РЕЗОНАНСНАЯ ПЛАНАРНАЯ ЛОВУШКА ПЕННИНГА С ПРЯМОУГОЛЬНЫМИ ЭЛЕКТРОДАМИ

Е.М. Новикова*

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» Московский институт электроники и математики

e.m.novikova@hse.ru

Поступила 29.11.2016

Проанализирован масштаб физических параметров, задающих планарную ловушку Пеннинга с прямоугольным кольцеобразным электродом и выявлено единое соотношение между этими параметрами, которое приводит к дважды резонансному осциллятору в главной части гамильтониана для электрона в ловушке. В режиме базового гиперболического резонанса получена явная формула для усредненной ангармонической части гамильтониана через образующие нелиевской алгебры симметрий, которая порождается гармонической частью гамильтониана.

УДК 517.955.8

Введение

Ловушки Пеннинга – это приборы, удерживающие заряженные частицы [1-6]. Главными компонентами таких ловушек являются магнитное поле (вращающее заряды в перпендикулярной плоскости) и электрическое поле (обеспечивающее устойчивость вдоль магнитной оси). Существуют ловушки гиперболического типа, для которых гамильтонианы, записанные в нормальной форме, представляют собой линейную комби-

* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 15-01-08751).

нацию одномерных осцилляторов (операторов «действие») с коэффициентами разных знаков. Вблизи точки покоя потенциал таких ловушек имеет гиперболический (седловой), а не эллиптический тип.

В резонансном режиме гамильтониан такой ловушки порождает некоммутативную, нелинейную (нелиевскую) алгебру гиперболического типа с бесконечномерными неприводимыми представлениями. Симплектические листы соответствующей пуассоновой алгебры некомпактны. Динамика на этих листах задается ангармонической частью потенциала ловушки.

Существование этой ангармонической части неизбежно по технологическим причинам. Обычно, наличие ангармонизма рассматривается как помеха и нежелательная характеристика прибора. Но, в то же время, эта часть может быть использована для создания и управления состояниями и квазичастицами в неприводимых представлениях алгебры интегралов движения захваченного заряда [7]. Это квантовое явление сопровождается очень интересной классической динамикой, симплектической геометрией и топологией.

Подчеркнем, что принципиальную роль здесь играет резонанс между нормальными частотами гармонической части («идеальной» ловушки Пеннинга). В отсутствие резонанса ангармоническая часть не дает такого эффекта.

В качестве модельного базового примера в работе рассматривается гиперболическая ловушка Пеннинга с резонансом 3:(-1) между модифицированной циклотронной и магнетронной частотами [8]. Ловушка имеет геометрическую асимметрию, а именно, рассматриваются электроды прямоугольной формы. Отклонение этой формы от квадрата порождает инстантоны и создает двухуровневую квантовую подсистему при подходящем выборе электрических напряжений, приложенных к электродам ловушки [9].

Большинство исследователей избегают изучения моделей ловушек Пеннинга с частотным резонансом, т.к. при наличии резонанса многие стандартные математические методы «не работают». Но именно наличие резонанса порождает квантовые эффекты, которые могут быть использованы в приложениях, например, для создания кубитов для квантовых компьютеров. Разработка алгебраических, геометрических и операторных методов для резонансных моделей открывает перспективы создания новых современных приборов.

1. Электромагнитное поле ловушки. Гамильтониан системы

Рассмотрим планарную прямоугольную ловушку Пеннинга [3-6, 10, 11] для захвата и удержания частицы с отрицательным электрическим зарядом (знак заряда выбран для определенности). Для удержания частицы в ловушке используется однородное магнитное поле B. Выберем декартовы координаты (q_1, q_2, q_3) так, чтобы ось q_3 была направлена вдоль магнитного поля. Тогда вектор напряженности $B = (\nabla_q \times \mathcal{A}_q)$ и соответствующий векторный потенциал $\mathcal{A}_q$ задаются формулами:

$$B = \left(0, 0, |B|\right), \qquad \mathcal{A}_q = \frac{|B|}{2}\left(-q_2, q_1, 0\right). \tag{1.1}$$

Такое магнитное поле ограничивает движения частицы вдоль плоскости (q_1, q_2).

Для ограничения движений частицы вдоль оси q_3 в рассматриваемой ловушке используется неоднородное электрическое поле, которое создается системой из трех электродов, расположенных в одной плоскости. Внутренний электрод имеет прямоугольную форму со сторонами $2a_1 \times 2a_2$. Он концентрически окружен кольцевым электродом, внешняя граница которого является прямоугольником со сторонами $2\kappa a_1 \times 2\kappa a_2$. Остальную (бесконечную) часть плоскости вокруг кольцевого электрода занимает внешний электрод. Будем предполагать, что коэффициент подобия κ и длины сторон внутреннего электрода удовлетворяют неравенству

$$\kappa > \frac{a_1}{a_2} \geq 1. \tag{1.2}$$

К внутреннему, кольцевому и внешнему электродам приложены постоянные потенциалы V_1, V_2, 0 (соответственно). При этом выполнены следующие условия:

$$\frac{1}{\kappa} \leq \frac{V_2 - V_1}{V_2} \leq \kappa^2, \qquad V_2 < 0. \tag{1.3}$$

Описанная система электродов создает электрическое поле с потенциалом V, удовлетворяющим следующей задаче Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta_3 V(q) = 0, \quad q_3 > 0, \\ V\,|_{q_3=0} = \begin{cases} V_1, & \text{если } |q_1| < a_1 \text{ и } |q_2| < a_2, \\ V_2, & \text{если } a_1 < |q_1| < \kappa a_1 \text{ и } a_2 < |q_2| < \kappa a_2, \\ 0, & \text{если } \kappa a_1 < |q_1| \text{ или } \kappa a_2 < |q_2|, \end{cases} \\ V\,|_{|q|\to\infty} \to 0. \end{cases}$$

Решение V этой задачи можно записать в виде

$$V(q) = (V_1 - V_2)\Phi(q; a_1, a_2) + V_2\Phi(q; \kappa a_1, \kappa a_2) \tag{1.4}$$

через решение Φ уравнения Лапласа с более простым условием Дирихле:

$$\begin{cases} \Delta_3 \Phi(q; b_1, b_2) = 0, \quad q_3 > 0, \\ \Phi(q; b_1, b_2)\,|_{q_3=0} = \begin{cases} 1, & \text{если } |q_1| < b_1 \text{ и } |q_2| < b_2, \\ 0, & \text{если } b_1 < |q_1| \text{ или } b_2 < |q_2|, \end{cases} \\ \Phi(q; b_1, b_2)\,|_{|q|\to\infty} \to 0. \end{cases}$$

Явный вид функции Φ – следующий:

$$\Phi(q; b_1, b_2) = \frac{1}{2\pi}[arctg \frac{(b_1+q_1)(b_2+q_2)}{q_3\sqrt{(b_1+q_1)^2 + (b_2+q_2)^2 + q_3^2}} + arctg \frac{(b_1+q_1)(b_2-q_2)}{q_3\sqrt{(b_1+q_1)^2 + (b_2-q_2)^2 + q_3^2}}$$
$$+ arctg \frac{(b_1-q_1)(b_2+q_2)}{q_3\sqrt{(b_1-q_1)^2 + (b_2+q_2)^2 + q_3^2}} + arctg \frac{(b_1-q_1)(b_2-q_2)}{q_3\sqrt{(b_1-q_1)^2 + (b_2-q_2)^2 + q_3^2}}].$$

Электрическое поле ловушки заставляет заряженную частицу осциллировать вдоль вертикальной оси q_3. А в горизонтальной плоскости (q_1, q_2) за счет электромагнитного поля частица совершает двойное колебательное движение по эпитрохоиде.

Гамильтониан заряженной частицы массой m с электрическим зарядом $-e$ в электромагнитном поле с потенциалами $\mathcal{A}_a$ (1.1) и $V(q)$ (1.4) имеет вид:

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial q} + \frac{e}{c}\mathcal{A}_q\right)^2 + eV(q).$$

Введем безразмерные переменные (x, y, z):

$$(q_1, q_2, q_3) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}\,(x, y, z),$$

соответствующий им оператор $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ и безразмерный векторный потенциал $\mathcal{A} = \frac{1}{2}(-y, x, 0)$. Далее, определим магнитную длину $\rho_0{}^2 = \frac{\hbar c}{e|B|}$, а также специальную калибровку напряжения $V_0 = \frac{\left(a_1{}^2 + a_2{}^2\right) e|B|^2}{mc^2}$ и эффективную постоянную Планка $h = \frac{\rho_0{}^2}{a_1{}^2 + a_2{}^2}$.

