

# ИНВАРИАНТЫ ХОПФА В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ И В СУПЕРСКРУЧЕННОЙ ДНК

М.И. Монастырский<sup>1</sup>, П.В. Сасоров<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Институт теоретической и экспериментальной физики  
им. А.И. Алиханова, Москва*

<sup>2</sup>*Институт прикладной математики им. М.В. Келдыша, Москва*

michael.monastyrsky@gmail.com, pavel.sasorov@gmail.com

Поступила 12.11.2014

Рассматривается структура топологических инвариантов в двух средах. Первый пример связан с проблемой перезамыкания в магнитной гидродинамике, а второй относится к теории суперскрученности ДНК. Несмотря на то, что эти системы сильно различаются, поведение магнитных трубок и процесс суперскручивания ДНК имеют некоторые общие черты, основанные на существовании топологических инвариантов типа инвариантов Хопфа.

УДК 51.76, 51.72, 533.9.01

## 1 Введение

Коэффициент зацепления Гаусса (1833), определяющий необходимое условие расцепления двух замкнутых кривых, был первым примером топологического инварианта ансамбля зацепленных кривых. Несмотря на простоту формулы Гаусса, в ней скрыто глубокое топологическое содержание. Это стало ясным только в XX веке. Параллельно и, в основном независимо от работ математиков, похожие конструкции (chirality, спиральность) были введены исследователями обычной и магнитной гидродинамики.

Однако, только во второй половине XX столетия стало ясным, какую пользу могут принести аналогии между топологией и соответствующими областями физики и даже молекулярной биологии.

В этой статье будут изучены топологические инварианты в двух различных средах. Исследованы тонкие трубки, составленные из магнитных силовых линий, в процессе магнитного перезамыкания и суперскрученные ДНК. Доказано существование топологических инвариантов типа Хопфа и приведены точные формулы в обоих случаях.

## 2 Магнитная гидродинамика

### 2.1 Введение

При движении плазмы с бесконечной проводимостью, т.е. когда электрическое поле  $\vec{E}$ , магнитное поле  $\vec{H}$  и макроскопическая скорость движения плазмы  $\vec{v}$  связаны соотношением:  $\vec{E} + (\vec{v} \times \vec{H})/c = 0$ , выполняется теорема вмороженности [1, 2]<sup>1</sup>. Из нее, в частности, следует, что топология конфигурации силовых линий сохраняется, т.е. возможна лишь гладкая деформация силовых линий, не меняющая, в частности, коэффициентов зацепления. При этом, конечно, предполагается, что векторные поля  $\vec{E}$ ,  $\vec{H}$  и  $\vec{v}$  достаточно гладкие.

При учете конечной проводимости в рамках (изотропной) магнитной гидродинамики (МГД) уравнение для  $\vec{H}$  принимает вид

$$\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \nabla \times (\vec{v} \times \vec{H}) - \nabla \times \nu (\nabla \times \vec{H}). \quad (1)$$

Здесь  $\nu > 0$  – так называемая, магнитная вязкость. Вообще говоря, уравнение (1) показывает, что в этом случае не существует никаких инвариантов, характеризующих структуру совокупности силовых линий. Действительно, при  $\vec{v} = 0$ , например, магнитное поле диссипирует при  $t \rightarrow \infty$ . При этом на достаточно больших временах остается лишь одна наиболее медленно затухающая мода,  $\vec{H}(\vec{x})$ , топологическая структура силовых линий которой не зависит от топологии силовых линий при  $t = 0$ .

Поэтому на первый взгляд тема данной статьи кажется тривиальной: при  $\nu = 0$  сохраняется любой топологический инвариант, а при  $\nu > 0$  топологических инвариантов нет. Вопрос становится, однако, менее тривиальным, если мы будем интересоваться скоростью разрушения инвариантов при очень маленьких вязкостях:  $\nu > 0$ .

