АСИМПТОТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ДИНАМИКИ КВАНТОВЫХ КОГЕРЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ В ОГРАНИЧЕННЫХ ОБЛАСТЯХ НА РАЗЛИЧНЫХ МАСШТАБАХ ВРЕМЕНИ

А.С. Трушечкин

Математический институт им. В.А. Стеклова РАН

trushechkin@mi.ras.ru

Поступила 17.09.2012

Построены квантовые когерентные состояния для частицы в ящике (бесконечно глубокой потенциальной яме с твердыми стенками). Изучается своеобразный квазиклассический предел динамики квантовых когерентных состояний на окружности и в ящике, когда постоянная Планка стремится к нулю, а время – к бесконечности. Доказаны теоремы, описывающие динамику когерентных состояний на всех масштабах времени в квазиклассическом приближении. Они позволяют подробно проследить все этапы квантовой эволюции в квазиклассическом пределе. В частности, получено строгое обоснование факта, что бóльшую часть времени пространственное распределение волнового пакета близко к равномерному. Ранее этот факт был известен лишь из численных экспериментов.

УДК 517.958:530.145

1 Введение

Работа посвящена анализу динамики квантовых когерентных состояний для частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме, более общо — квантовой теории в ограниченных областях. Квантовая динамика в бесконечно глубокой потенциальной яме и в других ограниченных областях изучается уже несколько десятков лет [1–6], не теряет своей актуальности и сейчас [7–12]. Получены важные результаты, такие как обобщение теоремы Пуанкаре о возвращении на случай квантовых ограниченных систем, подробно описана структура такого явления, как возрождение квантовых волновых пакетов для квантовых систем с дискретным спектром [2, 3] и, в частности, для бесконечно глубокой потенциальной ямы [4]. С помощью численного моделирования более подробно исследованы некоторые свойства динамики, касающиеся расплываний и возрождений квантовых волновых пакетов в ограниченных областях [5, 6].

Понимание квантовой динамики в ограниченных областях имеет важное значение для физики конденсированного состояния, физики наносистем. В работе [13] указано, что квантовые когерентные состояния могут быть использованы для описания некоторых ключевых процессов в биологических системах (передача возбуждения при фотосинтезе, передача сигналов по нейронам). Однако частицы в нано- и биосистемах, как правило, движутся в ограниченных областях. Квантовая механика, напротив, разработана в основном для случая неограниченных областей (всего пространства $\mathbb{R}^3$). В связи с этим важная задача заключается в развитии теории квантовых когерентных состояний в ограниченных областях и их эволюции во времени.

Квантовая динамика в ограниченных областях для конденсированных сред рассматривается в работах [7, 8]. Динамика волновых пакетов в графеновых квантовых точках рассматривается в статье [9]. Динамике когерентных состояний для массивных релятивистских частиц посвящены статьи [10–12].

В настоящее время имеется ряд открытых вопросов в квантовой и классической динамике в ограниченных областях. В частности, в работе [5] указывается, что процесс расплывания квантовых волновых пакетов исследован в недостаточной степени. Другой вопрос — на каких временных интервалах квантовое и классическое описания согласуются друг с другом. Остаётся открытым вопрос о виде соотношений неопределённостей для ограниченных областей [14].

Асимптотические свойства классической динамики для бесстолкновительной сплошной среды в ящике рассматривались А. Пуанкаре и В. В. Козловым [15–17]. В данной работе получены аналоги теорем Козлова о диффузии для квантовых систем.

В настоящей работе построен новый тип квантовых когерентных состояний для частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме (другие способы построения когерентных состояний для бесконечно глубокой потенциальной ямы представлены, например, в [18–20]). Для исследования поведения этих состояний во времени используется своеобразный квазиклассический предел, когда постоянная Планка стремится к нулю, а время — к бесконечности. Аналогичный предельный переход используется в методе стохастического предела [21]. Здесь доказаны теоремы, описывающие динамику когерентных состояний в бесконечно глубокой потенциальной яме на всех масштабах времени в квазиклассическом приближении. Теоремы позволяют подробно проследить все этапы квантовой эволюции.

В частности, получено строгое обоснование факта, что бóльшую часть времени пространственное распределение волнового пакета близко к равномерному. Ранее этот факт был известен лишь из численных экспериментов.

Дальнейшее изложение организовано следующим образом. В разделе 2 мы напоминаем определение и основные свойства когерентных состояний для частицы на прямой. В разделе 3 мы определяем когерентные состояния для частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме и выводим их некоторые свойства. В разделе 4 рассматриваются общие свойства динамики этих состояний. В разделе 5 рассматривается квазиклассический предел динамики этих состояний, формулируется и обсуждается основная теорема. Наконец, раздел 6 посвящён дополнительным замечаниям, связанным с основной теоремой.

2 Когерентные состояния для частицы на прямой

Рассмотрим гильбертово пространство $L_2(\mathbb{R})$ квадратично интегрируемых функций на вещественной прямой $\mathbb{R}$ и семейство функций $\eta_{qp}(x) \in L_2(\mathbb{R})$, $(q,p) \in \mathbb{R}^2$, на нём:

$$\eta_{qp}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\alpha^2}} e^{-\frac{(x-q)^2}{4\alpha^2} + \frac{ip(x-q)}{\hbar}}, \tag{1}$$

где $\alpha > 0$, $\hbar > 0$. Это семейство функций обладает свойством, которое называется непрерывным разложением единицы [22]:

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\mathbb{R}^2} P[\eta_{qp}] dq dp = 1.$$

Здесь через $P[\psi]$, $\psi \in L_2(\mathbb{R})$, обозначен одномерный оператор, действующий на произвольный вектор $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ по правилу $P[\psi]\varphi = (\psi, \varphi)\psi$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(\mathbb{R})$ (если ψ — единичный вектор, то $P[\psi]$ — проектор). Равенство понимается в слабом смысле: для любых $\psi, \chi \in L_2(\mathbb{R})$ выполнено

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\mathbb{R}^2} (\psi, P[\eta_{qp}]\chi) dq dp = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\mathbb{R}^2} (\psi, \eta_{qp})(\eta_{qp}, \chi) dq dp = (\psi, \chi). \tag{2}$$

В квантовой механике функции η_{qp} (при фиксированном α) называются *когерентными состояниями* (для частицы на прямой). Наиболее общее формальное определение когерентных состояний дано Дж. Клаудером (J. R. Klauder) и Б.–С. Скагерштамом (B.–S. Skagerstam) [23]: семейством когерентных состояний называется произвольное семейство векторов, 1) непрерывно зависящее от своих индексов (в нашем случае – q и p) и 2) образующее непрерывное разложение единицы. Однако другим ключевым свойством когерентных состояний является то, что они наилучшим образом из всевозможных квантовых состояний (всех квадратично интегрируемых функций) приближаются по свойствам к классическим частицам.