Тогда в единицах энергии eV_0 гамильтониан системы запишется в виде $\hat{\mathcal{H}} = eV_0 \hat{H}$ через безразмерный оператор

$$\hat{H} = \frac{1}{2}\left(-ih\nabla + \mathcal{A}\right)^2 + U(x, y, z) \tag{1.5}$$

с потенциалом

$$\begin{aligned} U(x,y,z) &= \frac{V\left(\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}\,(x,y,z)\right)}{V_0} \\ &= \frac{V_1 - V_2}{V_0} u(x, y, z; \cos\varphi, \sin\varphi) + \frac{V_2}{V_0} u(x, y, z; \kappa\cos\varphi, \kappa\sin\varphi). \end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь гармоническая функция

$$u(x,y,z;c,s) = \frac{1}{2\pi}[arctg \frac{(c+x)(s+y)}{z\sqrt{(c+x)^2 + (s+y)^2 + z^2}} + arctg \frac{(c+x)(s-y)}{z\sqrt{(c+x)^2 + (s-y)^2 + z^2}}$$

$$+ arctg \frac{(c-x)(s+y)}{z\sqrt{(c-x)^2 + (s+y)^2 + z^2}} + arctg \frac{(c-x)(s-y)}{z\sqrt{(c-x)^2 + (s-y)^2 + z^2}}],$$

зависит от (безразмерных) геометрических параметров электродов

$$\cos\varphi = \frac{a_1}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{a_2}{\sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}}. \tag{1.7}$$

2. Электрический потенциал ловушки в окрестности стационарной точки

Поскольку потенциал (1.6) является функцией, четной по x и по y, то его производные по x и по y на оси z равны нулю:

$$\frac{\partial U}{\partial x}(0,0,z) = \frac{\partial U}{\partial y}(0,0,z) = 0.$$

Приравнивая нулю его производную по z

$$\frac{\partial U}{\partial z}(0,0,z) = -\frac{\sin 2\varphi}{\pi V_0}\left[\frac{(V_1 - V_2)(1 + 2z^2)}{\sqrt{1+z^2}\left(z^2 + cos^2\varphi\right)\left(z^2 + sin^2\varphi\right)} + \frac{\kappa^2 V_2\left(\kappa^2 + 2z^2\right)}{\sqrt{\kappa^2 + z^2}\left(z^2 + \kappa^2 cos^2\varphi\right)\left(z^2 + \kappa^2 sin^2\varphi\right)}\right],$$

получим уравнение стационарной точки на оси z:

$$\frac{\sqrt{1+z^2}\left(\kappa^2+2z^2\right)\left(z^2+cos^2\varphi\right)\left(z^2+sin^2\varphi\right)}{\sqrt{\kappa^2+z^2}\left(1+2z^2\right)\left(z^2+\kappa^2cos^2\varphi\right)\left(z^2+\kappa^2sin^2\varphi\right)}=\frac{V_2-V_1}{\kappa^2V_2}. \tag{2.1}$$

Вычислив производную по z левой части этого уравнения, можно убедиться в том, что при условии

$$\kappa^2>\frac{1}{tg^2\varphi}\geq 1,$$

(вытекающем из неравенства (1.2)) левая часть этого уравнения, как функция от z, монотонно возрастает от ее значения $\frac{1}{\kappa^3}$ в точке $z=0$ до ее предельного значения 1 при $z\to\infty$. Поэтому в верхнем полупространстве $z>0$ у потенциала U на оси z имеется ровно одна стационарная точка $\left(0,0,z_0\right)$. Ее координата z_0 является единственным положительным корнем уравнения (2.1).

Далее, исследуем вопрос об устойчивости стационарной точки потенциала. Для этого заметим, что в гармоническом приближении движение частицы вдоль оси z описывается оператором

$$\frac{1}{2}\left(-ih\frac{\partial}{\partial z}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial^2U}{\partial z^2}\left(0,0,z_0\right)(z-z_0)^2.$$

Следовательно, условие ограниченности вертикальных движений электрона в ловушке – это условие положительности второй производной

$$\frac{\partial^2U}{\partial z^2}\left(0,0,z_0\right)>0.$$

Нетрудно убедиться, что при условиях (1.2) эта производная противоположна по знаку потенциалу V_2:

$$\mathrm{sgn}\left(\frac{\partial^2U}{\partial z^2}\left(0,0,z_0\right)\right)=-\mathrm{sgn}(V_2).$$

Таким образом, условия (1.3) необходимы и достаточны для существования на полуоси $z>0$ устойчивой стационарной точки электрического потенциала U.

Потенциал (1.6) разложим в степенной ряд в окрестности стационарной точки $\left(0,0,z_0\right)$:

$$\begin{aligned}U\left(x,y,z\right)&=\alpha_0+\frac{1}{2}\left[\left(\alpha_{21}+\alpha_{22}\right)\left(z-z_0\right)^2-\alpha_{21}x^2-\alpha_{22}y^2\right]\\&+\left(z-z_0\right)\left[\frac{1}{3}\left(\beta_1+\beta_2\right)\left(z-z_0\right)^2-\beta_1x^2-\beta_2y^2\right]+[\left(\gamma_{12}+\gamma_{13}\right)x^4+\left(\gamma_{12}+\gamma_{23}\right)y^4\\&+\left(\gamma_{13}+\gamma_{23}\right)\left(z-z_0\right)^4-6\gamma_{12}x^2y^2-6\gamma_{13}x^2\left(z-z_0\right)^2-6\gamma_{23}y^2\left(z-z_0\right)^2]+\dots.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Коэффициенты этого разложения задаются следующими формулами:

$$\alpha_0=U\left(0,0,z_0\right)=\frac{2}{\pi V_0}\left[\left(V_1-V_2\right)arctg\frac{\sin2\varphi}{2z_0\sqrt{1+z_0{}^2}}+V_2arctg\frac{\kappa^2\sin2\varphi}{2z_0\sqrt{\kappa^2+z_0{}^2}}\right], \tag{2.3}$$

$$\alpha_{21} = -U_{xx}\left(0,0,z_0\right) =$$
$$= \frac{\sin 2\varphi\, z_0}{\pi V_0}\left[\left(V_1 - V_2\right)\frac{3z_0{}^2 + 2 + cos^2\varphi}{\left(z_0{}^2 + cos^2\varphi\right)^2\left(1 + z_0{}^2\right)^{3/2}} + V_2\,\frac{\kappa^2\left(3z_0{}^2 + 2\kappa^2 + \kappa^2 cos^2\varphi\right)}{\left(z_0{}^2 + \kappa^2 cos^2\varphi\right)^2\left(\kappa^2 + z_0{}^2\right)^{3/2}}\right],$$

$$\alpha_{22} = -U_{yy}\left(0,0,z_0\right) =$$
$$= \frac{\sin 2\varphi\, z_0}{\pi V_0}\left[\left(V_1 - V_2\right)\frac{3z_0{}^2 + 2 + sin^2\varphi}{\left(z_0{}^2 + sin^2\varphi\right)^2\left(1 + z_0{}^2\right)^{3/2}} + V_2\,\frac{\kappa^2\left(3z_0{}^2 + 2\kappa^2 + \kappa^2 sin^2\varphi\right)}{\left(z_0{}^2 + \kappa^2 sin^2\varphi\right)^2\left(\kappa^2 + z_0{}^2\right)^{3/2}}\right],$$

$$\beta_1 = -\frac{1}{2}U_{xxz}\left(0,0,z_0\right) =$$
$$-\frac{\sin 2\varphi\, z_0}{2\pi V_0}\{\frac{V_1 - V_2}{\left(z_0{}^2 + cos^2\varphi\right)^3\left(1 + z_0{}^2\right)^{5/2}}[12z_0{}^6 + 3\left(5 + 2cos^2\varphi\right)z_0{}^4$$
$$+ 2\left(3 - cos^2\varphi\, sin^2\varphi\right)z_0{}^2 - cos^2\varphi\left(2 + cos^2\varphi\, sin^2\varphi + cos^4\varphi\right)]$$
$$+ \frac{\kappa^2 V_2}{\left(z_0{}^2 + \kappa^2 cos^2\varphi\right)^3\left(\kappa^2 + z_0{}^2\right)^{5/2}}[12z_0{}^6 + 3\kappa^2\left(5 + 2cos^2\varphi\right)z_0{}^4$$
$$+ 2\kappa^4\left(3 - cos^2\varphi\, sin^2\varphi\right)z_0{}^2 - \kappa^6 cos^2\varphi\left(2 + cos^2\varphi\, sin^2\varphi + cos^4\varphi\right)]\},$$

$$\beta_2 = -\frac{1}{2}U_{yyz}\left(0,0,z_0\right) =$$
$$-\frac{\sin 2\varphi\, z_0}{2\pi V_0}\{\frac{V_1 - V_2}{\left(z_0{}^2 + sin^2\varphi\right)^3\left(1 + z_0{}^2\right)^{5/2}}[12z_0{}^6 + 3\left(5 + 2sin^2\varphi\right)z_0{}^4$$
$$+2\left(3 - cos^2\varphi\, sin^2\varphi\right)z_0{}^2 - sin^2\varphi\left(2 + cos^2\varphi\, sin^2\varphi + sin^4\varphi\right)]$$
$$+ \frac{\kappa^2 V_2}{\left(z_0{}^2 + \kappa^2 sin^2\varphi\right)^3\left(\kappa^2 + z_0{}^2\right)^{5/2}}[12z_0{}^6 + 3\kappa^2\left(5 + 2sin^2\varphi\right)z_0{}^4$$
$$+ 2\kappa^4\left(3 - cos^2\varphi\, sin^2\varphi\right)z_0{}^2 - \kappa^6 sin^2\varphi\left(2 + cos^2\varphi\, sin^2\varphi + sin^4\varphi\right)]\},$$

$$\gamma_{12} = -\frac{1}{24}U_{xxyy}\left(0,0,z_0\right) = -\frac{5\sin 2\varphi\, z_0}{8\pi V_0}[\frac{V_1 - V_2}{\left(1 + z_0{}^2\right)^{7/2}} + \frac{\kappa^2 V_2}{\left(\kappa^2 + z_0{}^2\right)^{7/2}}],$$

