ДИНАМИКА ИСКРИВЛЕННЫХ ВИХРЕЙ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКИХ МОДЕЛЯХ ТЕОРИИ ПОЛЯ

А.А. Кожевников

Институт математики СО РАН,
Новосибирский государственный университет
kozhev@math.nsc.ru

Поступила 21.05.2009

Дан обзор динамики искривленных вихрей в нерелятивистских моделях теории поля - абелевой модели Хиггса (АМХ) и модели Голдстоуна. В основу подхода положено разложение по числу производных в эффективном действии для локальных и глобальных вихрей (струн). Исследована роль возбуждений модуля и фазы скалярного поля и возбуждений калибровочного поля, испускаемых и поглощаемых вихрем. Их учет необходим для получения эффективного действия для вихрей, конечного на больших расстояниях. Получены и решены уравнения движения указанных типов вихрей в случае больших и малых смещений контура. В рамках АМХ рассмотрено поведение спиральности калибровочного поля, формирующего вихрь, при его конечной толщине. Обсуждаются вклады в спиральность и динамика таких топологических характеристик как *твист* и *райзинг.*

УДК 538.94:514.8

Yes, 60 years later we are still working hard on vortices.
P. Ao [1]

1. Введение

Протяженные объекты в виде вихрей широко обсуждаются в физике конденсированного состояния [1, 2, 3]. Аналогичные им классические вихревые решения в моделях теории поля известны как локальные (калибровочные) струны [4]. Наряду со своими глобальными аналогами[1] они рассматриваются и в космологическом контексте как космические струны, возможно, оставшиеся после периода фазовых переходов в ранней Вселенной [5, 6, 7, 8]. Моделирование показывает, что значительная доля космических струн (около 20%) может быть замкнутыми [9]. Для анализа динамики космических струн используются релятивистские уравнения движения, выведенные из действия Намбу-Гото (НГ) [6]

$$S_{NG} \propto \int d^2 s \sqrt{-X'^2 \dot{X}^2 + (X' \dot{X})^2},$$

[1]Термины "локальные" и "глобальные" вихри указывают на классические решения в моделях со спонтанным нарушением локальной и глобальной калибровочной симметрии, соответственно.

где штрих, точка обозначают соответственно дифференцирование по параметру контура, собственному времени. Как следствие, динамика поперечного движения характеризуется световыми скоростями. В то время как для фундаментальных струн такая особенность не является вызывающей, реальные протяженные объекты, которые, возможно, рождаются в фазовых переходах, имеют конечную плотность на единицу длины, и для них не запрещен и, по-видимому, более естественным является нерелятивистский режим. Однако нерелятивистский предел уравнений движения, полученных из действия НГ [10], не воспроизводит известного закона гидродинамического вихревого движения, гласящего, что центр вихря движется с локальной скоростью жидкости. Вместе с тем обстоятельством, что механизм формирования топологических дефектов Киббла-Зурека [11, 12] не исключает нерелятивистской динамики космических струн, указанный недостаток нерелятивистского предела действия НГ заставляет вновь вернутся к выводу уравнений движения локальной и глобальной вихрей в нерелятивистских моделях теории поля.

В настоящей работе дан обзор подхода к вихревой динамике, основанного на уравнениях движения локального (калибровочного) вихря, выведенных из эффективного действия нерелятивистской абелевой модели Хиггса (АМХ) с учетом обмена возбуждениями между различными участками искривленного контура [13]. Случай вихря в глобальной модели получается отсюда в пределе нулевой калибровочной константы связи. Проведен учет как фоновых полей, так и возбуждений. Оба вклада необходимы для получения эффективного действия, не содержащего расходимости на большом расстоянии в случае калибровочного вихря[2]. Рассмотрение проведено в трехмерной ситуации. Источником вихревых конфигураций является сингулярная фаза скалярного поля [2]. Это позволяет проследить в вычислениях за всеми существенными степенями свободы, не обращаясь к формализму вспомогательных антисимметричных тензорных полей, принятому в дуальной формулировке динамики струн в физике элементарных частиц.