Функции η_{qp} также называют квантовыми волновыми пакетами, т.к. каждая из них представляют собой совокупность волн с разными частотами. Эти функции описывают квантовую частицу, локализованную в координатном пространстве возле точки q и в импульсном пространстве возле точки p. Параметр α имеет смысл среднеквадратичного отклонения координатного распределения. Среднеквадратичное отклонение импульсного распределения составляет $\frac{\hbar}{2\alpha}$. Таким образом, когерентные состояния η_{qp} минимизируют соотношения неопределённостей Гейзенберга (произведение среднеквадратичных отклонений координатного и импульсного распределений составляет минимально возможное значение $\frac{\hbar}{2}$). В квазиклассическом пределе при таком одновременном стремлении $\hbar$ и α к нулю, что $\frac{\hbar}{\alpha} \to 0$, среднеквадратичные отклонения и по координате, и по импульсу также стремятся к нулю. Т.е., как и следовало ожидать, в квазиклассическом пределе квантовая частица имеет хорошо определённые координату, равную q, и импульс, равный p. Это будет важно в дальнейшем.

Известно, что для системы квантового гармонического осциллятора волновой пакет η_{qp} движется, сохраняя свою форму, при этом центр волнового пакета движется по классической траектории [24,25]. Благодаря этому свойству и свойству минимизации соотношений неопределённостей считается, что когерентные состояния на прямой η_{qp} наилучшим образом из всевозможных квантовых состояний приближаются по свойствам к классическим частицам.

3 Когерентные состояния для частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме

Рассмотрим теперь гильбертово пространство $L_2(-l,l)$ квадратично интегрируемых функций на отрезке $[-l,l]$ и определим следующее семейство состояний на нём:

$$\omega_{qp}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \eta_{qp}[(-1)^n(x-2nl)], \tag{3}$$

где $(q,p) \in \Omega = [-l,l] \times \mathbb{R}$.

Справедлива следующая

Теорема 1. *Семейство функций ω_{qp}, $(q,p) \in \Omega$, образует непрерывное разложение единицы в $L_2(-l,l)$:*

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} P[\omega_{qp}]dqdp = 1.$$

Равенство понимается в слабом смысле: для любых $\varphi, \varkappa \in L_2(-l,l)$ выполнено

$$\frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} (\varphi, P[\omega_{qp}]\varkappa)dqdp = \frac{1}{2\pi\hbar} \iint_{\Omega} (\varphi, \omega_{qp})(\omega_{qp}, \varkappa)dqdp = (\varphi, \varkappa). \tag{4}$$

Здесь через $P[\psi]$, $\psi \in L_2(-l,l)$, обозначен одномерный оператор, действующий на произвольный вектор $\varphi \in L_2(-l,l)$ по правилу $P[\psi]\varphi = (\psi,\varphi)\psi$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2(-l,l)$. Доказательство теоремы приведено в [26].

Функции ω_{qp} можно назвать *когерентными состояниями в бесконечно глубокой потенциальной яме*, во-первых, потому что они удовлетворяют общему определению Клаудера и Скагерштама (непрерывная зависимость от индексов q,p и непрерывное разложение единицы), во-вторых, потому что, как мы увидим, временна́я эволюция на окружности этих состояний в квазиклассическом пределе переходит в динамику классической частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме, и в-третьих, в пределе больших l они переходят в когерентные состояния на прямой η_{qp}.

Установление наиболее подходящего вида соотношений неопределённостей для квантовых систем в ограниченной области (в частности, в бесконечно глубокой потенциальной яме) остаётся открытым вопросом. Некоторые обсуждения см. в [24]. Анализ асимптотических свойств локализации для квантовых состояний, родственных состояниям $\omega_{qp}(x)$, проведён в [14]. График функции $|\omega_{0,1}(x)|^2$, которая имеет смысл функции плотности координатного распределения, приведён на рис. 1а).

Функции ω_{qp} можно выразить через тета-функцию

$$\theta(x,\tau) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi\tau k^2 + 2\pi i k x}, \quad \operatorname{Re}\tau > 0,$$

следующим образом:

$$\omega_{qp}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\alpha^2}}\,\theta\left[\frac{(x-q)l}{i\pi\alpha^2} - \frac{2pl}{\pi\hbar}, \frac{4l^2}{\pi\alpha^2}\right] e^{-\frac{(x-q)^2}{4\alpha^2} + \frac{ip(x-q)}{\hbar}} - \\ - \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\alpha^2}}\,\theta\left[\frac{(x-2l+q)l}{i\pi\alpha^2} - \frac{2pl}{\pi\hbar}, \frac{4l^2}{\pi\alpha^2}\right] e^{-\frac{(x-2l+q)^2}{4\alpha^2} - \frac{ip(x-2l+q)}{\hbar}}. \tag{5}$$

Для тета-функции справедливо так называемое модулярное свойство (тождество Якоби) [27, 28]:

$$\theta(\frac{x}{i\tau}, \frac{1}{\tau}) = \sqrt{\tau} e^{\frac{\pi x^2}{\tau}} \theta(x, \tau).$$

Применяя его к (5), после некоторых преобразований получим

$$\omega_{qp} = \sqrt[4]{\frac{\pi\alpha^2}{32l^4}}\left[\theta\left(-\frac{x-q}{4l} - \frac{p\alpha^2}{2il\hbar}, \frac{\pi\alpha^2}{4l^2}\right) - \theta\left(-\frac{x-2l+q}{4l} - \frac{p\alpha^2}{2il\hbar}, \frac{\pi\alpha^2}{4l^2}\right)\right] \times \\ \times e^{-(\frac{\alpha p}{\hbar})^2} = \sqrt[4]{\frac{\pi\alpha^2}{2l^4}} \sum_{k=1}^{\infty}\left[e^{-\alpha^2[\frac{\pi}{2l}k - \frac{p}{\hbar}]^2 - \frac{i\pi k(q-l)}{2l}} - e^{-\alpha^2[\frac{\pi}{2l}k + \frac{p}{\hbar}]^2 + \frac{i\pi k(q-l)}{2l}}\right] \sin\frac{\pi k}{2l}(x-l). \tag{6}$$

Мы получили разложение функций ω_{qp} по ортогональному базису

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{l}} \sin\frac{\pi k}{2l}(x-l), \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Этот же результат можно получить, непосредственно проинтегрировав ω_{qp} по элементам этого базиса.