$$\gamma_{13} = -\frac{1}{24}U_{xxzz}\left(0,0,z_0\right) =$$
$$-\frac{\sin 2\varphi\, z_0}{8\pi V_0}\{\frac{V_1-V_2}{\left(z_0{}^2+cos^2\varphi\right)^4\left(1+z_0{}^2\right)^{7/2}}[20z_0{}^8+5\left(7+2cos^2\varphi\right)z_0{}^6$$
$$+\left(15+5cos^2\varphi\, sin^2\varphi+13\,sin^4\varphi\right)z_0{}^4-\left(25\,cos^6\varphi+35cos^4\varphi\, sin^2\varphi-8\,sin^6\varphi\right)z_0{}^2$$
$$-cos^2\varphi\left(8+7\,cos^6\varphi+11cos^4\varphi\, sin^2\varphi+4cos^2\varphi\, sin^4\varphi\right)]$$
$$+\frac{\kappa^2 V_2}{\left(z_0{}^2+\kappa^2cos^2\varphi\right)^4\left(\kappa^2+z_0{}^2\right)^{7/2}}[20z_0{}^8+5\kappa^2\left(7+2cos^2\varphi\right)z_0{}^6$$
$$+\kappa^4\left(15+5cos^2\varphi\, sin^2\varphi+13\,sin^4\varphi\right)z_0{}^4-\kappa^6\left(25\,cos^6\varphi+35cos^4\varphi\, sin^2\varphi-8\,sin^6\varphi\right)z_0{}^2$$
$$-\kappa^8cos^2\varphi\left(8+7\,cos^6\varphi+11cos^4\varphi\, sin^2\varphi+4cos^2\varphi\, sin^4\varphi\right)]\},$$

$$\gamma_{23} = -\frac{1}{24}U_{yyzz}\left(0,0,z_0\right) =$$
$$-\frac{\sin 2\varphi\, z_0}{8\pi V_0}\{\frac{V_1-V_2}{\left(z_0{}^2+sin^2\varphi\right)^4\left(1+z_0{}^2\right)^{7/2}}[20z_0{}^8+5\left(7+2sin^2\varphi\right)z_0{}^6$$
$$+\left(15+5cos^2\varphi\, sin^2\varphi+13\,cos^4\varphi\right)z_0{}^4-\left(25\,sin^6\varphi+35cos^2\varphi\, sin^4\varphi-8\,cos^6\varphi\right)z_0{}^2$$
$$-sin^2\varphi\left(8+7\,sin^6\varphi+11cos^2\varphi\, sin^4\varphi+4cos^4\varphi\, sin^2\varphi\right)]$$
$$+\frac{\kappa^2 V_2}{\left(z_0{}^2+\kappa^2sin^2\varphi\right)^4\left(\kappa^2+z_0{}^2\right)^{7/2}}[20z_0{}^8+5\kappa^2\left(7+2sin^2\varphi\right)z_0{}^6$$
$$+\kappa^4\left(15+5cos^2\varphi\, sin^2\varphi+13\,cos^4\varphi\right)z_0{}^4-\kappa^6\left(25\,sin^6\varphi+35cos^2\varphi\, sin^4\varphi-8\,cos^6\varphi\right)z_0{}^2$$
$$-\kappa^8sin^2\varphi\left(8+7sin^6\varphi+11cos^2\varphi\, sin^4\varphi+4cos^4\varphi\, sin^2\varphi\right)]\}.$$

3. Гамильтониан ловушки при больших значениях коэффициента подобия

Отметим, что исходные предположения (1.2), (1.3) будут выполнены, если выбрать достаточно большой коэффициент подобия

$$\kappa \gg 1, \tag{3.1}$$

связывающий линейные размеры внутреннего и кольцевого электродов, и выбрать следующие масштабы величин потенциалов, приложенных к этим электродам:

$$V_1 = V_0\left(-\kappa+d\right)\nu\,, \quad V_2 = -V_0\,\kappa\,\nu\,, \tag{3.2}$$

где

$$\nu \sim 1\,,\ \ d \sim 1\ \ (\text{при}\ \ \kappa \to \infty) \quad \text{и} \quad \nu > 0\,, \quad d \geq 1\,. \tag{3.3}$$

Ниже всюду будем предполагать, что условия (3.1), (3.2), (3.3) выполнены.

При больших значениях κ уравнение для координаты z_0 стационарной точки электрического потенциала и формулы для коэффициентов его разложения в окрестности стационарной точки несколько упрощаются.

А именно, при $\kappa \to \infty$ решение уравнения (2.1) имеет асимптотику

$$z_0 = \xi_0 + \frac{\xi_1}{\kappa^2} + O\left(\frac{1}{\kappa^4}\right),$$

где ξ_0 – единственное положительное решение уравнения

$$\frac{\left(1+\left(1+T\right)\xi_0^{\,2}\right)\left(T+\left(1+T\right)\xi_0^{\,2}\right)\sqrt{1+\xi_0^{\,2}}}{T\left(1+2\xi_0^{\,2}\right)} = d, \tag{3.4}$$

а ξ_1 задается формулой

$$\xi_1 = \frac{\left(2+T+T^2\right)\xi_0\left(1+\xi_0^{\,2}\right)\left(1+2\xi_0^{\,2}\right)\left(1+\left(1+T\right)\xi_0^{\,2}\right)\left(T+\left(1+T\right)\xi_0^{\,2}\right)}{2T\left(2+T+2T^2+\left(7+12T+7T^2\right)\xi_0^{\,2}+11\left(1+T\right)^2\xi_0^{\,4}+6\left(1+T\right)^2\xi_0^{\,6}\right)}.$$

Здесь используется обозначение

$$T = tg^2\varphi\,. \tag{3.5}$$

Из приведенных формул видно, что ξ_0 и ξ_1 являются функциями от геометрического параметра T и от управляющего параметра d, определенного в (3.2), (3.3).

Асимптотика коэффициентов гармонической части потенциала U при $\kappa \to \infty$ имеет вид

$$\alpha_{21} = \omega_1^{\,2} + \frac{\alpha_1}{\kappa^2} + O\left(\frac{1}{\kappa^4}\right), \qquad \alpha_{22} = \omega_2^{\,2} + \frac{\alpha_2}{\kappa^2} + O\left(\frac{1}{\kappa^4}\right),$$

где

$$\omega_1^{\,2} = \frac{2d\,v\sqrt{T}\,\xi_0\left(3+2T+3\left(1+T\right)\xi_0^{\,2}\right)}{\pi\left(1+\xi_0^{\,2}\right)^{3/2}\left(1+\left(1+T\right)\xi_0^{\,2}\right)^2}, \qquad \omega_2^{\,2} = \frac{2d\,v\sqrt{T}\,\xi_0\left(2+3T+3\left(1+T\right)\xi_0^{\,2}\right)}{\pi\left(1+\xi_0^{\,2}\right)^{3/2}\left(T+\left(1+T\right)\xi_0^{\,2}\right)^2}, \tag{3.6}$$

$$\alpha_1 = -\frac{2d\,v\sqrt{T}}{\pi\left(1+\xi_0^{\,2}\right)^{5/2}\left(1+\left(1+T\right)\xi_0^{\,2}\right)}\Bigg(\frac{T\left(3+2T\right)\xi_0\left(1+\xi_0^{\,2}\right)^2\left(1+2\xi_0^{\,2}\right)}{T+\left(1+T\right)\xi_0^{\,2}}$$
$$+\frac{\xi_1\left[-3-2T+2\left(3+5T+3T^2\right)\xi_0^{\,2}+3\left(7+12T+5T^2\right)\xi_0^{\,4}+12\left(1+T\right)^2\xi_0^{\,6}\right]}{\left(1+\left(1+T\right)\xi_0^{\,2}\right)^2}\Bigg),$$

$$\alpha_2 = -\frac{2d\,v\sqrt{T}}{\pi\left(1+\xi_0^{\,2}\right)^{5/2}\left(T+\left(1+T\right)\xi_0^{\,2}\right)}\Bigg(\frac{\left(2+3T\right)\xi_0\left(1+\xi_0^{\,2}\right)^2\left(1+2\xi_0^{\,2}\right)}{T\left(1+\left(1+T\right)\xi_0^{\,2}\right)}$$
$$+\frac{\xi_1\left[-T\left(2+3T\right)+2\left(3+5T+3T^2\right)\xi_0^{\,2}+3\left(5+12T+7T^2\right)\xi_0^{\,4}+12\left(1+T\right)^2\xi_0^{\,6}\right]}{\left(T+\left(1+T\right)\xi_0^{\,2}\right)^2}\Bigg).$$

А для коэффициентов ангармонической части потенциала справедливы следующие формулы:

$$\beta_1 = -\frac{d\,v\sqrt{T}\left[-3-2T+2\left(3+5T+3T^2\right)\xi_0^{\,2}+3\left(7+12T+5T^2\right)\xi_0^{\,4}+12\left(1+T\right)^2\xi_0^{\,6}\right]}{\pi\left(1+\xi_0^{\,2}\right)^{5/2}\left(1+\left(1+T\right)\xi_0^{\,2}\right)^3} + O\left(\frac{1}{\kappa^2}\right),$$

$$\beta_2 = -\frac{d\,v\sqrt{T}\left[-T\left(2+3T\right)+2\left(3+5T+3T^2\right)\xi_0^{\,2}+3\left(5+12T+7T^2\right)\xi_0^{\,4}+12\left(1+T\right)^2\xi_0^{\,6}\right]}{\pi\left(1+\xi_0^{\,2}\right)^{5/2}\left(T+\left(1+T\right)\xi_0^{\,2}\right)^3}+O\left(\frac{1}{\kappa^2}\right),$$

$$\gamma_{12} = -\frac{5d\,v\sqrt{T}\xi_0}{4\pi\left(1+T\right)\left(1+\xi_0^{\,2}\right)^{7/2}}+O\left(\frac{1}{\kappa^2}\right),$$

$$\gamma_{13} = -\frac{d\,v\sqrt{T}\xi_0}{4\pi\left(1+\xi_0^{\,2}\right)^{7/2}\left(1+\left(1+T\right)\xi_0^{\,2}\right)^4}[-15-20T-8T^2-\left(25+35T-8T^3\right)\xi_0^{\,2}$$
$$+\left(15+50T+63T^2+28T^3\right)\xi_0^{\,4}+5\left(1+T\right)^2\left(9+7T\right)\xi_0^{\,6}+20\left(1+T\right)^3\xi_0^{\,8}]+O\left(\frac{1}{\kappa^2}\right),$$

$$\gamma_{23} = -\frac{d\,v\sqrt{T}\xi_0}{4\pi\left(1+\xi_0^{\,2}\right)^{7/2}\left(T+\left(1+T\right)\xi_0^{\,2}\right)^4}[-T\left(8+20T+15T^2\right)+\left(8-35T^2-25T^3\right)\xi_0^{\,2}$$
$$+\left(28+63T+50T^2+15T^3\right)\xi_0^{\,4}+5\left(1+T\right)^2\left(7+9\right)\xi_0^{\,6}+20\left(1+T\right)^3\xi_0^{\,8}]+O\left(\frac{1}{\kappa^2}\right).$$

Отметим, что при условиях (1.2) выполнены неравенства $T \le 1,\ \ \omega_1 \le \omega_2$.