Рассмотрим конфигурацию плазмы и магнитного поля с характерным размером  $L$ , эволюция которой описывается уравнением (1) и подразумеваемыми другими уравнениями МГД, определяющими, в частности,  $\vec{v}(\vec{x}, t)$  [1, 2]. В такой ситуации имеется два характерных масштаба времени: диффузионное время  $\tau_d = L^2/\nu$  и гидродинамическое время  $\tau_H = L/c_A$ , где  $c_A = \sqrt{H^2/4\pi\rho}$  – альфвеновская скорость,  $\rho$  – плотность плазмы. При малых  $\nu$  магнитное число Рейнольдса  $Re_m = \tau_d/\tau_H \gg 1$  велико. В этом случае изменение топологической магнитного поля может происходить на временах  $\tau$  много меньших, чем  $\tau_d$ . Действительно, не исключено, что характер МГД движений таков, что возникает самопроизвольное резкое уменьшение масшта-

<sup>1</sup>Следует напомнить, что здесь  $\nabla \cdot \vec{H} \equiv 0$ , как и для любого магнитного поля.

бов изменения  $\vec{v}$  и  $\vec{H}$  на временах  $\sim \tau_H$ . Примеры подобного рода встречаются в различных задачах: турбулентности [3], при формировании ударных волн [3] и токовых слоев [4, 5]. Поэтому роль второго члена в (1) становится существенным на временах  $\tau$  существенно меньших, чем  $\tau_d$ , вплоть до  $\tau_H$ . При этом топологическая структура силовых линий не разрушается полностью, как это имело бы место при  $\tau \sim \tau_d$ . В этом связи вопрос о существовании топологических инвариантов магнитного поля, сохраняющихся на интервалах  $\tau \ll \tau_d$ , представляется совершенно корректным и весьма важным.

Первым, кто подошел к этому вопросу с близкими формулировками, был Тейлор [6]. Его результат можно сформулировать следующим образом: если в системе присутствует мелкомасштабная МГД турбулентность, приводящая к тому, что  $\langle \vec{j}^2 \rangle \gg \langle \vec{j} \rangle^2$  (здесь  $\langle \dots \rangle$  – пространственное усреднение), то, если и возможны быстрые топологические изменения конфигурации магнитного поля, тем не менее, при этом сохраняется следующий инвариант:

$$h = \int_{\Omega} \vec{A} \cdot \vec{H} dV \quad (2)$$

Здесь  $\vec{A}$  – вектор-потенциал поля  $\vec{H}$  ( $\vec{H} = \nabla \times \vec{A}$ ), а  $\Omega$  – полный объем системы, на границе которой  $\vec{H}_n|_{\partial\Omega} = 0$ . Этот инвариант допускает интерпретацию в терминах зацепления силовых линий [7, 8]. Следуя Арнольду, будем называть этот топологический инвариант асимптотическим инвариантом Хопфа. Для односвязных областей, которые только и будут рассматриваться в этой работе, формула (2) калибровочно-инвариантна. Для неодносвязных областей это не так, что требует небольших технических усложнений (в том числе, ограничений на вид  $\vec{A}(\vec{x})$ ). Все результаты с небольшими переформулировками сохраняются в общем случае.

Результату Тейлора можно придать эквивалентную форму. Быстрая перестройка топологии силовых линий при  $\tau \ll \tau_d$  может изменить зацепление отдельных силовых линий вследствие мелкомасштабной турбулентности, но сохраняет полное зацепление. Кадомцев [9] сформулировал этот результат для конфигураций магнитных полей, изменяющихся при крупномасштабных перезамыканиях силовых линий.

В нашей работе [10] дано формальное определение перезамыкания в терминах разрезов и склеек. Оно позволяет придать точный смысл основному утверждению о сохранении единственного топологического инварианта – асимптотического инварианта Хопфа в задаче о быстром перезамыкании в односвязных областях. В многосвязных областях (токамаках) сохраняются дополнительно и полные магнитные потоки. Упомянутое определение конкретизирует соображения Кадомцева, устраняя неопределенность в ведении понятия перезамыкания.

В нашей публикации [11] последние результаты получили дальнейшее развитие. Для магнитного поля  $\vec{H}$ , аппроксимируемого системой магнитных силовых трубок с внутренним скручиванием, была явно определена система топологических инвариантов, которые сохраняются на крупномасштабных гладких течениях  $\vec{v}(\vec{x}, t)$ . Это определение обобщает понятие топологических инвариантов высоких порядков [14]. Вводя затем процесс перезамыкания, было показано как меняется внутреннее зацепление каждой силовой трубки и взаимное зацепление различных трубок. Это позво-

ляет по новому взглянуть на сохранение единственного топологического инварианта при перезамыкании – асимптотического инварианта Хопфа.