Функции f_k являются собственными для оператора Гамильтона для квантовой частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме (см. [14])

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}$$

с областью определения

$$D(H) = \{\psi \in AC^2(-l, l) |\, \psi(-l) = \psi(l) = 0\}.$$

Здесь $AC^2(-l, l)$ — пространство дифференцируемых квадратично интегрируемых функций, производные которых принадлежат пространству $AC(-l, l)$. В свою очередь $AC(-l, l)$ — пространство квадратично интегрируемых и абсолютно непрерывных функций, производные которых также квадратично интегрируемы.

Следовательно, функции $\omega_{qp}(x)$ раскладываются в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям оператора Гамильтона для частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме. Поэтому их удобно использовать для анализа динамики данной физической системы.

4 Эволюция когерентных состояний во времени

Эволюция состояний ω_{qp} во времени даётся формулой

$$\omega_{qp,t} = U_t \omega_{qp},$$

где

$$U_t = \exp(-\frac{it}{\hbar}H) \tag{7}$$

— оператор эволюции. Функция $\omega_{qp,t}$ удовлетворяет уравнению Шрёдингера с граничными условиями, соответствующими твёрдым непроницаемым стенкам:

$$\begin{aligned} &i\hbar\frac{\partial\omega_{qp,t}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\omega_{qp,t}}{\partial x^2}, \\ &\omega_{qp,t}(-l) = \omega_{qp,t}(l) = 0, \\ &\omega_{qp,0}(x) = \omega_{qp}(x), \end{aligned} \tag{8}$$

где $x \in [-l, l]$, $t \in \mathbb{R}$. Решая уравнение методом отражений [29], приходим к тому, что

$$\omega_{qp,t}(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \eta_{qp,t}[(-1)^n(x - 2nl)],$$

где

$$\eta_{qp,t}(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{2\pi\alpha^2(1+i\gamma)^2}} \exp\left[-\frac{(x-q-\frac{pt}{m})^2}{4\alpha^2(1+i\gamma)} + \frac{ip(x-q-\frac{pt}{2m})}{\hbar}\right], \tag{9}$$

$$\gamma = \frac{\hbar t}{2m\alpha^2},$$

— хорошо известная функция из $L_2(\mathbb{R})$, описывающая эволюцию во времени начального волнового пакета η_{qp} на прямой.

Если разложить $\omega_{qp,t}$ по собственным функциям H, то получим

$$\omega_{qp,t}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_{k,qp} \sin\frac{\pi k}{2l}(x-l) \exp\left[-\frac{i\hbar t}{2m}\left(\frac{\pi k}{2l}\right)^2\right], \tag{10}$$

где коэффициенты разложения $b_{k,qp}$ можно определить по формуле (6).

Как можно видеть из (9), при свободном движении на прямой центр волнового пакета перемещается по классической траектории $q(t) = q + pt/m$, в то время как его дисперсия увеличивается, т.е. волновой пакет со временем неограниченно расплывается. Если в начальный момент среднеквадратичное отклонение координаты равно $\Delta x(0) = \alpha$, то в момент t оно составит

$$\Delta x(t) = \sqrt{\alpha^2 + (\frac{\hbar t}{2m\alpha})^2}. \tag{11}$$

В потенциальной яме некоторое время наблюдается похожее поведение. Вначале волновой пакет движется по классической траектории с периодом

$$T_{cl} = \frac{4lm}{p}$$

(это период движения по отрезку длины $2l$ классической частицы массы m, обладающей импульсом p, с упругим отражением от стенок). Этот этап динамики представлен на рис. 1б).

Постепенно волновой пакет расплывается. Численные эксперименты, результаты которых приведены в [6], показывают, что в момент

$$T_{coll} = \frac{2ml\alpha}{\sqrt{3}\hbar} \tag{12}$$

(“coll” от “collapse” — «разрушение» локализованного волнового пакета) достигается приблизительно равномерное распределение положения частицы на окружности: $|\omega_{qp,t}(x)|^2 \approx 1/2l$. Значение T_{coll} можно эвристически получить следующим образом. Среднеквадратичное отклонение равномерного пространственного распределения на окружности $[-l, l]$ равно $l/\sqrt{3}$. Приравняем тогда $\Delta x(t) = l/\sqrt{3}$, где $\Delta x(t)$ определено формулой (11). Тогда T_{coll} является решением полученного уравнения относительно t. Разумеется, этот вывод является нестрогим, поскольку $\Delta x(t)$ есть среднеквадратичное отклонение в момент t для динамики на прямой, а не на окружности. Однако, повторим, этот вывод приблизительно подтверждается численными экспериментами. Нами получены некоторые строгие асимптотические оценки, соответствующие выравниванию пространственной плотности (см. следующий раздел). Данному этапу динамики соответствует рис. 1в).

Мы видим, что динамика волнового пакета в потенциальной яме похожа на динамику волнового пакета на прямой: движение пакета по классической траектории, его расплывание. Однако на больших временах характер динамики в бесконечно глубокой потенциальной яме совершенно иной по сравнению с динамикой на прямой. Из формулы (10) видно, что динамика периодическая: за время

$$T_{rev} = \frac{16ml^2}{\pi\hbar} \tag{13}$$

волновой пакет полностью восстанавливается в изначальном виде, $\omega_{qp,T_{rev}} = \omega_{qp}$ (см. рис. 1а)). Это явление называется *полным возрождением волнового пакета*. В моменты времени $\frac{M}{N}T_{rev}$, где M и N — целые числа, наблюдаются т.н. *дробные возрождения пакета* [2, 3], когда копия начального пакета восстанавливается сразу в нескольких местах на окружности. На рис. 1г) изображён случай тройного возрождения волнового пакета. Подробнее о динамике квантовых систем с дискретным энергетическим спектром и, как частный случай, квантовых частиц на окружности см. [1–6].