Далее, рассмотрим подробнее окрестность стационарной точки, вводя в ней вместо координат x, y, z новые переменные

$$\begin{cases} x_1 = \kappa\, x, \\ x_2 = \kappa\, y, \\ x_3 = k\left(z - z_0\right) \end{cases}$$

и соответствующие импульсы

$$\hat{p}_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_j},$$

где

$$\hbar = \kappa^2 h.$$

Теперь гамильтониан (1.5) тоже можно разложить по степеням малого параметра $1/\kappa$ (при $\kappa \to \infty$). Для этого в формулу (1.5) подставим разложение (2.2) потенциала (1.6) в окрестности стационарной точки. При этом опустим константу α_0 (2.3), не влияющую на уравнения движения. А остальные коэффициенты разложения (2.2) заменим вычисленными выше асимптотиками по большим значениям параметра κ. Тогда мы получим следующий оператор, описывающий прямоугольную ловушку Пеннинга:

$$\hat{H} - \alpha_0 = \frac{1}{\kappa^2}\left(\hat{H}_0 + \frac{1}{\kappa}\hat{H}_1 + \frac{1}{\kappa^2}\hat{H}_2 + O\left(\frac{1}{\kappa^3}\right)\right). \tag{3.7}$$

Здесь старшая – гармоническая – часть гамильтониана задается формулой

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\left(\left(\hat{p}_1 - \frac{x_2}{2}\right)^2 + \left(\hat{p}_2 + \frac{x_1}{2}\right)^2 + \hat{p}_3^{\,2} + \left(\omega_1^{\,2}+\omega_2^{\,2}\right)x_3^{\,2} - \omega_1^{\,2}x_1^{\,2} - \omega_2^{\,2}x_2^{\,2}\right), \tag{3.8}$$

а ангармонические поправки представляют собой полиномы третьей, четвертой, и более высоких степеней по координатам:

$$\hat{H}_1 = x_3\left(\frac{1}{3}\left(\beta_1+\beta_2\right)x_3^{\,2}-\beta_1 x_1^{\,2}-\beta_2 x_2^{\,2}\right), \tag{3.9}$$

$$\begin{aligned}\hat{H}_2 = \frac{1}{2}\Big(\left(\alpha_1+\alpha_2\right)x_3^{\,2}-\alpha_1 x_1^{\,2}-\alpha_2 x_2^{\,2}\Big)+\left(\gamma_{12}+\gamma_{13}\right)x_1^{\,4}+\left(\gamma_{12}+\gamma_{23}\right)x_2^{\,4}\\ +\left(\gamma_{13}+\gamma_{23}\right)x_3^{\,4}-6\gamma_{12}x_1^{\,2}x_2^{\,2}-6\gamma_{13}x_1^{\,2}x_3^{\,2}-6\gamma_{23}x_2^{\,2}x_3^{\,2}.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Ограничимся членами до порядка $O(1/\kappa^3)$.

4. Гиперболический осциллятор $\hat{H}_0$. Резонансное соотношение

С помощью канонического преобразования

$$\begin{cases} x_1 = v_+x_+ + v_-x_-,\\ x_2 = -\dfrac{\omega_1^{\,2}+\omega_+^{\,2}}{\omega_+}v_+\hat{p}_+ - \dfrac{\omega_1^{\,2}+\omega_-^{\,2}}{\omega_-}v_-\hat{p}_-,\\ x_3 = \dfrac{x_0}{\sqrt[4]{\omega_1^{\,2}+\omega_2^{\,2}}},\\ \hat{p}_1 = \dfrac{\omega_+^{\,2}-\omega_1^{\,2}}{2\omega_+}v_+\hat{p}_+ + \dfrac{\omega_-^{\,2}-\omega_1^{\,2}}{2\omega_-}v_-\hat{p}_-,\\ \hat{p}_2 = \left(\omega_1^{\,2}+\omega_+^{\,2}-\dfrac{1}{2}\right)v_+x_+ + \left(\omega_1^{\,2}+\omega_-^{\,2}-\dfrac{1}{2}\right)v_-x_-,\\ \hat{p}_3 = \sqrt[4]{\omega_1^{\,2}+\omega_2^{\,2}}\,\hat{p}_0, \end{cases}$$

где

$$\omega_\pm = \pm\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\omega_1^{\,2}-\omega_2^{\,2}\right)\pm\sqrt{\left(1-\omega_1^{\,2}-\omega_2^{\,2}\right)^2-4\omega_1^{\,2}\omega_2^{\,2}}}\ , \tag{4.1}$$

$$v_\pm = \sqrt{\frac{\omega_\pm}{(\omega_1^{\,2}+\omega_\pm^{\,2})^2-\omega_1^{\,2}}}\ ,$$

квадратичный гамильтониан (3.8) приводится к нормальной форме, в которой он имеет вид гиперболического осциллятора

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}\Big(\omega_+\left(\hat{p}_+^{\,2}+x_+^{\,2}\right)+\omega_-\left(\hat{p}_-^{\,2}+x_-^{\,2}\right)+\omega_0\left(\hat{p}_0^{\,2}+x_0^{\,2}\right)\Big) \tag{4.2}$$

с нормальными частотами

$$\omega_+>0,\quad \omega_-<0,\quad \omega_0=\sqrt{1-\left(\omega_+^{\,2}+\omega_-^{\,2}\right)}=\sqrt{\omega_1^{\,2}+\omega_2^{\,2}>0}\,. \tag{4.3}$$

Покажем теперь, как за счет выбора значения исходных параметров ловушки можно обеспечить резонансу между нормальными частотами $\omega_+,\ \omega_-$.

Зафиксируем натуральные числа $k_+,\ k_-$ и вычислим положительное число m, при котором нормальные частоты (4.3) находятся в следующей резонансной пропорции:

$$\omega_+:\omega_-:\omega_0 = k_+:\left(-k_-\right):m\,. \tag{4.4}$$

Отметим, что данные числа $k_+,\ k_-$ должны подчиняться неравенству $k_+\ge k_-$, поскольку из формул (4.1) вытекает аналогичное неравенство для нормальных частот: $\omega_+\ge-\omega_-$.

Из требуемой резонансной пропорции (4.4) и из формулы (4.3) для ω_0 получим следующие выражения нормальных частот через параметры резонанса $k_+,\ k_-$:

$$\omega_+ = \frac{k_+}{\sqrt{k_+{}^2 + k_-{}^2 + m^2}}, \quad \omega_- = -\frac{k_-}{\sqrt{k_+{}^2 + k_-{}^2 + m^2}}.$$

Подставляя эти выражения в соотношения (4.1), связывающие коэффициенты ω_1, ω_2 с нормальными частотами, получим равенства

$$\frac{m^2 - \sqrt{m^4 - 4k_+{}^2 k_-{}^2}}{m^2 + \sqrt{m^4 - 4k_+{}^2 k_-{}^2}} = \frac{\omega_1{}^2}{\omega_2{}^2}, \qquad \omega_1{}^2 + \omega_2{}^2 = \frac{m^2}{k_+{}^2 + k_-{}^2 + m^2}. \tag{4.5}$$

Чтобы найти зависимость чисел k_+, k_-, m от исходных параметров ловушки, подставим в (4.5) формулы (3.6). Вспомним, что коэффициенты $\omega_1{}^2$, $\omega_2{}^2$ зависят от трех параметров ловушки: T, d и v, причем оба коэффициента $\omega_1{}^2$, $\omega_2{}^2$ прямо пропорциональны параметру v. Поэтому правая часть $\omega_1{}^2 / \omega_2{}^2$ первого равенства (4.5) не зависит от v. И, следовательно, из него можно получить выражение для числа m через T и d:

$$m = \sqrt{\frac{k_+ k_- (1+T)\left(2 + T + 2T^2 + \left(7 + 12T + 7T^2\right)\xi_0{}^2 + 11(1+T)^2 \xi_0{}^4 + 6(1+T)^2 \xi_0{}^6\right)}{\left(1 + (1+T)\xi_0^2\right)\left(T + (1+T)\xi_0^2\right)\sqrt{\left(3 + 2T + 3(1+T)\xi_0^2\right)\left(2 + 3T + 3(1+T)\xi_0^2\right)}}}. \tag{4.6}$$

(Напомним, что, в силу (3.4), ξ_0 – это некоторая функция от тех же параметров T и d.)