Эти результаты использовались недавно при исследовании структуры магнитного поля в солнечной короне [12].

## 2.2 Определения

В этом разделе мы дадим точные определения понятий, рассмотренных в предыдущем разделе.

Рассмотрим сначала коэффициент зацепления, определенный для зацепления  $l$ , состоящего из конечного числа ориентированных замкнутых линий  $l_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), вложенных в сферу  $S^3$  [13]. Коэффициент зацепления первого порядка  $k_1(l_1, l_2)$  – хорошо определен для каждой пары непересекающихся кривых. Этот коэффициент зацепления  $k_1(l_1, l_2)$  равен алгебраической сумме чисел пересечения кривой  $l_1$  с поверхностью  $Z$ , натянутой на замкнутую кривую  $l_2$ , с учетом ее ориентации, порожденной ориентацией  $l_2$ .

Коэффициент зацепления порядка  $p$  определяется для  $p + 1$  замкнутых кривых. Это определение использует так называемые коэффициенты Милнора [14]. Более удобное определение, на языке дифференциальных форм, приведено в книге [13], будет использовано ниже. Определим коэффициент  $k_p$  в простейшем нетривиальном случае  $p = 2$ , когда  $k_1(l_i, l_j) = 0$  (где  $i, j = 1, 2, 3$ ). Обобщение на произвольные  $p > 2$  (при условии, что  $k_i = 0$  при всех  $i < p$ ) и сравнение с другими инвариантами  $l = \{l_i\}$  вместе с доказательствами также приведены в книге [13].

Пусть  $B_i \subset S^3$  – граница некоторой трубчатой окрестности замкнутой линии  $l_i$ . Пусть  $B_i$  не пересекает никакую  $l_j$ . Тогда<sup>2</sup>

$$\int_{B_1} u_1 \wedge u_2 = - \int_{B_2} u_2 \wedge u_1 = k_1(l_1, l_2), \quad (3)$$

где  $u_i$  – это 1-формы дуальные (по Александру) к  $l_i$ . Уравнения аналогичные уравнению (3) могут быть определены непосредственно на всем пространстве  $S^3$  с помощью замкнутых 2-форм  $v_i$ , заданных на  $S^3 \setminus l_i$ , так что  $\int_{Z_i} v_i = \text{Ind}(Z_i, l_i)$ , где  $Z_i$  является двумерным циклом в  $S^3 \setminus l_i$ , а  $\text{Ind}(Z, l)$  является индексом пересечения  $l$  с  $Z$ . 3-формы  $u_1 \wedge u_2$  и  $v_1 \wedge v_2$  определены теперь на всем  $S^3$ , и

$$\int_{S^3} u_1 \wedge v_2 = - \int_{S^3} v_1 \wedge u_2 = k_1(l_1, l_2). \quad (4)$$

Мы будем называть коэффициентом зацепления первого порядка для зацепления  $l = (l_1, \dots, l_n)$  следующую величину:

$$\bar{k}_1(l) = \max_{1 \leq i < j \leq n} |k_1(l_i, l_j)|. \quad (5)$$

Можно показать, что если  $k_1(l_1, l_2) = 0$ , то справедливо следующее условие. Существуют такая 1-форма  $u_{12}$  на  $S^3 \setminus (l_1 \cup l_2)$  и такие 2-формы  $v_{12}$  и  $v'_{12}$  на  $S^3$ , что  $du_{12} = u_1 \wedge u_2$ ,  $dv_{12} = -v_1 \wedge u_2$  и  $dv'_{12} = u_1 \wedge v_2$ . Допустим, что  $\bar{k}_1(l) = 0$  для  $l = (l_1, l_2, l_3)$ . Тогда следующие дифференциальные формы

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{123} &= u_{12} \wedge u_3 + u_1 \wedge u_{23}, \\ \tilde{v}_{123} &= -v_{12} \wedge u_3 + v_1 \wedge u_{23}, \\ \tilde{v}'_{123} &= u_{12} \wedge v_3 + u_1 \wedge v_{23}\end{aligned}$$

являются замкнутыми, и  $\tilde{v}_{123}$  и  $\tilde{v}'_{123}$  могут быть определены на всем  $S^3$ . Здесь  $u_{ij}$  и  $v_{ij}$  определены аналогично  $u_{12}$  и  $v_{12}$ . Как показано в [13], все следующие интегралы:

$$\int_{B_1} \tilde{u}_{123} = - \int_{B_3} \tilde{u}_{123} = \int_{S^3} \tilde{v}_{123} = \int_{S^3} \tilde{v}'_{123}$$

– целые числа. Это целое число называется коэффициентом зацепления второго порядка:  $k_2(l_1, l_2, l_3)$ .