Рис. 1. График функции $|\omega_{0,1}(t)|^2$ для различных моментов времени.
Вычисления проведены для следующих значений параметров:
$\hbar = 0,01$, $\alpha = 0,1$, $l = 1$; а) $t = 0$ и $t = T_{rev}$, б) $t = \frac{5}{8}T_{cl}$, в) $t = \frac{3}{2}T_{coll}$, г) $t = T_{rev}/3$.

Таким образом, в квантовой динамике на окружности присутствуют три временных масштаба [6]:

1) T_{cl} — классический период движения;

2) T_{coll} — характерное время расплывания квантового волнового пакета;

3) T_{rev} — период полного возрождения квантового волнового пакета.

В следующем разделе мы будем рассматривать квазиклассический предел $\hbar \to 0$, $\alpha \to 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \to 0$ (параметр α участвует в определении функций ω_{qp} — см. формулы (1) и (3)). В этом пределе масштабы времени имеют разные асимптотики:

$$T_{cl} = C_1, \quad T_{coll} = C_2\frac{\alpha}{\hbar}, \quad T_{rev} = \frac{C_3}{\hbar} \tag{14}$$

(C_1, C_2, C_3 — постоянные). Квазиклассический предел в квантовой механике при $\hbar \to 0$ исследуется, например, в [30]

5 Квазиклассическая динамика частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме. Основная теорема

Пределы, о которых пойдёт речь в этом разделе, имеют смысл в пространстве обобщённых функций. Определим поэтому пространства основных и обобщённых функций, с которыми мы будем работать. Введём множество основных функций на полосе $\Omega = [-l, l] \times \mathbb{R}$, зависящих от $q \in [-l, l]$ и $p \in \mathbb{R}$, бесконечно дифференцируемых по q и p и быстро убывающих по p:

$$\begin{aligned}\mathscr{S}(\Omega) = \{\sigma : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} | 1)\ &\sigma[(-1)^n(q+2nl), (-1)^n p] = \sigma(q,p), n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \\ &2)\ \sigma \in C^\infty(\mathbb{R}^2); \\ &3)\ \lim_{p \to \pm\infty} p^r \frac{\partial^{s_1+s_2}\sigma}{\partial q^{s_1} \partial q^{s_2}} = 0,\ r, s_1, s_2 = 0, 1, 2, \ldots\}.\end{aligned} \tag{15}$$

Топология на этом пространстве задаётся полунормами

$$P_N(\sigma) = \max_{s_1+s_2 \le N} \sup_{\mathbb{R}^2} (1+p^2)^{N/2} \left| \frac{\partial^{s_1+s_2}\sigma}{\partial q^{s_1} \partial q^{s_2}} \right|, \quad N = 0, 1, 2, \ldots.$$

Пространство обобщённых функций $\mathscr{S}'(\Omega)$ — это пространство непрерывных линейных функционалов над $\mathscr{S}(\Omega)$. Условимся считать, что

$$\begin{aligned}&(\delta(q-q_0, p-p_0), \sigma) = \sigma(q_0, p_0), \\ &(f(q)\delta(p-p_0), \sigma) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(q)\sigma(q, p_0), \\ &(c\delta(p-p_0), \sigma) = c\int_{-l}^{l} \sigma(q, p_0) dq,\end{aligned}$$

где $(q_0, p_0) \in \mathbb{R}^2$, $f(q)$ — интегрируемая функция на прямой, $c \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим функцию

$$\varphi_D(q) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D^2}} e^{-\frac{q^2}{2D^2}},$$

где $D \in (0, \infty)$, и доопределим обобщённую функцию $\varphi_D(q)\delta(p-p_0)$, $p_0 \in \mathbb{R}$, при $D = 0$ и $D = \infty$ исходя из соответствующих пределов:

$$\varphi_0(q)\delta(p-p_0) = \lim_{D \to 0} \varphi_D(q)\delta(p-p_0) = \delta(q, p-p_0),$$

$$\varphi_\infty(q)\delta(p-p_0) = \lim_{D \to \infty} \varphi_D(q)\delta(p-p_0) = \frac{1}{4l}\delta(p-p_0) + \frac{1}{4l}\delta(p+p_0)$$

(пределы берутся в пространстве $\mathscr{S}'(\Omega)$).

Тогда справедлива следующая

Теорема 2. *В $\mathscr{S}'(\Omega)$ имеют место следующие пределы (переменные (q, p) фиксированы, а (q', p') — переменные интегрирования с пробными функциями $\sigma(q', p') \in \mathscr{S}(\Omega)$):*

$$\lim\{\frac{1}{2\pi\hbar}|(\omega_{qp},\omega_{q'p',t})|^2 - \frac{1}{N'}\sum_{k=0}^{N'-1}\varphi_D[q'-q-\frac{4kl}{N'}-a+\frac{p}{m}(t-cT_{rev})]\delta(p'-p)\} = 0. \quad (16)$$

Предел осуществляется следующим образом: $\hbar \to 0$, $\alpha \to 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \to 0$, $t = t(\hbar)$, $\frac{\hbar}{\alpha}(t - cT_{rev}) \to 2mD$, $\hbar(t - \frac{c}{T_{rev}}) \to 0$, *где* $c \in \mathbb{R}$, $D \in [0,\infty]$, *а числа* N' *и* a *определяются числом* c. *Пусть* c *рационально, следовательно, может быть записано в виде несократимой дроби* $c = \frac{M}{N}$. *Тогда* $N' = N$, *если* N *нечётно, и* $N' = \frac{N}{2}$, *если* N *чётно;* $a = \frac{2l}{N}$, *если* $N = 2 \mod 4$, *и* $a = 0$ *в противном случае. Если число* c *иррационально, то* $N' = 1$, $a = 0$. *Параметр* α *участвует в определении функций* ω_{qp} *(см. формулы (1) и (3)),* $T_{rev} = \frac{16ml^2}{\pi\hbar}$.

Сходимость является равномерной по (q,p) *на любом подмножестве* Ω, *не пересекающемся с некоторой окрестностью отрезка* $\{p = 0\} \subset \Omega$. *Более того, если* c *— целое или полуцелое число, то сходимость равномерна на любом подмножестве* Ω, *не пересекающемся с некоторыми окрестностями точек* $(\pm l, 0)$.

Доказательство теоремы приведено в [26].