А левая часть $\omega_1{}^2 + \omega_2{}^2$ второго равенства (4.5) пропорциональна v. Поэтому из этого равенства можно получить выражение для v через T и d:

$$\begin{gathered} v = \frac{\pi k_+ k_-}{2d\sqrt{T}\,\xi_0}\left(1 + \xi_0{}^2\right)^{3/2}\left(1 + (1+T)\xi_0{}^2\right)^2\left(T + (1+T)\xi_0{}^2\right)^2 / \\ [\left(k^2 + l^2\right)\left(1 + (1+T)\xi_0^2\right)\left(T + (1+T)\xi_0^2\right)\sqrt{\left(3 + 2T + 3(1+T)\xi_0^2\right)\left(2 + 3T + 3(1+T)\xi_0^2\right)} \\ + k\,l(1+T)\left(2 + T + 2T^2 + \left(7 + 12T + 7T^2\right)\xi_0{}^2 + 11(1+T)^2 \xi_0{}^4 + 6(1+T)^2 \xi_0{}^6\right)]. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Предположим, что управляющие параметры* v, d *(3.2), (3.3) и геометрический параметр* T *(3.5) ловушки связаны между собой по формуле (4.7), где* k_+, k_- *– целые положительные числа, удовлетворяющие неравенству* $k_+ \ge k_-$*, а* ξ_0 *– это положительное решение уравнения (3.4).*

Тогда старшая часть $\hat{H}_0$ *(4.2) гамильтониана заряженной частицы в ловушке представляет собой резонансный гиперболический осциллятор, нормальные частоты которого находятся в резонансной пропорции (4.4). Здесь* m *задается формулой (4.6).*

В качестве примера подробно остановимся на случае $k_+ = 3$, $k_- = 1$ [8]. (См. для сравнения работу [12], в которой для планарной ловушки рассмотрена другая резонансная пропорция 2(-1):2.) В случае $k_+ = 3$, $k_- = 1$ формулы (4.6), (4.7) принимают вид:

$$m = \sqrt{\frac{3(1+T)\left(2 + T + 2T^2 + \left(7 + 12T + 7T^2\right)\xi_0{}^2 + 11(1+T)^2 \xi_0{}^4 + 6(1+T)^2 \xi_0{}^6\right)}{\left(1 + (1+T)\xi_0^2\right)\left(T + (1+T)\xi_0^2\right)\sqrt{\left(3 + 2T + 3(1+T)\xi_0^2\right)\left(2 + 3T + 3(1+T)\xi_0^2\right)}}}, \tag{4.8}$$

$$\nu = \frac{3\pi}{2d\sqrt{T}\,\xi_0}\left(1+\xi_0{}^2\right)^{3/2}\left(1+\left(1+T\right)\xi_0{}^2\right)^2\left(T+\left(1+T\right)\xi_0{}^2\right)^2 /$$

$$[10\left(1+\left(1+T\right)\xi_0{}^2\right)\left(T+\left(1+T\right)\xi_0{}^2\right)\sqrt{\left(3+2T+3\left(1+T\right)\xi_0{}^2\right)\left(2+3T+3\left(1+T\right)\xi_0{}^2\right)} \quad (4.9)$$

$$+3\left(1+T\right)\left(2+T+2T^2+\left(7+12T+7T^2\right)\xi_0{}^2+11\left(1+T\right)^2\xi_0{}^4+6\left(1+T\right)^2\xi_0{}^6\right)].$$

При таком выборе значения параметра ν оператор (4.2) является гиперболическим резонансным осциллятором с резонансной пропорцией

$$\omega_+ : \omega_- : \omega_0 = 3 : \left(-1\right) : m$$

где m задается формулой (4.8), в которой ξ_0 – это решение уравнения (3.4). Нормальные частоты равны

$$\omega_+ = \frac{3}{\sqrt{10+m^2}}, \qquad \omega_- = -\frac{1}{\sqrt{10+m^2}}, \qquad \omega_0 = \frac{m}{\sqrt{10+m^2}}.$$

В этом случае линейная замена

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{\left(10+m^2\right)^{1/4}}{4\sqrt{3}}\left(\sqrt{18+m^2+R}\,x_+ + \sqrt{3\left(m^2+2+R\right)}x_-\right), \\ x_2 = \dfrac{\left(10+m^2\right)^{1/4}}{4\sqrt{3}}\left(-\sqrt{18+m^2-R}\,\hat{p}_+ + \sqrt{3\left(m^2+2-R\right)}\hat{p}_-\right), \\ x_3 = \dfrac{\left(10+m^2\right)^{1/4}}{\sqrt{m}}x_0, \\ \hat{p}_1 = \dfrac{1}{8\sqrt{3}\left(10+m^2\right)^{1/4}}\left(\sqrt{\left(8+R\right)\left(18-m^2+R\right)}\,\hat{p}_+ + \sqrt{3\left(8-R\right)\left(m^2-2-R\right)}\,\hat{p}_-\right), \\ \hat{p}_2 = -\dfrac{1}{8\sqrt{3}\left(10+m^2\right)^{\frac{3}{4}}}\left(\left(R-8\right)\sqrt{18+m^2+R}\,x_+ + \left(R+8\right)\sqrt{3\left(m^2+2+R\right)}\,x_-\right), \\ \hat{p}_3 = \dfrac{\sqrt{m}}{\left(10+m^2\right)^{1/4}}\,\hat{p}_0. \end{cases}$$

где введено обозначение

$$R = \sqrt{m^4-36},$$

приводит $\ddot{H}_0$ к следующей нормальной форме:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2\sqrt{10+m^2}}\left(3\left(\hat{p}_+{}^2+x_+{}^2\right)-\left(\hat{p}_-{}^2+x_-{}^2\right)+m\left(\hat{p}_0{}^2+x_0{}^2\right)\right). \qquad (4.10)$$

При исследовании полного гамильтониана ловушки такую же замену необходимо применить и к ангармоническим поправкам – операторам (3.9), (3.10).

5. Квантовое усреднение. Усредненный гамильтониан как элемент алгебры симметрий гиперболического резонансного осциллятора

Сначала объясним схему квантового усреднения (см. [8, 9, 13]) возмущенного гамильтониана $\hat{H}_0 + \varepsilon \hat{H}_1 + \varepsilon^2 \hat{H}_2$, а затем применим усреднение к гамильтониану (3.8).

Введем операторы комплексной структуры

$$\hat{z}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_j + i\hat{p}_j\right), \quad \hat{z}_j^{\,*} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_j - i\hat{p}_j\right), \qquad j \in \{+,-,0\},$$

и определим операторы «действие» – гамильтонианы одномерных осцилляторов:

$$\hat{S}_j = \hat{z}_j^{\,*}\hat{z}_j, \quad j \in \{+,-,0\}.$$

Каждому оператору $\hat{V}$ поставим в соответствие семейство операторов [14]

$$\hat{V}(t,\tau) = \exp\left\{-\frac{it}{\hbar}ad_{3\hat{S}_+ - \hat{S}_-}\right\}\exp\left\{-\frac{i\tau}{\hbar}ad_{\hat{S}_0}\right\}, \tag{5.1}$$

параметризованное двумя циклическими переменными $0 \le t < 2\pi,\ 0 \le \tau < 2\pi$, а также определим следующие две операции над $\hat{V}$:

$$\underline{\hat{V}} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} d\tau \hat{V}(t,\tau), \qquad \hat{V}^{\#} = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi} dt \int_0^{2\pi} d\tau\, \phi(t,\tau)\, \hat{V}(t,\tau). \tag{5.2}$$

Здесь $2\pi-$ периодическая по обеим переменным t,τ функция ϕ задается рядом

$$\phi(t,\tau) = -i\sqrt{10+m^2} \sum_{\substack{(r,s)\in\mathbb{Z}^2,\\ (r,s)\neq(0,0)}} \frac{e^{i(rt+s\tau)}}{r+ms}.$$

Предложение 5.1. *Выполнено гомологическое уравнение:*

$$\begin{cases} \dfrac{i}{\hbar}\left[\hat{H}_0, \hat{V}^{\#}\right] = \hat{V} - \underline{\hat{V}}, \\ \left[\hat{H}_0, \underline{\hat{V}}\right] = 0. \end{cases}$$

Предложение 5.2. *Пусть операторы* $\hat{H}_{10}$, $\hat{H}_{20}$, $\hat{G}$ *задаются формулами*

$$\hat{H}_{10} = \underline{\hat{H}_1}, \qquad \hat{H}_{20} = \underline{\hat{H}_2 + \frac{i}{2\hbar}\left[\hat{H}_1^{\#}, \hat{H}_1 + \underline{\hat{H}_1}\right]},$$

$$\hat{G} = \hat{H}_1^{\#} + \varepsilon\left(\hat{H}_2^{\#} + \frac{i}{2\hbar}\left[\hat{H}_1^{\#}, \hat{H}_1 + \underline{\hat{H}_1}\right]^{\#}\right).$$

Тогда следующее усредняющее преобразование приводит возмущенный гамильтониан $\hat{H}_0 + \varepsilon\hat{H}_1 + \varepsilon^2\hat{H}_2$ *к сумме коммутирующих операторов* $\hat{H}_0$ *и* $\hat{H}_{10} + \varepsilon\hat{H}_{20}$*:*

$$\left(\hat{H}_0 + \varepsilon\hat{H}_1 + \varepsilon^2\hat{H}_2\right)\exp\left\{-\frac{i\varepsilon}{\hbar}\hat{G}\right\} = \exp\left\{-\frac{i\varepsilon}{\hbar}\hat{G}\right\}\left(\hat{H}_0 + \varepsilon\hat{H}_{10} + \varepsilon^2\hat{H}_{20} + O\left(\varepsilon^3\right)\right).$$

Оператор $\hat{H}_{10} + \varepsilon\hat{H}_{20}$ назовем *усредненным возмущением*, а оператор $\hat{G}$ – *усредняющим оператором*.