Рассмотрим теперь определенный класс магнитных полей, обозначаемый ниже как  $D$ , и удовлетворяющий следующим условиям.

1. Магнитное поле отлично от нуля только внутри конечного числа магнитных замкнутых силовых трубок  $T_i = D^2 \times S^1$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ).

2. Каждая трубка  $T_i$  несет магнитный поток  $\Phi_i$ . Различные поля из класса  $D$  могут отличаться друг от друга значениями  $\{\Phi_i\}$ ,  $N$ , а также структурой поля внутри каждой  $T_i$ .

Рассмотрим поперечное сечение трубки  $T_i$ . Будем считать, что поле  $\vec{H}$  устроено так, что поток вдоль силовых линий магнитного поля порождает диффеоморфизм этих поперечных сечений. Предположим также, что на каждом сечении можно ввести полярную систему координат, так, что этот диффеоморфизм преобразует координатные линии в координатные же линии. Т.е. силовые линии магнитного поля в  $T_i$  расположены на двумерных магнитных поверхностях, образующих систему вложенных друг в друга торов, причем коэффициент вращения не зависит от магнитной поверхности, принадлежащей  $T_i$ . Таким образом класс  $D$  определен однозначно.

Мы предполагаем, что любое магнитное поле хорошо аппроксимируется полями из класса  $D$ .

Рассмотрим теперь замкнутую силовую линию  $l_i(T_i)$  в каждой трубке  $T_i$ , соответствующую полюсу полярной системы координат, упомянутой выше. Она может быть и заузленной. Рассмотрим некоторую силовую линию  $\gamma \subset T_i \setminus l_i(T_i)$  и поверхность  $Z(T_i)$  натянутую на  $l_i(T_i)$ . Тогда число вращения  $\varphi_i$  определяется как среднее число пересечений (с учетом ориентации) кривой  $\gamma$  с  $Z(T_i)$  за один полный обход вдоль  $l_i(T_i)$ .

Определим теперь число зацеплений для трубок:

$$\hat{k}_1(T_i, T_j) = \begin{cases} \varphi_i & \text{for } i = j \\ k_1(l(T_i), l(T_j)) & \text{for } i \neq j \end{cases}, \quad (6)$$

и

$$\hat{k}_p(T_{i_0}, \dots, T_{i_p}) = k_p(l(T_{i_0}), \dots, l(T_{i_p})) \quad (7)$$

для  $p \geq 2$ . Последнее определение предполагает, что все коэффициенты зацепления порядка  $p - 1$  равны 0.

Введем также

<sup>2</sup>Мы опускаем некоторые топологические детали связанные с определением форм на многообразиях типа  $S^3 \setminus l_j$  [13].

$$h_{p,\sigma} \left\{ \vec{H} \right\} = \sum_{i_0, \dots, i_p} \left[ \prod_{m=0}^p \Phi_{i_m} \right] \hat{k}_p (T_{i_0}, \dots, T_{i_p}) \left[ \text{sgn} \hat{k}_p (T_{i_0}, \dots, T_{i_p}) \right]^\sigma, \quad (8)$$

где индекс “четности”  $\sigma \in (0, 1)$ .

Эти величины, определенные для класса  $D$ , не зависят ни от способа разбиения магнитного  $\vec{H}$  поля на трубки, ни от их упорядочивания. Различные способы разбиения возможны, если некоторые числа вращений  $\varphi_i$  рациональны.

Теорема вмороженности [1, 2] имеет своим следствием (при  $\nu \equiv 0$ ) сохранение топологической структуры магнитных силовых линий, а так же магнитного потока  $\Phi_i$  в каждой магнитной силовой трубке  $T_i$ . Это ведет к сохранению всех  $h_{p,\sigma} \left\{ \vec{H} \right\}$ , если временная эволюция поля идет в соответствии с уравнением (1), когда  $\nu \equiv 0$ , а поле  $\vec{v}$  – достаточно гладкое.