Вообще говоря, пространство параметров АМХ и её глобального варианта, называемого моделью Голдстоуна [15], содержит целый спектр возможных физических ситуаций, включающий как известные примеры вихрей из физики конденсированного состояния с группой симметрии U(1), так и возможные возможные вихревые решения, в которых эта группа является подгруппой более широкой группы симметрии. Статические вихревые решения в физике конденсированного состояния характеризуются лондоновской глубиной проникновения λ_L и длиной когерентности ξ. Эти величины даны ниже в основном тексте статьи. Локальные и глобальные струны в физике элементарных частиц и космологии характеризуются массами калибровочных и хиггсовых бозонов m_V и m_H. Перевод с одного языка на другой осуществляется с помощью соответствия $\lambda_L \to \hbar / m_V c$ и $\xi \to \hbar / m_H c$. Здесь и далее $\hbar$ и c означают соответственно постоянную Планка и скорость света.

В текущей литературе активно обсуждается геометрия и топология замкнутых кривых в приложении к задачам гидродинамики и магнитной гидродинамики. В частности, рассматривается роль таких характеристик контуров и полос как число зацепления (linking number Lk), райзинг (writhe Wr) и твист (twist Tw) [22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30]. Вихревые решения в различных моделях теории поля также могут быть проанализированы с этой точки зрения, что и проделано в настоящей работе. При этом специальное внимание уделено эффектам конечной толщины калибровочного вихря при вычис-

[2] Отметим, что ранее попытка учета вклада возбуждений была предпринята в работе [14]. Однако в эффективном действии, полученном в указанной работе, во-первых, не учтен вклад фоновых полей, которые абсолютно существенны в статическом случае. Во-вторых, рассмотрение проведено в квази-двумерной ситуации (прямые вихри). В-третьих, из действия не были выведены уравнения движения. В работе [13] и в настоящей работе эти пробелы восполнены.

лении магнитной спиральности и её связи с топологическими характеристиками замкнутого вихря, не инвариантного относительно зеркальных отражений [16, 17, 18] [3]. Было показано [31, 32], что динамика таких конфигураций может быть существенна при анализе динамики фермионных зарядов в ранней вселенной.

2. Нерелятивистская калибровочная модель

Динамика вихрей будет рассматриваться здесь на основе нерелятивистской абелевой модели Хиггса (АМХ), статическая часть которой буквально соответствует теории Гинзбурга-Ландау сверхпроводников II рода. Будем работать в лондоновском пределе, когда глубина проникновения λ_L много больше длины когерентности ξ. [См. ниже (11) и (38) для определения этих параметров.] В этом пределе конфигурация калибровочного поля возникает за счет сингулярной фазы χ_s параметра порядка (поля Хиггса) ψ [2], которая подчиняется уравнению

$$[\nabla\times\nabla]\chi_s = 2\pi\sum_a n_a \int d\sigma_a \mathbf{X}'_a \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{X}_a). \tag{1}$$

a нумерует контуры, заданные векторами $\mathbf{X}_a \equiv \mathbf{X}_a(t,\sigma_a)$, n_a суть число квантов потока, захваченных вихрем a. Здесь и далее штрих означает дифференцирование по параметру контура σ_a, а векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ будет обозначаться как $[\mathbf{a}\times\mathbf{b}]$. Поскольку длина сегмента вихря между точками σ_{ai} и σ_{af} равна $l=\int_{\sigma_{ai}}^{\sigma_{af}}|\mathbf{X}'_a|\,d\sigma_a$, естественно выбрать σ_a так, чтобы выполнялось калибровочное условие

$$\mathbf{X}_a'^2 = 1. \tag{2}$$

Далее для краткости пределы интегрирования по контурному параметру будут опускаться. Действие модели имеет вид

$$S = \int d^4x \left\{ \frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2-\mathbf{H}^2) - \frac{g}{2}(|\psi|^2 - n_0)^2 + \frac{1}{2}[\psi^*(i\hbar\partial_t - q\varphi + qa_0)\psi + \text{c.c.}] - \right.$$
$$\left. \frac{1}{2m}\left|\left(-i\hbar\nabla - \frac{q}{c}\mathbf{A} + \frac{q}{c}\mathbf{a}\right)\psi\right|^2 - \rho_0\varphi \right\}. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{E} = -\partial_t\mathbf{A}/c - \nabla\varphi$ и $\mathbf{H} = \nabla\times\mathbf{A}$ суть напряженности электрического и магнитного полей, φ-кулоновский потенциал, $q=2e$ и $m=2m_e$ обозначают заряд и массу скалярного поля в терминах электронных величин, n_0 и ρ_0 есть плотность скалярного конденсата (плотность куперовских пар) и однородного положительного фона заряда, нужного для обеспечения электрической нейтральности системы:

$$\rho_0 + qn_0 = 0. \tag{4}$$

4-вектор $a_\mu = (a_0, \mathbf{a}) = -\dfrac{\hbar c}{q}\partial_\mu\chi_s$ представляет собой градиент сингулярной фазы. Ему соответствует тензор напряженности, $f_{\mu\nu} = \partial_\mu a_\nu - \partial_\nu a_\mu \equiv (\mathbf{E}_s, \mathbf{H}_s)$, где сингулярные части напряженностей электрического и магнитного поля записываются как

$$\mathbf{E}_s = -\frac{\Phi_0}{c}\sum_a n_a \int d\sigma_a [\dot{\mathbf{X}}_a \times \mathbf{X}'_a]\delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{X}_a),$$
$$\mathbf{H}_s = \Phi_0 \sum_a n_a \int d\sigma_a \mathbf{X}'_a \delta^{(3)}(\mathbf{x}-\mathbf{X}_a). \tag{5}$$

Здесь и далее точка над обозначением величины означает дифференцирование по времени,

[3] Поправки на конечную толщину вихря к уравнениям движения калибровочных вихрей рассматривались в работах [19, 20, 21].

$$\Phi_0 = \frac{2\pi\hbar c}{q}$$

есть величина кванта магнитного потока.

Удобно использовать как полное Фурье-представление по $k = (\omega, \mathbf{k})$,

$$b_k \equiv b(\omega, \mathbf{k}) = \int d^4 x e^{i\omega t - i\mathbf{kx}} b(t, \mathbf{x}),$$

$$b(t, \mathbf{x}) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-i\omega t + i\mathbf{kx}} b_k, \tag{6}$$

так и смешанное по $(t, \mathbf{k})$, определяемое соответственно. Величины $a_\mu(t, \mathbf{k})$, найденные из смешанных Фурье-компонент напряженностей, имеют вид

$$\mathbf{a}_\mathbf{k}(t) = i\frac{\Phi_0}{\mathbf{k}^2}\sum_a n_a \int d\sigma_a [\mathbf{k} \times \mathbf{X}'_a] e^{-i\mathbf{kX}_a}, \tag{7}$$

$$a_{0\mathbf{k}}(t) = -i\frac{\Phi_0}{c\mathbf{k}^2}\sum_a n_a \int d\sigma_a \mathbf{k}[\dot{\mathbf{X}}_a \times \mathbf{X}'_a] e^{-i\mathbf{kX}_a}. \tag{8}$$

При их вычислении было учтено соотношение

$$\partial_t \int d\sigma \mathbf{X}' e^{-i\mathbf{kX}} = i\int d\sigma [\mathbf{k} \times [\dot{\mathbf{X}} \times \mathbf{X}']] e^{-i\mathbf{kX}}, \tag{9}$$

проверяемое непосредственным дифференцированием, с учетом того, что граничные члены выпадают тождественно для замкнутого контура. Для открытого контура ими можно пренебречь в случае пиннинга открытых концов или их ухода на бесконечность. Далее эти условия будут молчаливо предполагаться.

Сначала перепишем действие (3) в терминах модуля и фазы скалярного поля $\psi = n^{1/2} e^{i\chi}$. Затем разложим конфигурацию полей на вклад фона и флуктуаций, $\varphi \to \varphi + \delta\varphi$, $\mathbf{A} \to \mathbf{A} + \delta\mathbf{A}$, $n \to n_0 + \delta n$, $\chi \to \delta\chi$. Тогда (3) представится в виде суммы вкладов фоновых полей S_{bg} и флуктуаций S_{f}. Рассмотрение флуктуаций отложим до раздела 3. В лондоновском пределе, где модуль скалярного поля n_0 считается константой, S_{bg} записывается в виде

$$S_{\mathrm{bg}} = \int d^4 x \left[\frac{1}{8\pi}(\mathbf{E}^2 - \mathbf{H}^2) - \frac{1}{8\pi\lambda_L^2}(\mathbf{A} - \mathbf{a})^2 + n_0 q a_0 \right]. \tag{10}$$

Член с φ выпадает в силу (4). Здесь и далее

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{mc^2}{4\pi n_0 q^2}} \tag{11}$$