Поскольку семейство операторов (5.1) зависит от параметров t,τ $2\pi-$ периодическим образом, то его можно разложить в ряд Фурье по экспонентам $e^{-i(rt+s\tau)}$. Тогда вычисление операций (5.2) сведется к подсчету элементарных интегралов

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}dt\int_0^{2\pi}d\tau\, e^{i(rt+s\tau)}=\delta_{r,0}\ \delta_{s,0}.$$

Этот технический прием [15] удобно применять в тех случаях, когда число ненулевых коэффициентов Фурье для заданного оператора конечно.

Применение этой техники приводит к следующим выражениям для усредненного возмущения и усредняющего оператора.

Предложение 5.3. *Пусть*

$$\hat{H}_1(t,\tau)=\sum_{(r,s)\in\mathbb{Z}^2}e^{-i(rt+s\tau)}\hat{H}_{1,(r,s)},\quad \hat{H}_2(t,\tau)=\sum_{(r,s)\in\mathbb{Z}^2}e^{-i(rt+s\tau)}\hat{H}_{2,(r,s)}.$$

Тогда

$$\hat{H}_{10}=\hat{H}_{1,(0,0)},\quad \hat{H}_{20}=\hat{H}_{2,(0,0)}+\frac{\sqrt{10+m^2}}{\hbar}\sum_{\substack{(r,s)\in\mathbb{Z}^2_+,\\(r,s)\neq(0,0)}}\frac{1}{r+ms}\left[\hat{H}_{1,(r,s)},\hat{H}_{1,(r,s)}{}^*\right],$$

$$\hat{G}=\hat{H}_1{}^{\#}+O(\varepsilon),\quad \hat{H}_1{}^{\#}=-i\sqrt{10+m^2}\sum_{\substack{(r,s)\in\mathbb{Z}^2,\\(r,s)\neq(0,0)}}\frac{1}{r+ms}\hat{H}_{1,(r,s)}.$$

Предложение 5.3 вытекает из формул

$$\underline{\left[\hat{H}_1{}^{\#},\hat{H}_1\right]}=-2i\sqrt{10+m^2}\sum_{\substack{(r,s)\in\mathbb{Z}^2_+,\\(r,s)\neq(0,0)}}\frac{1}{r+ms}\left[\hat{H}_{1,(r,s)},\hat{H}_{1,(r,s)}{}^*\right],\qquad \underline{\left[\hat{H}_1{}^{\#},\underline{\hat{H}_1}\right]}=0.$$

Описанную процедуру усреднения применим к нашему гамильтониану (3.8). Прежде всего построим семейства операторов $\hat{H}_1(t,\tau)$ и $\hat{H}_2(t,\tau)$. Для этого заметим, что возмущающие гамильтонианы $\hat{H}_1,\hat{H}_2$ являются полиномами по операторам комплексной структуры $\hat{z}_+,\hat{z}_-,\hat{z}_0$ и сопряженным к ним операторам $\hat{z}_+,\hat{z}_-,\hat{z}_0,\hat{z}^*_+,\hat{z}^*_-,\hat{z}^*_0$. И учтем, что построение семейства $(\widehat{V_1}\widehat{V_2}\widehat{V_3}...)(t,\tau)$ (5.1) для произведения произвольных операторов $\widehat{V_1},\ \widehat{V_2},\ \widehat{V_3},...$ сводится к построению соответствующих им семейств (5.1) $\widehat{V_1}(t,\tau),\widehat{V_2}(t,\tau),\widehat{V_3}(t,\tau),...$:

$$(\widehat{V_1}\widehat{V_2}\widehat{V_3}...)(t,\tau)=\widehat{V_1}(t,\tau)\widehat{V_2}(t,\tau)\widehat{V_3}(t,\tau)\dots.\tag{5.3}$$

Поэтому достаточно научиться вычислять $\hat{z}_+(t,\tau),\ \hat{z}_-(t,\tau),\ \hat{z}_0(t,\tau)$.

Лемма 5.1. *Операторам комплексной структуры соответствуют следующие семейства (5.1):*

$$\hat{z}_+(t,\tau)=e^{3it}\hat{z}_+,\quad \hat{z}_-(t,\tau)=e^{-it}\hat{z}_-,\quad \hat{z}_0(t,\tau)=e^{i\tau}\hat{z}_0,$$

$$\hat{z}^*_+(t,\tau)=e^{-3it}\hat{z}^*_+,\quad \hat{z}^*_-(t,\tau)=e^{it}\hat{z}^*_-,\quad \hat{z}^*_0(t,\tau)=e^{-i\tau}\hat{z}^*_0.$$

Лемма 5.1 вытекает из перестановочных соотношений

$$\hat{z}_j\hat{S}_k=(\hat{S}_k+\hbar\delta_{jk})\hat{z}_j,\quad \hat{z}^*_j\hat{S}_k=(\hat{S}_k-\hbar\delta_{jk})\hat{z}^*_j.$$

Используя формулу (5.3) и лемму 5.1, легко увидеть, что для $\hat{H}_1(t,\tau)$ ненулевыми являются только следующие коэффициенты Фурье:

$$\hat{H}_{1,(0,\pm3)},\hat{H}_{1,(0,\pm1)},\hat{H}_{1,(2,\pm1)},\hat{H}_{1,(-2,\pm1)},\hat{H}_{1,(4,\pm1)},\hat{H}_{1,(-4,\pm1)},\hat{H}_{1,(6,\pm1)},\hat{H}_{1,(-6,\pm1)}.$$

Аналогично рассматривается семейство операторов $\hat{H}_2(t,\tau)$. Подставляя в Лемму 5.3 явные формулы для коэффициентов Фурье $\hat{H}_{1,(r,s)},\hat{H}_{2,(r,s)}$, можно получить усредненный гамильтониан и усредняющий оператор для нашей задачи о прямоугольной ловушке Пеннинга.

Отметим, что за счет резонанса старшая часть $\hat{H}_0$ гамильтониана заряженной частицы в ловушке Пеннинга порождает некоммутативную нелинейную алгебру симметрий (т.е. операторов, коммутирующих с $\hat{H}_0$) гиперболического типа с бесконечномерными неприводимыми представлениями. Поскольку усредненный гамильтониан $\hat{H}_{10}+\varepsilon\hat{H}_{20}$ коммутирует с $\hat{H}_0$, то он является функцией от образующих алгебры квантовых симметрий $\hat{H}_0$. Опишем эту алгебру.

Предложение 5.4. Алгебра симметрий оператора $\hat{H}_0$ порождается генераторами:

$$\hat{B}=z_+^* z_-^{*3}, \qquad \hat{C}=\hat{B}^*, \quad \hat{S}_+, \quad \hat{S}_-, \quad \hat{S}_0 \tag{5.4}$$

и задается следующими коммутационными соотношениями:

$$\left[\hat{C},\hat{B}\right]=\hbar\left(9\hat{S}_+\hat{S}_-^{\,2}+\hat{S}_-^{\,3}+\hbar\left(9\hat{S}_+\hat{S}_-+6\hat{S}_-^{\,2}\right)+\hbar^2\left(6\hat{S}_++11\hat{S}_-\right)+6\hbar^3\right), \tag{5.5}$$

$$\hat{C}\hat{S}_+=\left(\hat{S}_++\hbar\right)\hat{C}, \qquad \hat{S}_+\hat{B}=\hat{B}\left(\hat{S}_++\hbar\right),$$

$$\hat{C}\hat{S}_-=\left(\hat{S}_-+3\hbar\right)\hat{C}, \qquad \hat{S}_-\hat{B}=\hat{B}\left(\hat{S}_-+3\hbar\right),$$

$$\hat{C}\hat{S}_0=\hat{S}_0\hat{C}, \qquad \hat{S}_0\hat{B}=\hat{B}\hat{S}_0.$$

В этой алгебре имеется три элемента Казимира:

$$\hat{K}=\hat{B}\hat{C}-\hat{S}_+\hat{S}_-\left(\hat{S}_--\hbar\right)\left(\hat{S}_--2\hbar\right),$$

$$\hat{\varkappa}_1=3\hat{S}_+-\hat{S}_-, \qquad \hat{\varkappa}_2=\hat{S}_0.$$

В реализации (5.4) они связаны с $\hat{H}_0$ *так:*

$$\hat{K}=0, \quad \hat{\varkappa}_1+m\hat{\varkappa}_2=\sqrt{10+m^2}\,\hat{H}_0-\frac{(m+2)\hbar}{2}.$$

Нелиевские алгебры, соответствующие эллиптическим резонансам, изучались в работах [13, 16-19], а в работе [20] рассмотрена алгебра гиперболического резонанса.

Далее, приведем явные формулы для усредненного гамильтониана и усредняющего оператора.