Используя [8], нетрудно понять, что

$$h_{1,0} \left\{ \vec{H} \right\} = h. \quad (9)$$

Сохранение  $h$  при  $\nu = 0$  хорошо известно. Другие введенные здесь законы сохранения являются новыми.

Введем теперь понятие перезамыкания на подклассе  $D_1 \subset D$ . Этот класс  $D_1$  определяется условием:

$$\Phi_i = \Phi_j \quad \text{для всех } i \text{ и } j.$$

Ниже под термином перезамыкание в ограниченном смысле подразумеваются преобразование поля  $\vec{H}$ , вида  $D_1 \rightarrow D_1$ . Оно обозначает такое разрезание и склеивание соседних трубок (см. рис. 1), что никакие другие трубки не проносятся через образовавшийся в процессе перезамыкания временной разрыв между трубками. Операция разрезания-склеивания должна дополнительно удовлетворять следующим условиям:

1. Отображение, возникающее при склеивании обрезанных концов является гладким.
2. Если два конца различных силовых линий склеиваются, то должны склеиваться и оставшиеся концы этой пары силовых линий.
3. Не нарушается условие  $\nabla \cdot \vec{H} = 0$ .
4. Магнитные поверхности склеиваются с магнитными поверхностями. Это означает что процесс перезамыкания согласован с определением класса  $D_1$ .

Далее под процессом перезамыкания в широком смысле будем подразумевать комбинацию перезамыкания в узком смысле вместе с сдвигом по траекториям решений уравнения (1) с гладким полем скорости  $\vec{v}$  и  $\nu = 0$ . Более детальный анализ анализ концепции перезамыкания в рамках МГД проведен в нашей работе [10], где мы рассмотрели феноменологический базис такого определения. Важно отметить, что определение перезамыкания (для более широкого класса полей), представленное в [10], накладывает более жесткие ограничения, чем условия 1-4. Однако настоящие, менее ограничительные условия достаточны, для наших целей.

Отметим, что, приведенное выше, преобразование перезамыкания, обратимо т.е. обратное преобразование также является перезамыканием.

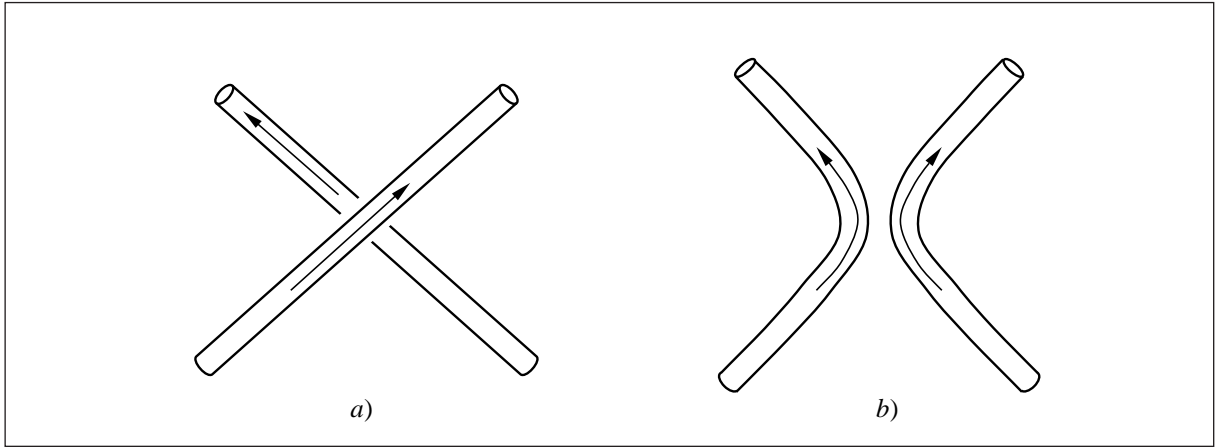


Рис. 1. Эскиз перезамыкания двух магнитных трубок. Состояние перед перезамыканием показано на рисунке *a*), а после – на *b*)

## 2.3 Утверждения

Топологическая структура множества магнитных силовых линий меняется в процессе перезамыкания. Легко видно, что если две магнитные трубки  $T_1$  и  $T_2$  перезамыкаются в результирующую магнитную трубку  $T'$ :  $(T_1, T_2) \longrightarrow T'$ , тогда

$$\hat{k}_1(T', T') = \hat{k}_1(T_1, T_1) + \hat{k}_1(T_2, T_2) + 2\hat{k}_1(T_1, T_2), \quad (10)$$

$$\hat{k}_1(T_3, T') = \hat{k}_1(T_3, T_1) + \hat{k}_1(T_3, T_2). \quad (11)$$

Насколько нам известно, эти формулы были впервые введены в работе [11].