обозначает лондоновскую глубину проникновения. Условия исчезновения членов, линейных по $\delta\mathbf{A}$ и $\delta\varphi$, дают уравнения Максвелла и закон Гаусса для фоновых полей

$$[\nabla \times \mathbf{H}] + \frac{1}{\lambda_L^2}\mathbf{A} = \frac{1}{\lambda_L^2}\mathbf{a} + \frac{1}{c}\partial_t \mathbf{E}, \tag{12}$$

$$\nabla \mathbf{E} = 4\pi(n_0 q + \rho_0) = 0, \tag{13}$$

тогда как из условия исчезновения членов, линейных по вариации фазы $\delta\chi$, следует соотношение

$$\nabla(\mathbf{A} - \mathbf{a}) = 0. \tag{14}$$

Оно автоматически удовлетворяется в кулоновской калибровке. В нерелятивистском случае можно пренебречь током смещения и, следовательно, запаздыванием. Вариацию по δn проводить не нужно, поскольку с самого начала рассматривается однородный конденсат $n = n_0$ всюду кроме линий сингулярной фазы. С помощью выражения $\mathbf{H}_\mathbf{k} = i[\mathbf{k}\times\mathbf{A}_\mathbf{k}]$ можно решить уравнение (12) в смешанном $(t,\mathbf{k})$ Фурье-представлении:

$$\mathbf{A}_\mathbf{k} = \frac{1/\lambda_L^2}{\mathbf{k}^2 + 1/\lambda_L^2}\mathbf{a}_\mathbf{k} = \frac{i\Phi_0/\lambda_L^2}{\mathbf{k}^2(\mathbf{k}^2 + 1/\lambda_L^2)}\sum_a n_a \int d\sigma_a [\mathbf{k}\times\mathbf{X}'_a] e^{-i\mathbf{k}\mathbf{X}_a}. \tag{15}$$

Комбинация

$$\mathbf{A}_\mathbf{k} - \mathbf{a}_\mathbf{k} = -\frac{i\Phi_0}{\mathbf{k}^2 + 1/\lambda_L^2}\sum_a n_a \int d\sigma_a [\mathbf{k}\times\mathbf{X}'_a] e^{-i\mathbf{k}\mathbf{X}_a}, \tag{16}$$

входящая в (10), содержит только вклад, экспоненциально спадающий на больших расстояниях. Фурье-амплитуды напряженностей имеют вид

$$\mathbf{H}_\mathbf{k} = \frac{\Phi_0/\lambda_L^2}{\mathbf{k}^2 + 1/\lambda_L^2}\sum_a n_a \int d\sigma_a \mathbf{X}'_a e^{-i\mathbf{k}\mathbf{X}_a}, \tag{17}$$

$$\mathbf{E}_\mathbf{k} = -\frac{\Phi_0/(c\lambda_L^2)}{\mathbf{k}^2 + 1/\lambda_L^2}\sum_a n_a \int d\sigma_a e^{-i\mathbf{k}\mathbf{X}_a}\left\{[\dot{\mathbf{X}}_a\times\mathbf{X}'_a] - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}[\dot{\mathbf{X}}_a\times\mathbf{X}'_a])}{\mathbf{k}^2}\right\}. \tag{18}$$

Оба выражения поперечны: $\mathbf{k}\cdot\mathbf{E}_\mathbf{k} = 0$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{H}_\mathbf{k} = 0$. Из выражения

$$\mathbf{E}_\mathbf{k} = -\frac{1/(c\lambda_L^2)}{\mathbf{k}^2 + 1/\lambda_L^2}\dot{\mathbf{a}}_\mathbf{k} - i\mathbf{k}\varphi_\mathbf{k}$$

и уравнения (13) следует, что $\varphi_\mathbf{k} = 0$.

Запишем выражение для действия фоновых полей в терминах $\mathbf{X}_a \equiv \mathbf{X}_a(t,\sigma_a)$, ограничившись с этого момента случаем одного контура с единичным квантом потока. Обозначим $\mathbf{X}_{1,2} \equiv \mathbf{X}(\sigma_{1,2})$, $\mathbf{X}_{12} \equiv \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$, где точки $\sigma_{1,2}$ принадлежат одному и тому же контуру. С учетом (16), (17) и (18) получим

$$S_{\mathrm{bg}} = \frac{\Phi_0^2}{8\pi}\int dt \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\frac{1/\lambda_L^2}{k^2 + 1/\lambda_L^2}\right)^2 \int d\sigma_1 d\sigma_2 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{X}_{12}}\left\{\frac{1}{c^2}\Big([\dot{\mathbf{X}}_1\times\mathbf{X}'_1][\dot{\mathbf{X}}_2\times\mathbf{X}'_2] - \right.$$
$$\left.\frac{(\mathbf{k}[\dot{\mathbf{X}}_1\times\mathbf{X}'_1])(\mathbf{k}[\dot{\mathbf{X}}_2\times\mathbf{X}'_2])}{\mathbf{k}^2}\Big) - (\mathbf{X}'_1\mathbf{X}'_2)(1+\lambda_L^2\mathbf{k}^2)\right\} + n_0 q\int d^4x a_0. \tag{19}$$