Поясним утверждения теоремы. $\frac{1}{2\pi\hbar}|(\omega_{qp},\omega_{q'p',t})|^2$ представляет собой плотность вероятности перехода квантовой частицы в потенциальной яме из состояния $\omega_{q'p'}$ в состояние ω_{qp} за время t.

Предел $\hbar \to 0$ соответствует квазиклассическому приближению. Пределы $\alpha \to 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \to 0$ соответствуют стремлению среднеквадратических отклонений координаты и импульса квантового волнового пакета ω_{qp} к нулю (см. раздел 2). Таким образом, в рассматриваемом квазиклассическом пределе у квантовой частицы в состоянии ω_{qp} хорошо определены и координата (равная q), и импульс (равный p) — как у классической частицы. Поэтому можно сказать, что в квазиклассическом пределе величина $\frac{1}{2\pi\hbar}|(\omega_{qp},\omega_{q'p',t})|^2$ — это плотность вероятности перехода квантовой частицы из фазовой точки (q',p') в фазовую точку (q,p) за время t.

В теореме рассматриваются различные скорости стремления t (времени) к бесконечности по отношению к $\hbar$ и α, т.е. различные масштабы времени 1)—3), перечисленные в конце предыдущего раздела. Как видно из (14), случай $c = 0$ и $D = 0$ ($\frac{\hbar t}{\alpha} \to 0$) соответствует первому, классическому, масштабу времени T_{cl}: время фиксировано или возрастает медленнее, чем снижается скорость расплывания пакета, пропорциональная $\frac{\hbar}{\alpha}$. Тогда формула (16) принимает вид

$$\lim[\frac{1}{2\pi\hbar}|(\omega_{qp},\omega_{q'p',t})|^2 - \delta(q'-q+\frac{p}{m}t, p'-p)] = 0. \quad (17)$$

Вычитаемое правой части равенства $\delta(q'-q+\frac{p}{m}t, p'-p)$ есть классическая плотность вероятности перехода частицы из фазовой точки (q',p') в фазовую точку (q,p). Таким образом, в квазиклассическом пределе на масштабе времени T_{cl} имеет место классическая динамика: квантовая плотность вероятности перехода в фазовую точку (q,p) для частицы, находившейся в нулевой момент времени в фазовой точке (q',p'), равна соответствующей классической плотности вероятности.

Случай $c = 0$, $D \in (0,\infty)$ ($\frac{\hbar t}{\alpha} \to 2mD \in (0,\infty)$) соответствует второму масштабу времени T_{coll}. В этом случае формула (16) принимает вид

$$\lim[\frac{1}{2\pi\hbar}|(\omega_{qp},\omega_{q'p',t})|^2 - \varphi_D(q'-q+\frac{p}{m}t)\,\delta(p'-p)] = 0.$$

Как видно, квантовая плотность вероятности перехода из точки в точку уже не равна классической: наблюдается некоторое расплывание пространственного распределения. В частности, случай $t = T_{coll}$ соответствует $D = \frac{l}{\sqrt{3}}$, а поскольку D связано со среднеквадратичным отклонением «размазывающей функции» φ_D, то последнее приблизительно совпадает со среднеквадратичным отклонением равномерного распределения на отрезке $[-l, l]$, в согласии с результатами [5,6]. Однако в этом пределе точное равномерное распределение места всё же не имеет, в отличие от следующего случая.

Случай $c = 0$, $D = \infty$ ($\frac{\hbar t}{\alpha} \to \infty$) соответствует промежуточному масштабу времени между T_{coll} и T_{rev}. Здесь формула (16) принимает вид

$$\lim \frac{1}{2\pi\hbar}|(\omega_{qp}, \omega_{q'p',t})|^2 = \frac{1}{4l}[\delta(p'-p) + \delta(p'+p)], \tag{18}$$

т.е. утверждение этого пункта соответствует полному выравниванию пространственной плотности вероятности. Поэтому отнесём этот случай также ко второму масштабу времени (соответствующему разрушению локализованного волнового пакета). Заметим, что здесь получено математическое обоснование (асимптотического) выравнивания пространственной плотности вероятности для квантовой частицы в конечном объёме, известное ранее лишь из численных экспериментов [5,6]. Этот результат можно рассматривать как квантовый аналог теорем Козлова о диффузии для классических систем [16,17].

Обратим внимание на рис. 1в), соответствующий рассматриваемому масштабу времени. Мы видим, что пространственное распределение $|\omega_{qp}(t)|^2$ испытывает сильные осцилляции. Таким образом, пространственное распределение стремится к равномерному только в смысле обобщённой функции, т.е. в смысле слабого предела.

Случай $c \neq 0$ соответствует третьему масштабу времени T_{rev}. Если c — иррациональное число, то, как и в предыдущем случае, формула (16) сводится к формуле (18), т.е. наблюдается полное выравнивание пространственной плотности вероятности. Случай рационального c соответствует возрождению волнового пакета, в общем случае — дробному и неточному. Разберём этот случай подробнее.

Пусть вначале $t - \frac{M}{N}T_{rev} \to 0$, отсюда следует $D = 0$ (пример: $t = \frac{M}{N}T_{rev}$). Тогда формула (16) принимает вид

$$\lim \frac{1}{2\pi\hbar}|(\omega_{qp}, \omega_{q'p',t})|^2 = \frac{1}{N'}\sum_{k=0}^{N'-1} \delta(q' - q - \frac{2kl}{N'} - a, p' - p), \tag{19}$$

где N' и a определены в утверждении теоремы. Это точное дробное возрождение пакета, результат согласуется с результатами работ [2–4]. Случай $N = 1$ (т.е. целого c) соответствует точному полному возрождению пакета (формула (19) переходит в формулу (17) для $t = 0$). В случае $D \in (0, \infty)$ мы получаем сумму тех же N', но «размазанных» волновых пакетов(в этом случае формула (16) не упрощается). Это случай неточного возрождения пакета (дробного или полного). В случае $D = \infty$ мы снова получаем полное выравнивание пространственной плотности распределения (18).

Поскольку любое иррациональное число можно сколь угодно точно приблизить рациональными, то (нестрого) можно сказать, что случай иррационального c является предельным случаем рационального c при $N \to \infty$: если мы приближаем иррациональное число последовательностью рациональных, то знаменатели рациональных чисел последовательности возрастают, расстояние между соседними слагаемыми в сумме дельта-функций в формуле (16) стремится к нулю и в пределе сумма дельта-функций переходит в равномерное распределение. Иными словами, случаи иррационального c и очень близкого к нему рационального c' практически неразличимы.