Коэффициент 2 в уравнении (10) может быть объяснен качественно следующим образом. Любая силовая линия  $\gamma'$ , принадлежащая  $T'$ , состоит из двух частей  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . Ее часть  $\gamma_1$ , принадлежала первоначально (перед перезамыканием)  $T_1$ , а часть  $\gamma_2$  –  $T_2$ . Линию  $l(T')$  можно также рассматривать как композицию  $l(T_1)$  и  $l(T_2)$ . Следовательно поверхность  $Z(T')$  натянутая на  $l(T')$  может быть получена как композиция двух поверхностей  $Z(T_1)$  и  $Z(T_2)$ , натянутых соответственно на  $l(T_1)$  и  $l(T_2)$ . Среднее число пересечений кривой  $\gamma_1$  с  $Z(T')$  равно  $\hat{k}_1(T_1, T_1) + \hat{k}_1(T_1, T_2)$ . Первое слагаемое в этой сумме происходит от пересечений с  $Z(T_1)$ , в то время как второе – от пересечений с  $Z(T_2)$ . Аналогично, число пересечений кривой  $\gamma_2$  с  $Z(T')$  равно  $\hat{k}_1(T_2, T_2) + \hat{k}_1(T_1, T_2)$ . В результате мы получаем равенство (10).

Сохранение  $h$  [см. (9)] в процессе перезамыкания является следствием уравнений (10) и (11) и определения (7). Таким образом, топологическая структура магнитного поля в процессе перезамыкания не разрушается полностью.

Покажем теперь, что в общем случае нет других, дополнительных к  $h$  интегралов движения, сохраняющихся в процессе перезамыкания.

В виде примера рассмотрим специальный случай  $h = 0$ . Путем конечного числа перезамыканий мы можем перевести множество магнитных трубок  $\{T_i\}$  с потоком  $\Phi_0$  в каждой трубке в единственную незаузленную трубку  $T$  с тем же самым  $\Phi_0$ . Поскольку  $h$  сохраняется, то  $T$  имеет нулевое число вращения:  $\varphi = 0$ , т.е. все силовые линии незацеплены. Отсюда следует, что все магнитные поля из класса  $D_1$  с данным  $\Phi_0$  могут преобразованы друг в друга путем перезамыканий. Это рассуждение легко переносится на общий случай  $h \neq 0$ . Это означает, что не существует инвариантов, определенных только через  $\vec{H}$ , отличных от  $h$ , и сохраняющихся при перезамыканиях.



### 3 Суперскручивание в ДНК

Топологические методы были успешно применены при описании суперскрученной ДНК. ДНК описывается формулой Калугареану (CF) [15, 16]<sup>3</sup>:

$$Lk = Tw + Wr,$$

где  $Lk$  коэффициент зацепления Гаусса,  $Tw$  – кручение, и  $Wr$  – так называемое число райзинга (writhing). Для удобства читателей мы напомним определения этих величин. Детали можно найти в книге [13] и цитируемой в ней литературе.

Пусть  $\gamma$  замкнутая гладкая кривая вложенная в  $R^3$  и  $v$  нормальный вектор к  $\gamma$ . Выберем вектор  $v(t)$  достаточно короткий, такой, что  $v(t)$  пересекается с  $\gamma$  только в одной точке. Конец вектора  $v$  описывает кривую  $\gamma_v$ , которая наследует ориентацию  $\gamma$ . Вектор  $v$  заматывает полосу вложенную в  $R^3$ .  $Lk$  есть коэффициент зацепления Гаусса кривых  $\gamma$  и  $\gamma_v$ . Кручение  $v$  определяется как:

$$Tw = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} v^{\perp} \cdot dv,$$

где  $v^{\perp}$  нормальный вектор к  $\gamma$ . Кручение есть непрерывная величина, также как и другое число – райзинг  $Wr$ .  $Wr$  зависит только от  $\gamma$ . Рассмотрим отображение Гаусса для  $\gamma \times \gamma$ , т.е.

$$\phi : \gamma \times \gamma \rightarrow S^2, \quad \phi(x, y) = \frac{y - x}{|y - x|},$$

где пары точек  $(x, y) \in \gamma$ . Пусть  $dS$  – элемент площади на  $S^2$ . Тогда  $\phi_*(dS)$  индуцируется  $\phi$ .