Заметим, что член с a_0 в (19), на первый взгляд, может быть отброшен, поскольку

$$\int d^3x a_0 = -\frac{\Phi_0}{4\pi c}\int d\sigma[\dot{\mathbf{X}}\times\mathbf{X}']\left(\int d^3x \nabla\frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{X}|}\right) = 0.$$

Однако его вариация по $\mathbf{X}(\sigma,t)$ отлична от нуля и, как будет показано в разделе 4, даст в результате поперечную силу, аналогичную силе Магнуса.

Получим разложение действия по малому параметру $\kappa^2\lambda_L^2$, где через $\kappa = |\mathbf{X}''|$ обозначена кривизна контура. Основной вклад дают соседние точки контура $\sigma_2 = \sigma_1 + z$, $z \ll \sigma_1$, поэтому можно применить разложение по числу производных

$$\mathbf{X}_2 = \mathbf{X}_1 + z\mathbf{X}'_1 + \frac{z^2}{2}\mathbf{X}''_1 + \frac{z^3}{6}\mathbf{X}'''_1 + \cdots,$$

$$\mathbf{X}_{21} = z\mathbf{X}'_1 + \frac{z^2}{2}\mathbf{X}''_1 + \frac{z^3}{6}\mathbf{X}'''_1 + \cdots,$$

$$\mathbf{X}'_2 = \mathbf{X}'_1 + z\mathbf{X}''_1 + \frac{z^2}{2}\mathbf{X}'''_1 + \cdots,$$

$$|\mathbf{X}_{21}| = |z|\left(1 - \frac{z^2}{24}\kappa^2 + \cdots\right). \tag{20}$$

При получении последней строки в (20) были использованы соотношения

$$\mathbf{X}' \cdot \mathbf{X}''' = -\mathbf{X}''^2 = -\kappa^2,\ \mathbf{X}' \cdot \mathbf{X}'' = 0,$$

которые можно вывести из уравнений Френе-Серре [33]

$$\begin{aligned} \mathbf{X}'' &= \kappa \mathbf{n} \\ \mathbf{n}' &= -\kappa \mathbf{X}' + \tau \mathbf{b} \\ \mathbf{b}' &= -\tau \mathbf{n}. \end{aligned} \tag{21}$$

Здесь τ обозначает кручение контура, а $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ суть векторы нормали и бинормали, соответственно. Векторы $(\mathbf{n}, \mathbf{b}, \mathbf{X}')$ образуют правую тройку ортонормированных векторов, так что $\mathbf{X}' = [\mathbf{n} \times \mathbf{b}]$. С помощью уравнений (21) можно проверить, что приближенные разложения по z не нарушают условия калибровки $\mathbf{X}'^2 = 1$.

Действие фоновых полей можно представить в виде $S_{\mathrm{bg}} = S_{\mathrm{bg}}^{(0)} + \Delta S_{\mathrm{bg}}$, где

$$S_{\mathrm{bg}}^{(0)} = \frac{\Phi_0^2}{8\pi} \int dt \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \left(\frac{1/\lambda_L^2}{k^2 + 1/\lambda_L^2} \right)^2 \int d\sigma_1 d\sigma_2 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{X}_{12}} \times$$

$$\left\{ [\dot{\mathbf{X}}_1 \times \mathbf{X}_1'] \cdot [\dot{\mathbf{X}}_2 \times \mathbf{X}_2'] / c^2 - (\mathbf{X}_1' \mathbf{X}_2')(1 + \lambda_L^2 \mathbf{k}^2) \right\} + n_0 q \int d^4x a_0, \tag{22}$$