Теорема 5.1. Предположим, что управляющие параметры ловушки d,ν *прямоугольной ловушки Пеннинга связаны с ее геометрическим параметром* T *резонансным соотношением (4.9), а число* m *задано формулой (4.8).*

Тогда усредненный гамильтониан $\hat{H}_{10}+\varepsilon\hat{H}_{20}$ *выражается через образующие (5.4) алгебры симметрий гиперболического резонансного осциллятора* $\hat{H}_0$ *(4.10) по формулам:*

$$\hat{H}_{10}=0,$$

$$\hat{H}_{200}=\eta\left(B+B^*\right)+\eta_{++}S_+^2+\eta_{--}S_-^2+\eta_{00}S_0^2+\eta_{+-}S_+S_-+\eta_{+0}S_+S_0+\eta_{-0}S_-S_0$$
$$+\left(\eta_++h\eta_{+h}\right)S_++\left(\eta_-+h\eta_{-h}\right)S_-+\left(\eta_0+h\eta_{0h}\right)S_0+h\eta_h+h^2\eta_{\mathrm{hh}}, \tag{5.7}$$

где

$$\eta=\frac{\left(10+m^2\right)^{3/2}}{256\sqrt{6}\left(-4+m^2\right)}\{\left(10+m^2\right)[-\left(2+m^2+R\right)\sqrt{m^2+R}\beta_1^2$$
$$+4\left(\sqrt{m^2-R}-\sqrt{m^2+R}\right)\beta_1\beta_2+\left(2+m^2-R\right)\sqrt{m^2-R}\beta_2^2]$$
$$-2\left(-4+m^2\right)[2\left(\left(-4-2m^2+R\right)\sqrt{m^2+R}+\left(4+2m^2+R\right)\sqrt{m^2-R}\right)\gamma_{12}$$
$$-\left(2+m^2+R\right)\sqrt{m^2+R}\gamma_{13}+\left(2+m^2-R\right)\sqrt{m^2-R}\gamma_{23}]\},$$

$$\eta_{++}=\frac{10+m^2}{3072m^2\left(-36+m^2\right)}\{2m^2\left(-36+m^2\right)[4R^2\gamma_{12}+\left(18+m^2+R\right)^2\gamma_{13}+\left(18+m^2-R\right)^2\gamma_{23}]$$

$$-\left(10+m^2\right)[\left(-24+m^2\right)\left(18+m^2+R\right)^2\beta_1^2+24\left(-72+m^2\right)\left(10+m^2\right)\beta_1\beta_2$$

$$+\left(-24+m^2\right)\left(18+m^2-R\right)^2\beta_2^2]\},$$

$$\eta_{--}=\frac{10+m^2}{1024m^2\left(-4+m^2\right)}\{6m^2\left(-4+m^2\right)[4R^2\gamma_{12}+\left(2+m^2+R\right)^2\gamma_{13}+\left(2+m^2-R\right)^2\gamma_{23}]$$

$$-\left(10+m^2\right)[\left(-8+3m^2\right)\left(2+m^2+R\right)^2\beta_1^2+8\left(-8+m^2\right)\left(10+m^2\right)\beta_1\beta_2$$

$$+\left(-8+3m^2\right)\left(2+m^2-R\right)^2\beta_2^2]\},$$

$$\eta_{00}=\frac{\left(10+m^2\right)}{12m^4}\left[18m^2\left(\gamma_{13}+\gamma_{23}\right)-5\left(10+m^2\right)\left(\beta_1+\beta_2\right)^2\right],$$

$$\eta_{+-}=\frac{10+m^2}{384m^2\left(64-20m^2+m^4\right)}\{3m^2\left(64-20m^2+m^4\right)[4R^2\gamma_{12}+2\left(10+m^2\right)\left(m^2+R\right)\gamma_{13}$$

$$+2\left(10+m^2\right)\left(m^2-R\right)\gamma_{23}]-\left(10+m^2\right)[\left(10+m^2\right)\left(64-40m^2+3m^4\right)\left(m^2+R\right)\beta_1^2$$

$$+4\left(1152-400m^2-118m^4+5m^6\right)\beta_1\beta_2+\left(10+m^2\right)\left(64-40m^2+3m^4\right)\left(m^2-R\right)\beta_2^2]\},$$

$$\eta_{+0}=-\frac{\left(10+m^2\right)}{48m^3\left(m^2-4\right)\left(m^2-16\right)\left(m^2-36\right)}\{6m^2\left(m^2-4\right)\left(m^2-16\right)\left(m^2-36\right)$$

$$\times[\left(18+m^2+R\right)\gamma_{13}+\left(18+m^2-R\right)\gamma_{23}]$$

$$-\left(10+m^2\right)[\left(-41472+14112m^2+64m^4+66m^6+5m^8+\left(-2304+1792m^2+12m^4+5m^6\right)R\right)\beta_1^2$$

$$+2\left(-41472+21888m^2-296m^4-146m^6+m^8\right)\beta_1\beta_2$$

$$+\left(-41472+14112m^2+64m^4+66m^6+5m^8+\left(2304-1792m^2-12m^4-5m^6\right)R\right)\beta_2^2]\},$$

$$\eta_{-0}=-\frac{\left(10+m^2\right)}{16m^3\left(m^2-4\right)\left(m^2-16\right)}\{6m^2\left(m^2-4\right)\left(m^2-16\right)\left[\left(2+m^2+R\right)\gamma_{13}+\left(2+m^2-R\right)\gamma_{23}\right]$$

$$-\left(10+m^2\right)[\left(128-40m^2-26m^4+5m^6+\left(64-32m^2+5m^4\right)R\right)\beta_1^2$$

$$-2\left(128-96m^2-30m^4+m^6\right)\beta_1\beta_2+\left(128-40m^2-26m^4+5m^6+\left(-64+32m^2-5m^4\right)R\right)\beta_2^2]\},$$

$$\eta_{+}=-\frac{1}{96}\sqrt{10+m^2}\left[\left(18+m^2+R\right)\alpha_1+\left(18+m^2-R\right)\alpha_2\right],$$

$$\eta_{+h}=\frac{\left(10+m^2\right)}{1536m^3\left(2+m\right)\left(-4+m\right)\left(m^2-36\right)}\{2m^2\left(2+m\right)\left(-4+m\right)\left(m^2-36\right)$$

$$\times[14mR^2\gamma_{12}+\left(-864+144m-48m^2+78m^3+7m^5+\left(-48+78m+7m^3\right)R\right)\gamma_{13}$$

$$+\left(-864+144m-48m^2+78m^3+7m^5-\left(-48+78m+7m^3\right)R\right)\gamma_{23}]$$

$$-\left(10+m^2\right)[(-82944+6912m+19584m^2+5184m^3+3872m^4-1808m^5$$

$$+164m^6-178m^7-14m^8+7m^9$$

$$+(-4608+8064m+5024m^2-1952m^3+164m^4-178m^5-14m^6+7m^7)R)\beta_1^2$$

$$+4(-41472+17280m+21024m^2-384m^3+2236m^4-670m^5-34m^6+13m^7)\beta_1\beta_2$$

$$+(-82944+6912m+19584m^2+5184m^3+3872m^4-1808m^5$$

$$+164m^6-178m^7-14m^8+7m^9$$

$$-(-4608+8064m+5024m^2-1952m^3+164m^4-178m^5-14m^6+7m^7)R)\beta_2^2]\},$$

$$\eta_-=-\frac{1}{32}\sqrt{10+m^2}\left[\left(2+m^2+R\right)\alpha_1+\left(2+m^2-R\right)\alpha_2\right],$$

$$\eta_{-h}=\frac{\left(10+m^2\right)}{1536m^3\left(m^2-4\right)\left(4+m\right)}\{3m^2\left(m^2-4\right)\left(4+m\right)[20mR^2\gamma_{12}$$

$$+\left(2(-96-48m-48m^2+26m^3+5m^5)+(-96+52m+10m^3)R\right)\gamma_{13}$$

$$+(2(-96-48m-48m^2+26m^3+5m^5)+(96-52m-10m^3)R)\gamma_{23}]\}$$

$$-\left(10+m^2\right)[(1536+1920m-1184m^3-608m^4+40m^5+70m^6+60m^7+15m^8$$

$$+(768-320m-464m^2+40m^3+70m^4+60m^5+15m^6)R)\beta_1^2$$

$$+4(768-1344m-912m^2+56m^3-166m^4+28m^5+13m^6)\beta_1\beta_2$$

$$+(1536+1920m-1184m^3-608m^4+40m^5+70m^6+60m^7+15m^8$$

$$-(768-320m-464m^2+40m^3+70m^4+60m^5+15m^6)R)\beta_2^2]\},$$

$$\eta_0=\frac{\sqrt{10+m^2}\left(\alpha_1+\alpha_2\right)}{2m},$$

$$\eta_{0h}=-\frac{\left(10+m^2\right)}{24m^4\left(m^2-4\right)\left(m^2-36\right)}\{6m^2\left(m^2-4\right)\left(m^2-36\right)$$

$$\times[(-6+m^3+m\left(6+R\right))\gamma_{13}+(-6+m^3-m\left(-6+R\right))\gamma_{23}]$$

$$-\left(10+m^2\right)[(-1440+864m+400m^2-240m^3-10m^4-58m^5+5m^7+m\left(144-76m^2+5m^4\right)R)\beta_1^2$$

$$+2\left(-1440+864m+400m^2-456m^3-10m^4-70m^5+m^7\right)\beta_1\beta_2$$

$$+(-1440+864m+400m^2-240m^3-10m^4-58m^5+5m^7-m\left(144-76m^2+5m^4\right)R)\beta_2^2]\},$$

$$\eta_h=-\frac{\sqrt{10+m^2}}{48m}\left[\left(-12+6m+m^3+mR\right)\alpha_1+\left(-12+6m+m^3-mR\right)\alpha_2\right],$$

$$\eta_{\mathrm{hh}} = \frac{\left(10+m^2\right)}{576m^4\left(m^2-4\right)\left(6+m\right)}\{3m^2\left(m^2-4\right)\left(6+m\right)$$