Райзинг  $Wr$  – есть по определению интеграл

$$Wr = \frac{1}{4\pi} \int_{\gamma \times \gamma} \phi_*(dS).$$

Обычно, формулу (CF) применяют для непрерывных лент, но в реальных процессах, удаление скрученных фрагментов ДНК происходит путем разрезания и склейки. Следуя работе [18], будем называть эту дискретную ленту лестницей. В этом случае формула (CF) должна быть модифицирована как:

$$(Lk - q) = \widetilde{Tw} + \widetilde{Wr}.$$

Здесь  $q$  – число разрезаний-сшивков, а  $\widetilde{Tw}$  и  $\widetilde{Wr}$  модифицированные параметры в формуле (CF). Так как мы имеем дело с набором разрезаний и сшивков окончательная формула, после усреднения по всем состояниям имеет вид

$$\langle Lk - q \rangle = \langle \widetilde{Tw} \rangle + \langle \widetilde{Wr} \rangle.$$

<sup>3</sup>В статье [17] приведена интересная история открытия формулы CF, ее дальнейшая судьба и связь с понятием спиральности (helicity).



Это объясняет применимость топологических методов при исследовании суперскрученных ДНК с учетом энзиматической активности топоизомераз. Следуя замечанию в [18] покажем, что гидродинамическое описание свободно вращающейся ДНК напоминает гидродинамику одноосного нематического кристалла [19].

Параметр одноосного нематика записывается в виде:

$$A_{ik} = A_0 \left( n_i n_k - \frac{1}{3} \delta_{ik} \right),$$

где  $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$  единичный вектор, и  $\delta_{ik}$  дельта-функция Кронекера. Параметр порядка инвариантен относительно отражений  $\vec{n} \rightarrow -\vec{n}$ .

Топологические характеристики ДНК связаны с уравнениями гидродинамики по формуле

$$\frac{\partial \vec{n}}{\partial t} = \{H, \vec{n}\},$$

где  $H$  – гамильтониан выражаемый через плотность энергии:  $H = \int E dr^3$ .  $E$  зависит от состояния системы, и  $\{H, \vec{n}\}$  обозначает скобку Пуассона. С другой стороны, директор  $\vec{n}$  при выборе подходящих граничных условий связан с коэффициентом зацепления Гаусса  $Lk$ :

$$Lk(\gamma, \gamma_v) = \int (\vec{n}, \nabla, \vec{n}) dV.$$

Здесь  $dV$  элемент объема шара, охватывающего ленту  $(\gamma, \gamma_v)$ .

## 4 Заключение

Сформулируем основные результаты статьи.

1. Определены топологические инварианты в терминах магнитных силовых трубок и доказано сохранение только асимптотического инварианта Хопфа при перезамыкании силовых линий.
2. Формула Калугареану перенесена на лестничные ДНК. Показано, что кинетика ДНК описывается уравнениями аналогичными уравнениям гидродинамики нематических кристаллов. Это позволяет развить теорию, описывающую динамику скрученной ДНК параллельно нематодинамике и сравнить ее с экспериментом (см.[18]).

Сформулируем несколько нерешенных задач, связанных нашей темой.

1. Формула Калугареану была получена в предположении, что лента незаузлена. Какова ее модификация, если лента образует нетривиальный узел?
2. Каков аналог формулы Калугареану когда  $(\gamma, \gamma_v)$  имеют тривиальный коэффициент Гаусса, но не нулевые высшие коэффициенты зацепления?

Аналогичные вопросы интересны и для ансамбля зацепленных кривых. В этом случае лента заменяется на поверхность Зейферта. Соответствующий результат был бы интересен в приложении к цепочке взаимодействующих ДНК. Правда, пока нет экспериментальных подтверждений существования таких структур.