Можно заметить, что во всех предельных случаях сохраняется распределение модуля импульса.

Мы только что проследили всю динамику квантового волнового пакета в бесконечно глубокой потенциальной яме: вначале хорошо локализованный волновой пакет со временем расплывается, пока не достигается полное выравнивание пространственной плотности. В некоторые моменты времени сразу в нескольких точках постепенно возникает по копии исходного волнового пакета, которые затем снова постепенно расплываются, пока снова не достигается полное выравнивание плотности. Поскольку иррациональных чисел «больше», чем рациональных, то можно сказать, что бóльшую часть времени частица проводит в состоянии с пространственным распределением плотности, близким к равномерному.

Таким образом, теорема полностью описывает квазиклассический предел свободной квантовой динамики на окружности на всех масштабах времени.

Приведём упрощённый вариант теоремы 2, в котором рассмотрены только основные масштабы времени, без промежуточных: классическое движение, полное расплывание и точные полные и дробные возрождения.

Следствие. *В $\mathscr{S}'(\Omega)$ имеют место следующие пределы:*

1)

$$\lim[\frac{1}{2\pi\hbar}|(\omega_{qp},\omega_{q'p',t})|^2-\delta(q'-q+\frac{p}{m}t,p'-p)]=0$$

при $\hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha}\to 0$, $t=const$;

2)

$$\lim\frac{1}{2\pi\hbar}|(\omega_{qp},\omega_{q'p',t})|^2=\frac{1}{4l}\delta(p'-p)+\frac{1}{4l}\delta(p'+p)$$

при $\hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha}\to 0$, $t\to\infty$, $\frac{\hbar t}{\alpha}\to\infty$,
при $\hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha}\to 0$, $t=cT_{rev}\to\infty$, c иррационально, $T_{rev}=\frac{16ml^2}{\pi\hbar}$;

3)

$$\lim[\frac{1}{2\pi\hbar}|(\omega_{qp},\omega_{q'p',t})|^2-\frac{1}{N'}\sum_{k=0}^{N'-1}\delta(q'-q-\frac{4kl}{N'}-a,p'-p)]=0$$

при $\hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha}\to 0$, $t=cT_{rev}\to\infty$, $c=\frac{M}{N}$ рационально, числа N' и a зависят от N.

Сходимости в пунктах 1), 2) и пункте 3) при $N=1$ или $N=2$ (т.е. при целом или полуцелом c, если оно рационально) сходимости являются равномерными по (q,p) на любом подмножестве Ω, не пересекающемся с некоторыми окрестностями точек $(\pm l,0)$. Если в пункте 3) N отлично от 1 и 2, то сходимость равномерна на любом подмножестве Ω, не пересекающемся с некоторой окрестностью отрезка $\{p=0\}\subset\Omega$.

6 Замечания к основной теореме

1. Мы доказали теорему о квазиклассическом пределе динамики состояний строго определённого вида. Но полученный результат носит общий характер, поскольку

согласно формуле (4) произвольную функцию $\psi \in L_2(-l,l)$ можно разложить в интеграл по когерентным состояниям:

$$\psi = \iint_\Omega f_\psi(q,p)\omega_{qp}dqdp,$$

где $f_\psi(q,p) = (\omega_{qp},\psi)$.

2. Всюду мы рассматривали предел $\hbar, \alpha, \frac{\hbar}{\alpha} \to 0$. Мы использовали его как математический приём для облегчения вычислений. В частности, как было сказано, до сих пор в литературе отсутствовало доказательство факта того факта, что бóльшую часть времени пространственная плотность частицы в конечном объёме близка к равномерной. Более того, отсутствовала даже достаточно чёткая математическая формулировка этого факта: для изначально локализованного пакета равномерное распределение в точности никогда не достигается. В каком смысле тогда требуется понимать «близость» распределения равномерному? Мы доказали, что на определённых масштабах времени (втором и большей части третьего) в нашем предельном случае пространственная плотность в точности является равномерной, причём в слабом смысле. Т.е. факт нахождения частицы в состоянии с пространственной плотностью, близкой к равномерной, мы выразили математически как предел специального вида.

С физической же точки зрения эти пределы непосредственного смысла не имеют: постоянная Планка $\hbar$, является мировой константой и не может стремиться к нулю. Обсуждение квазиклассического предела в этом случае для преобразования пекаря см. [31]. Параметр α также является фиксированным для фиксированного когерентного состояния. С физической точки зрения более правильно было бы рассматривать предельные случаи для безразмерных величин [25]. Переформулируем наши утверждения в терминах соотношений между временны́ми масштабами T_{cl}, T_{coll}, T_{rev} и временны́м параметром t. По формуле (14) замечаем, что пределы $\hbar \to 0$, $\alpha \to 0$, $\frac{\hbar}{\alpha} \to 0$ можно записать в виде

$$\frac{T_{coll}}{T_{cl}} \to \infty, \quad \frac{T_{rev}}{T_{coll}} \to \infty, \quad \frac{T_{rev}}{T_{cl}} \to \infty,$$

или

$$T_{rev} \gg T_{coll} \gg T_{cl}$$

(знак $\gg$ означает «много больше»), т.е. временные масштабы (классический период движения, характерное время расплывания и время полного возрождения) далеко отстоят друг от друга на временной шкале. Далее, пределы $\frac{\hbar t}{\alpha}(t - cT_{rev}) \to 2mD$ и $\hbar t(t - cT_{rev}) \to 0$, участвующие в теореме 2, переписываются в виде

$$\frac{t - cT_{rev}}{T_{coll}} \to 2mD, \quad \frac{t}{T_{rev}} \to c.$$

Как видим, рассмотренные пределы имеют прозрачный физический смысл.

3. Отметим, что, имея когерентные состояния в бесконечно глубокой потенциальной яме $\omega_{qp}(x)$ и используя преобразование Хусими, мы можем установить соответствие между операторами плотности в гильбертовом пространстве $L_2(-l,l)$ и функциями плотности вероятности в фазовом пространстве Ω.

