квазичастиц, состоящих из объединенных в кольцеобразную форму локальных вихреобразных структур, количество которых равно значению топологического заряда вихря Q_t [14]. Общая изоспиновая структура двух 180-градусных (π -кинк/ π -антикинк) доменных границ вида (3) при непосредственном взаимодействии в некоторый момент времени образуют 360-градусную топологическую структуру (2π -кинк). Численные эксперименты показывают, что взаимодействие данной 360-градусной структуры с топологическим вихрем приводит к распаду последней на составляющие – локальные вихреобразные структуры с $Q_t = 1$.

6. Заключение

Таким образом, наши исследования показали, что в (2+1)-мерной O(3) нелинейной сигма-модели (1) трехсолитонные взаимодействия доменных границ (π -кинков) вида (3) с топологическим вихрем (белавин-поляковским солитоном) вида (2) приводят к аннигиляции доменных границ и полному распаду топологического вихря на локализованные возмущения. При этом два образовавшихся локализованных возмущения движутся вдоль плоскости аннигилирующих доменных границ со скоростью $c=1$. Остальные локализованные возмущения с единичными значениями топологического заряда сохраняют устойчивость и эволюционируют до конца времен моделирования.

Разработаны алгоритм, численные схемы и комплексы компьютерных программ для исследования динамики взаимодействия системы трехсолитонных взаимодействий, состоящей из топологического вихря и двух 180-градусных нееловских ($0, \pi$) и блоховских ($\pi/2, 3\pi/2$) доменных границ в (2+1)-мерной анизотропной O(3) нелинейной сигма-модели. Предложенный метод и комплекс программ позволяют, в частности: определять энергию и плотность энергии системы взаимодействующих солитонов; ускорять их движение до скоростей сравнимых со скоростью света; внести изменения в изоспиновую динамику топологических полей.

Достоверность полученных моделей обеспечивается положительными результатами апробации используемых методов для известных задач (солитонных решений уравнения синус-Гордона), высокой точностью сохранения интеграла энергии системы взаимодействующих солитонов и сопоставления построенных моделей с известными результатами других авторов, а также с практическими экспериментами (см., например, [14,16]).

Литература

1. Поляков А.М. Калибровочные поля и струны // Ижевск: Издательский дом «Удмуртский университет», 1999, 312 с.
2. К. Ициксон, Ж.-Б. Зюбер. Квантовая теория поля: Пер. с англ. // М.: Мир, 1984, т.2. 400 с.
3. Цвеллик А.М. Квантовая теория поля в физике конденсированного состояния. Пер. с англ. // М.: Физматлит, 2004, 320 с.
4. Белавин А.А., Поляков А.М. Метастабильные состояния двумерного изотропного ферромагнетика // ЖЭТФ, 1975, **22** (10), 503-506.

5. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Взаимодействие и распад двумерных топологических солитонов $O(3)$ векторной нелинейной сигма-модели // ДАН РТ, 2011, **54** (2), 110 – 114.
6. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Динамика взаимодействий двумерных топологических солитонов в $O(3)$ нелинейной векторной сигма-модели // ДАН РТ, 2010, **53** (9), 679-684.
7. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Динамические и топологические солитоны в нелинейных сигма-моделях // Душанбе: Издательство «Дониш», 2014, 387с.
8. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Динамика взаимодействия доменных границ в $(2+1)$ -мерной $O(3)$ нелинейной сигма-модели // Известия АН РТ, **4** (161), 2015, 57-64.
9. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Динамика взаимодействия топологических вихрей с доменной стенкой в $(2+1)$ -мерной нелинейной сигма-модели // ДАН РТ, 2015, **58** (4), 302-308.
10. Ковалев А.С. Вихревая структура магнитных солитонов // ФНТ, 2017, **43** (2), 334-346.
11. Самарский А.А. Теория разностных схем // М.: Наука, 1977, 657 с.
12. Муминов Х.Х. О существовании и устойчивости двумерных топологических солитонов в модели изотропного классического антиферромагнетика Гейзенберга // ДАН РТ, 2002, **45** (10), 21-27.
13. Муминов Х.Х. Многомерные динамические топологические солитоны в нелинейной анизотропной сигма-модели // ДАН РТ, 2002, **45** (10), 28-36.
14. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Математическое моделирование нелинейных динамических систем квантовой теории поля // Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2017. – 375 с.
15. Муминов Х.Х., Шокиров Ф.Ш. Взаимодействие и распад двумерных топологических солитонов $O(3)$ векторной нелинейной сигма-модели // ДАН РТ, 2011, **54** (2), 110-114.
16. Kudryavtsev A., Piette V.M.A.G., Zakrzewsky W.J. Skyrmions and domain walls in $(2+1)$ dimensions // Nonlinearity, 1998, **11** (4), 783-796.

DYNAMICS OF TOPOLOGICAL THREE-SOLITON INTERACTIONS IN NONLINEAR SIGMA MODEL

Kh.Kh. Muminov, F.Sh. Shokirov

S.U. Umarov Physical-Technical Institute of Academy of Sciences of the Republic of Tajikistan, Dushanbe

khikmat@inbox.ru, shokirov@rambler.ru

Received 13.09.2017

The results of numerical simulation of the interaction of topological vortices (solitons) with domain walls of the Neel and Bloch types in the $(2+1)$ -dimensional anisotropic $O(3)$ nonlinear sigma model are presented. The properties of the phased decay of topological vortices at interacting with Bloch-type domain walls onto localized perturbations possessing half values of topological charges and moving along the plane of the domain walls are investigated. Models of three-soliton interactions of the kink-vortex-antikink type are obtained, where a phased decay of a topological vortex accompanied by annihilation of domain walls is observed.