## 5 Благодарности

Работа была подготовлена к печати во время визита одного из авторов (М.М.) в Швейцарию. Он благодарит Федеральную Политехническую Школу (Лозанна, Швейцария) за приглашение и прекрасные условия для работы.

Работа поддержана грантом РФФИ 13-01-00314 и грантом Правительства РФ 11.G34.31.0054.

## Список литературы

- [1] *Морфат Г.* Возбуждение магнитного поля в проводящей среде // Наука, М., 1980.
- [2] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред // Наука, М., 1982.
- [3] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Гидродинамика // Наука, М., 1986.
- [4] *Syrovatkii S.I.* Pinch Sheets and Reconnection in Astrophysics // Ann. Rev. Astron. Astroph., 1981, **19**, 163.
- [5] *Isichenko M.B. and Gruzinov A.V.* Iso-topological relaxation, coherent structures, and Gaussian turbulence in two dimensional magnetohydrodynamics // Phys. Plasmas, 1994, **1**, 1802.
- [6] *Taylor J.B.* Relaxation of Toroidal Plasma and Generation of Reverse Magnetic Fields // Phys. Rev. Lett., 1974, **33**, 1139.
- [7] *Woltjer L.*, A theorem on force-free magnetic fields // Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1958, **44**, 489.
- [8] *Arnold V.I. and Khesin B.A.*, Topological Methods in Hydrodynamics // Springer-Verlag, NY, 1998.
- [9] *Кадомцев Б. Б.*, Перезымыкание силовых линий в магнитной гидродинамике // в сб. Нелинейные волны, Наука, М., 1979, 229.
- [10] *Монастырский М.И., Сасоров П.В.*, Топологические инварианты в магнитной гидродинамике // ЖЭТФ, 1987, **93**, 1210.
- [11] *Monastyrsky M.I. and Sasorov P.V.*, Conservation of topological invariants in MHD // Preprint ИТЕР 88-63, Atominform, М., 1988.
- [12] *Berger M.A.*, Braids and Magnetic Fields // in book: Berrick A J (et al. eds), Braids, World Scientific, Singapore, 2010, p. 305-328.
- [13] *Монастырский М.И.*, Топология калибровочных полей и конденсированных сред // Паимс, М., 1995; *Monastyrsky M.I.*, Topology of Gauge Fields and Condensed Matter // Plenum, NY, 1993.
- [14] *Monastyrsky M.I. and Retakh V.S.*, Topology of linked defects in condensed matter // Comm. Math. Phys., 1986, **103** 445.

- [15] *Călugăreanu G.*, Sur les classes d'isotopie des noeuds tridimensionnels et leurs invariants // *Czechoslovak Math. J.*, 1961 **11**(86), 588.
- [16] *Călugăreanu G.*, L'intégrale de Gauss et l'analyse des noeuds tridimensionnels, // *Rev. Math. Pures Appl.*, 1959, **4**, 5.
- [17] *Moffatt H.K. and Ricca R.L.* Helicity and the Călugăreanu invariant // *Proc. R. Soc. Lond. A*, 1992, **439**(1906), 411.
- [18] *Gabibov A., Yakubovskaya E., Lukin M., Favorov P., Reshetnyak A. and Monastyrsky M.*, Dynamics of DNA Supercoiling // In book: *Monastyrsky M. (ed), Topology in Molecular Biology*, Springer, NY, 2007 p. 43.
- [19] *Kats E.I. and Lebedev V.V.*, Fluctuational effects in the dynamics of liquid crystals // Springer. NY, 1993.

## TOPOLOGICAL INVARIANTS IN MAGNETOHYDRODYNAMICS AND DNA SUPERCOILING

M. Monastyrsky<sup>1</sup>, P. Sasorov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*Institute for Theoretical and Experimental Physics, Moscow*

<sup>2</sup>*Keldysh Institute of Applied Mathematics, Moscow*

michael.monastyrsky@gmail.com, pavel.sasorov@gmail.com

Received 12.11.2014

We discuss the structure of topological invariants in two different media. The first example relates to the problem of reconnection in magnetohydrodynamics and the second one to the supercoiling of DNA. Despite apparently different systems, the behavior of magnetic spread lines and supercoiling process in DNA has some common based on the existence of Hopf's type topological invariants.