Пусть ρ — оператор плотности (иначе — квантовое состояние) в $L_2(-l, l)$ (т.е. положительный оператор с единичным следом). Поставим ему в соответствие функцию на фазовом пространстве Ω (классическое состояние):

$$\widetilde{\rho}(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}\,\mathrm{Tr}\,P[\omega_{qp}]\rho = \frac{1}{2\pi\hbar}(\upsilon_{qp}, \rho\omega_{qp}), \tag{20}$$

где через Tr обозначена операция взятия следа оператора. В случае если оператор плотности представляет собой проектор ($\rho = P[\psi]$, $\psi \in L_2(-l,l)$), что отвечает случаю чистого квантового состояния (которые мы и рассматривали до сих пор), то формула (20) принимает вид

$$\widetilde{\rho}(q,p) = \frac{1}{2\pi\hbar}|(\psi, \omega_{qp})|^2.$$

Очевидно, $\widetilde{\rho}(q,p) > 0$ и в силу (4)

$$\iint_{\Omega} \widetilde{\rho}(q,p)dqdp = 1,$$

т.е. $\widetilde{\rho}(q,p)$ является функцией плотности вероятности на фазовом пространстве, иными словами — классическим состоянием. Сопоставление по формуле (20) квантовому оператору плотности классической плотности распределения вероятностей называется преобразованием Хусими. Саму функцию плотности вероятностей $\widetilde{\rho}$ также называют функцией Хусими оператора ρ.

Преобразование Хусими является одним из способов установления соответствия между квантовыми и классическими состояниями. Другой известный способ — это функция Вигнера. Функция Хусими может быть представлена как сглаживание функции Вигнера с гауссовой функцией. Как известно, функция Вигнера в общем случае не обладает свойством неотрицательности. Однако функция Хусими, как мы показали, этим свойством обладает. Подробнее об этих вопросах см. [32, 33]. Динамика функции Вигнера и диффузия в бесстолкновительной среде, состоящей из квантовых частиц в некомпактном пространстве, рассмотрена в работе [34].

В статье [26] рассмотрена динамика функции Хусими (20) в квазиклассическом пределе. Полученные результаты применяются к вопросам классической механики, а именно, к вопросу о том, какую формулировку классической механики следует предпочесть: традиционную формулировку или недавно предложенную И. В. Воловичем функциональную механику [35, 36] (см. также [37–40]). Показывается, что обе формулировки классической механики адекватно описывают систему не на сколь угодно больших временах. Но функциональная формулировка классической механики сохраняет свою справедливость на бо́льших масштабах времени, чем точечная формулировка. Следовательно, с этой точки зрения она является более предпочтительной.

4. Всюду мы предполагали, что ширина потенциальной ямы $2l$ определена с бесконечной точностью. Однако следует заметить, что параметры физической системы не могут быть измерены с бесконечной точностью. Следовательно, если мы хотим предсказывать вероятность местонахождения частицы в том или ином месте в тот или иной момент времени, то мы должны вместо фиксированного $l \in \mathbb{R}$ рассматривать некоторую плотность распределения вероятности $f(l)$ параметра l. В частности,

её можно построить исходя из результатов измерений [40]. Тогда, поскольку T_{rev} зависит от l, строгая периодичность свободной квантовой динамики нарушается. Более того, оказывается, при $t \to \infty$ для пространственной плотности в конечном объёме существует предел, причём в квазиклассическом приближении предельное распределение стремится к равномерному в смысле слабого предела [26].

7 Заключение

Построен новый вид квантовых когерентных состояний для частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме. Предложен своеобразный квазиклассический предел динамики квантовых когерентных состояний на окружности и в ящике, когда постоянная Планка стремится к нулю, а время — к бесконечности. Переход к такому пределу позволяет исследовать динамику квантовой частицы в бесконечно глубокой потенциальной яме на всех масштабах времени. В частности, получено строгое обоснование факта, что бо́льшую часть времени пространственное распределение волнового пакета близко к равномерному. Ранее этот факт был известен лишь из численных экспериментов.

Отметим, что в современных работах по квантовой динамике в ограниченных областях [7–12] рассматриваются более реалистичные системы. Но основные результаты в этих работах получены на основе численных методов решения уравнения Шрёдингера. В представленной работе на более абстрактном примере предложен метод аналитического исследования динамики квантовых когерентных состояний в ограниченных областях — квазиклассический предел специального типа. Представляет интерес применить этот метод аналитического исследования для реалистичных систем.

8 Благодарности

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты 11-01-00828-а и 11-01-12114-офи-м-2011), гранта Президента РФ (проект НШ-2928.2012.1) и программы ОМН РАН. Автор выражает благодарность С. В. Болотину, Б. Л. Воронову, В. В. Веденяпину, В. С. Владимирову, И. В. Воловичу, С. Ю. Доброхотову, Е. И. Зеленову, В. В. Козлову, В. И. Манько, А. Г. Сергееву, О. Г. Смолянову, А. Д. Суханову, Д. В. Трещёву за полезные замечания и обсуждения.

Литература

1. *Bocchieri P. and Loinger A.* Quantum recurrence theorem // Phys.Rev., 1956, 107(2), 337-338.
2. *Averbukh I. Sh. and Perelman N.F.* Fractional revivals: Universality in the long-term evolution of quantum wave packets beyond the correspondence principle dynamics // Phys.Lett.A, 1989, 139(9), 449-453.
3. *Авербух И. Ш., Перельман Н. Ф.* Динамика волновых пакетов высоковозбуждённых состояний атомов и молекул // УФН, 1991, 161(7), 41–81.
4. *Aronstein D. L. and Stroud C. R., Jr.* Fractional wave-function revivals in the infinite square well // Phys.Rev.A, 1997, 55(6), 4526–4537.
5. *Robinett R. W.* Visualizing the collapse and revival of wave packets in the infinite square well using expectation values // Am.J.Physics, 2000, 68(5), 410–420; arXiv: quant-ph/0307041.
6. *Robinett R. W.* Quantum wave packet revivals // Phys.Reports, 2004, 392(1–2), 1–119; arXiv: quant-ph/0403031.