$$\times[4m^2R^2\gamma_{12} + \left(-12+6m+m^3+mR\right)^2\gamma_{13} + \left(12-6m-m^3+mR\right)^2\gamma_{23}]$$

$$-\left(10+m^2\right)[(-2112+1376m+816m^2-344m^3-312m^4-168m^5+48m^6+18m^7$$

$$+18m^8+3m^9+3m\left(96-32m-56m^2+16m^3+6m^4+6m^5+m^6\right)R)\beta_1^2$$

$$+4\left(-1056+688m-24m^2-460m^3+24m^4-66m^5+12m^6+3m^7\right)\beta_1\beta_2$$

$$+(-2112+1376m+816m^2-344m^3-312m^4-168m^5+48m^6+18m^7$$

$$+18m^8+3m^9-3m\left(96-32m-56m^2+16m^3+6m^4+6m^5+m^6\right)R)\beta_2^2]\}.$$

Соответствующий усредняющий оператор имеет вид

$$\hat{H}_1^{\#} = -\frac{\mathrm{i}\left(10+m^2\right)^{5/4}}{96\sqrt{2m}\left(m^2-R\right)}\{\frac{16\left(m^2-R\right)\left(\beta_1+\beta_2\right)}{3m^2}z_0^{*3}$$

$$+2\left[-9\left(2+m^2-R\right)\beta_1+\left(-18+9m^2+m^4-\left(9+m^2\right)R\right)\beta_2\right]\left(\frac{z_+^{*2}z_0^*}{m+6}+\frac{z_+^2z_0^*}{m-6}\right)$$

$$+2\sqrt{6}\sqrt{10+m^2}\sqrt{m^2-R}\left[-6\beta_1+\left(m^2-R\right)\beta_2\right]\left(\frac{z_+^*z_-z_0^*}{m+4}+\frac{z_+z_-^*z_0^*}{m-4}\right)$$

$$-2\sqrt{6}\sqrt{10+m^2}\sqrt{m^2-R}\left[6\beta_1+\left(m^2-R\right)\beta_2\right]\left(\frac{z_+^*z_-^*z_0^*}{m+2}+\frac{z_+z_-z_0^*}{m-2}\right)$$

$$+6\left[\left(-\left(18+m^2-R\right)\beta_1+\left(-18+m^2+m^4-\left(1+m^2\right)R\right)\beta_2\right)\right]\left(\frac{z_-^2z_0^*}{m+2}+\frac{z_-^{*2}z_0^*}{m-2}\right)$$

$$+\frac{48\left(m^2-R\right)\left(\beta_1+\beta_2\right)}{m^2}z_0^{*2}z_0$$

$$-\frac{4\left(9\left(2+m^2-R\right)\beta_1+\left(-18+9m^2+m^4-\left(9+m^2\right)R\right)\beta_2\right)}{m}z_+^*z_+z_0^*$$

$$-\frac{12\left(\left(18+m^2-R\right)\beta_1+\left(-18+m^2+m^4-\left(1+m^2\right)R\right)\beta_2\right)}{m}z_-^*z_-z_0^*$$

$$-\frac{8h}{m^2}\left[3\left(m\left(6-2m+m^2\right)+\left(2-m\right)R\right)\beta_1+\left(m\left(-18-6m+3m^2+m^4\right)+\left(6-3m-m^3\right)R\right)\beta_2\right]z_0^*\}$$

$$+\left\{\text{сопряженные операторы}\right\}.$$

Таким образом, с помощью квантового усреднения в режиме базового гиперболического резонанса 3:(-1) получена явная формула для усредненной ангармонической части гамильтониана через образующие нелиевской алгебры симметрий (5.5), которая порождается гармонической частью гамильтониана. Для дальнейшего упрощения, усредненный гамильтониан (5.7) можно записать в неприводимом представлении алгебры (5.5) обыкновенными дифференциальными операторами второго порядка. При этом гамильтониан (5.7) будет представлен в виде обыкновенного дифференциального оператора второго порядка. Эта техника продемонстрирована (на другом примере), например, в работе [21]. Интересно также исследовать симплектические листы пуассоновой алгебры, соответствующей алгебре (5.5), и картину линий уровня усредненного гамильтониана на них, см., например, аналогичное исследование в статье [22].

Литература

1. F. G. Major, V. Gheorghe, and G. Werth, Charged Particle Traps (Springer, 2002).
2. S. Stahl, F. Galve, J. Alonso, S. Djekic,W. Quint, T. Valenzuela, J. Verdu,M. Vogel, and G.Werth, A planar Penning trap // Eur. Phys. J. D 2005. Vol. 32. P. 139–146.
3. F. Galve, P. Fernandez, and G. Werth, Operation of a planar Penning trap // Eur. Phys. J. D. 2006. Vol. 40. P. 201–204.
4. F. Galve and G. Werth, Motional frequencies in a planar Penning trap // Hyperfine Interact. 2007. Vol. 174. P. 397–402.
5. K. Blaum and F. Herfurth (eds.), Trapped Charged Particles and Fundamental Interactions (Springer-Verlag, 2008).
6. J. Goldman and G. Gabrielse, Optimized planar Penning traps for quantum information studies // Hyperfine Interact. 2011. Vol. 199. P. 279–289.
7. M. V. Karasev, E. M. Novikova, and E. V. Vybornyi, Non-lie top tunneling and quantum bilocalization in planar Penning trap // Math. Notes. 2016. Vol. 100. No. 5-6. P. 807–819.
8. M. Karasev, E. Novikova, E. Vybornyi, Bi-states and 2-level systems in rectangular Penning traps // 2017. Russ. J. Math. Phys. Vol. 22. No. 4.
9. M. Karasev, E. Novikova, and E. Vybornyi, Instantons via Breaking Geometric Symmetry in Hyperbolic Traps // Math. Notes. 2017. Vol. 102. No. 6. P. 776–786.
10. D. Segal and M. Shapiro, Nanoscale Paul Trapping of a Single Electron, Nanoletters 6, No. 8, 1622–1626 (2006).
11. P. Bushev, S. Stahl, R. Natali, G. Marx, E. Stachowska, G. Werth, M. Hellwig, and F. Schmidt-Kaler, Electrons in a Cryogenic Planar Penning Trap and Experimental Challenges for Quantum Processing, Eur. Phys. J., D 50, 97–102 (2008).
12. Karasev M.V., Novikova E.M. Planar Penning Trap with Combined Resonance and Top Dynamics on Quadratic Algebra // Russian Journal of Mathematical Physics, 2015, 22, 463-468.
13. M. V. Karasev, Noncommutative algebras, nano-structures, and quantum dynamics generated by resonances, I // in Quantum Algebras and Poisson Geometry in Mathematical Physics, Ed. By M. Karasev, in Amer.Math. Soc. Transl. Ser. 2. Providence, RI, 2005, Vol. 216. P. 1–18.
14. O. Blagodyreva, M. Karasev, E. Novikova, Cubic Algebra and Averaged Hamiltonian for the Resonance 3:(-1) Penning-Ioffe Trap // Russ. J. Math. Phys. 2012. Vol. 19. No. 4. P. 441-450.
15. M. V. Karasev, E. M. Novikova, Algebras with polynomial commutation relations for a quantum particle in electric and magnetic fields // in Quantum Algebras and Poisson Geometry in Mathematical Physics, AMS Translations, Ser. 2, 216, ed. M. V. Karasev, AMS, Providence, RI, 2005, 19–135.
16. M. V. Karasev, Noncommutative algebras, nano-structures, and quantum dynamics generated by resonances. II // Adv. Stud. Contemp.Math. 2005. Vol. 11. P. 33–56.
17. M. Karasev, Noncommutative algebras, nano-structures, and quantum dynamics generated by resonances. I, III // Russ. J. Math. Phys. 2006. Vol. 13. No. 2, 131–150.
18. M. Karasev and E. Novikova, Non-Lie permutation representations, coherent states, and quantum embedding // in Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. Providence, RI. 2005. Vol. 187. P. 1–202.
19. M. Karasev and E. Novikova, Algebra and quantum geometry of multifrequency resonance // Izv. Ross.Akad. Nauk Ser.Mat. 2010. Vol. 74. No. 6. P. 1155–1204.
20. M. V. Karasev and E. M. Novikova, Secondary resonances in Penning traps. Non-Lie symmetry algebras and quantum states // Russ. J.Math. Phys. 2013. Vol. 20. No. 3. P. 283–294.
21. М.В. Карасев, Е.М. Новикова, Собственные состояния квантовой наноловушки Пеннинга-Йоффе в резонансном режиме // ТМФ. 2014. Т. 179. No. 3. С. 406-425.
22. М.В. Карасев, Е.М. Новикова, Устойчивые двумерные торы в ловушке Пеннинга при комбинированном частотном резонансе // НМФМ. 2015. Т. 13. No. 2. С. 55–92.

RESONANCE PLANAR PENNING TRAP WITH RECTANGULAR ELECTRODES

E.M. Novikova

*National Research University "Higher School of Economics"
Moscow Institute of Electronics and Mathematics*

e.m.novikova@hse.ru

Received 29.11.2016

The scale of physical parameters determining the Penning planar trap with rectangular annular electrode is analyzed and a unified relation between these parameters is obtained. This relation leads to the resonance oscillator in the leading part of the Hamiltonian for the electron in the trap. In the regime of basic hyperbolic resonance, an explicit formula is obtained for the averaged anharmonic part of the Hamiltonian in terms of generators of the non-Lie algebra of symmetries which is generated by the anharmonic part of the Hamiltonian.