7. *Tiesinga E. and Johnson P.R.* Collapse and revival dynamics of number-squeezed superfluids of ultracold atoms in optical lattices // Phys.Rev.A, 2011, 83, 063609 [6 pages]; arXiv:1104.1402v1 [cond-mat.quant-gas].
8. *McGuirk J.M. and Zajiczek L.F.* Localized collapse and revival of coherence in an ultracold Bose gas // Phys.Rev.A, 2011, 83, 013625 [4 pages]; arXiv:1008.4428v1 [cond-mat.quant-gas].
9. *Torres J.J. and Romera E.* Wave packet revivals in a graphene quantum dot in a perpendicular magnetic field // Phys.Rev.B, 2010, 82, 155419 [4 pages]; arXiv: 1009.4836v2 [cond-mat.mes-hall].
10. *Berry M. V.* Causal wave propagation for relativistic massive particles: physical asymptotics in action // Eur.J.Phys, 2012, 33(2), 279 [16 pages].
11. *Romera E.* Revivals of zitterbewegung of a bound localized Dirac particle // Phys.Rev.A, 2011, 84, 052102 [4 pages].
12. *Demikhovskii V.Ya., Maksimova G.M., Perov A.A., Telezhnikov A.V.* Long-term cyclotron dynamics of relativistic wave packets: Spontaneous collapse and revival // Phys.Rev.A, 2012, 85, 022105 [14 pages]; arXiv: 1107.3983 [quant-ph].
13. *Salari V., Tuszynski J., Rahnama M., Bernroider G.* Plausibility of quantum coherent states in biological systems // J.Physics.Conf.Ser, 2011, 306(1), 012075 [8 pages]; arXiv: 1012.3879 [physics.bio-ph].
14. *Волович И. В. Трушечкин А. С.* О квантовых сжатых состояниях на отрезке и соотношениях неопределённостей для наноскопических систем // Труды МИ АН, 2009, 265, 288-319.
15. *Пуанкаре А.* Замечания о кинетической теории газов // Избранные труды в трёх томах. Т. III. Математика. Теоретическая физика. Анализ математических и естественнонаучных работ Анри Пуанкаре // М. : Наука, 1974. С. 385–412. (Классики науки).
16. *Козлов В. В.* Тепловое равновесие по Гиббсу и Пуанкаре // М. ; Ижевск : Институт компьютерных исследований. 2002. 320 с.
17. *Козлов В. В.* Ансамбли Гиббса и неравновесная статистическая механика // М. ; Ижевск : НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» ; Институт компьютерных исследований, 2008. 204 с.
18. *Antoine J.-P., Gazeau J.-P., Monceau P., Klauder J.R., and Penson K. A.* Temporally stable coherent states for infinite well and Poschl-Teller potentials // J.Math.Phys., 2001, 42(6), 2349 [39 pages]
19. *Lemus R. and Frank A.* A realization of the dynamical group for the square-well potential and its coherent states // J.Phys.A., 2003, 36(17), 4901-4910.
20. *El Kinani A.H., Daoud M.* Coherent and generalized intelligent states for infinite square well potential and nonlinear oscillators // Int.J.Mod.Phys.B, 2002, 16(26), 3915-3937.
21. *Accardi L., Lu Yu.G, Volovich I.V.* Quantum theory and its stochastic limit // Springer, 2002. 473 p.
22. *Клаудер Дж., Сударшан Э.* Основы квантовой оптики // М. : Мир, 1970. 428 с.
23. *Klauder J.R., Skagerstam B.-S.* Coherent states: applications in physics and mathematical physics // Singapore: World Scientific, 1985. 911 p.
24. *Давыдов А.С.* Квантовая механика // М.: Наука, 1973. 704 с.
25. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теоретическая физика. В 10-и тт. Т.III: Квантовая механика // М. : Физматлит, 2002. 808 с.
26. *Волович И. В., Трушечкин А. С.* Асимптотические свойства квантовой динамики в ограниченных областях на различных масштабах времени // Изв. РАН. Сер. матем., 2012, 76(1) (2012), 43-84.
27. *Воронин С. М., Карацуба А. А.* Дзета-функция Римана // М. : Физматлит, 1994. 376 с.
28. *Мамфорд Д.* Лекции о тэта-функциях // М.: Мир, 1988. 448 с.
29. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики // М. : Наука, 1981. 512 с.
30. *Маслов В.П., Федорюк М.В.* Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики // М.: Наука, 1976. 296 с.
31. *Inoue K., Ohya M., Volovich I. V.* Semiclassical properties and chaos degree for the quantum baker's map // J.Math.Phys., 2002, 43, 734–755.
32. *Husimi K.* Some formal properties of the density matrix // Proceedings of the Physico-Mathematical Society of Japan, 1940, *22,* 264-314.
33. *Hillery M., O'Connel R.F., Scully M. O., Wigner E.P.* Distributions functions in physics: fundamentals // Phys.Reports, 1984, 106(3), 121–167.
34. *Козлов В. В., Смолянов О. Г.* Функция Вигнера и диффузия в бесстолкновительной среде, состоящей из квантовых частиц // ТВП, 2007, 51(1), 109–125.
35. *Волович И. В.* Проблема необратимости и функциональная формулировка классической механики // Вестник СамГУ, 2008, 8/1, 35–55.
36. *Volovich I. V.* Randomness in Classical Mechanics and Quantum Mechanics // Found.Phys., 2011, 41(3), 516-528; arXiv: 0910.5391v1 [quant-ph].

37. *Mikhailov A.I.* Functional mechanics: Evolution of the moments of distribution function and the Poincare recurrence theorem // p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications, 2011, 3(3), 205–211.
38. *E. V. Piskovskiy and I. V. Volovich,* On the correspondence between Newtonian and functional mechanics // In book: Accardi L. et al. (eds.) Quantum Bio-Informatics IV, World Scientific, Singapore, 2011, 363–372.
39. *Piskovskiy E. V.* On functional approach to classical mechanics // p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications, 2011, 3(3), 243–247.
40. *Trushechkin A. S., Volovich I. V.* Functional classical mechanics and rational numbers // P-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications, 2009, 1(4), 365–371.

ASYMPTOTIC PROPERTIES OF DYNAMICS OF COHERENT QUANTUM STATES IN BOUNDED DOMAINS AT VARIOUS TIME SCALES

A.S. Trushechkin

Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences

trushechkin@mi.ras.ru

Received 17.09.2012

We construct coherent quantum states for a particle in an infinite well. We study a specific semiclassical limit of the dynamics of coherent quantum states on a circle and in an infinite well, as the Planck constant tends to zero and time tends to infinity. Our results describe the dynamics of coherent states on the circle and in the infinite well at all time scales in the semiclassical approach. They give detailed information about all stages of quantum evolution in the semiclassical limit. In particular, we rigorously justify the fact that the spatial distribution of a wave packet is most often close to the uniform distribution. This fact was previously known only from numerical experiments.