не содержит расходимости на больших расстояниях, тогда как

$$\Delta S_{bg} = -\frac{\Phi_0^2}{8\pi c^2} \int dt \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3 \mathbf{k}^2} \left(\frac{1/\lambda_L^2}{k^2 + 1/\lambda_L^2} \right)^2 \int d\sigma_1 d\sigma_2 e^{-i\mathbf{k}\mathbf{X}_{12}} (\mathbf{k}[\dot{\mathbf{X}}_1 \times \mathbf{X}_1']) \times$$

$$(\mathbf{k}[\dot{\mathbf{X}}_2 \times \mathbf{X}_2']) \tag{23}$$

расходится ввиду множителя $1/\mathbf{k}^2$ под знаком интеграла. Ниже будет показано, что такой же расходящийся на больших расстояниях вклад с противоположным знаком возникает благодаря обмену возбуждениями между различными точками вихря. Поэтому отложим вычисление членов $\propto 1/\mathbf{k}^2$ до раздела 3. Выполнив в (22) интегрирование по $\mathbf{k}$, получим

$$S_{bg}^{(0)} = \frac{\Phi_0^2}{32\pi^2 \lambda_L^2} \int dt d\sigma_1 d\sigma_2 e^{-|\mathbf{X}_{21}|/\lambda_L} \left\{ \frac{[\dot{\mathbf{X}}_1 \times \mathbf{X}_1'][\dot{\mathbf{X}}_2 \times \mathbf{X}_2']}{2c^2 \lambda_L} - \frac{(\mathbf{X}_1' \mathbf{X}_2')}{|\mathbf{X}_{21}|} \right\} +$$

$$+ n_0 q \int d^4x a_0. \tag{24}$$

Подынтегральное выражение в (24) нелокально по параметру контура σ. Получим приближенно локальное выражение, взяв $\int d\sigma_1 \int d\sigma_2 \approx \int d\sigma_1 \int_{-\infty}^{\infty} dz$ и проинтегрировав по z:

$$S_{bg}^{(0)} = \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L} \right)^2 \int dt d\sigma \left\{ \frac{1}{2c^2} \left([\dot{\mathbf{X}} \times \mathbf{X}']^2 - \lambda_L^2 [\dot{\mathbf{X}} \times \mathbf{X}']'^2 \right) - \right.$$

$$\left. \mathbf{X}'^2 \left(\ln \frac{\lambda_L}{\xi} - C - \frac{13}{24} \lambda_L^2 \kappa^2 \right) \right\} + n_0 q \int d^4x a_0. \tag{25}$$

Здесь и далее $C = 0.577215....$-постоянная Эйлера, а член с $\ln \lambda_l / \xi$ возникает в силу известного способа регуляризации

$$\int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{e^{-|z|/\lambda_L}}{|z|} \to 2 \int_{\xi}^{\infty} \frac{dz}{z} e^{-z/\lambda_L} \approx 2 \left(\ln \frac{\lambda_L}{\xi} - C \right), \tag{26}$$

когда нижний предел интегрирования по поперечному расстоянию в вихревом профиле заменяется на длину когерентности. Вклад, пропорциональный $\ln \lambda_L / \xi$, в случае пренебрежения членом с высшими производными $\propto \kappa^2$, есть просто известное выражение для энергии вихря на единицу длины [2]:

$$\varepsilon_{\mathrm{v}} \approx \left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L}\right)^2 \ln\frac{\lambda_L}{\xi}. \qquad (27)$$

Подчеркнем, что приближенная локальная форма действия (25) [наряду с поправкой (49)] не может быть использована для вывода уравнений движения. Как будет показано в разделе 4, конечность профиля полей, формирующих вихрь, существенна при варьировании действия.

3. Флуктуации над фоном и их вклад в действие

Найдем вклад в эффективное действие от возбуждений (флуктуаций) модуля параметра порядка δn, его фазы $\delta\chi$, кулоновского $\delta\varphi$ и векторного $\delta\mathbf{A}$ потенциалов. Для этого запишем их действие $S_{\mathrm{f}} = S_{\mathrm{f}}^{(0)} + S_{\mathrm{f}}^{(1)}$, где

$$S_{\mathrm{f}}^{(0)} = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} f^T M f - \frac{1}{8\pi}\delta\mathbf{A}\left(-\frac{1}{c^2}\partial_t^2 + \nabla^2 - \frac{1}{\lambda_L^2}\right)\delta\mathbf{A} + \delta n\left[q a_0 - \frac{q^2}{2mc^2}(\mathbf{A}-\mathbf{a})^2 \right]\right\}, \qquad (28)$$

$f^T = (\delta n, \delta\chi, \delta\varphi)$, а

$$S_{\mathrm{f}}^{(1)} = \frac{q\hbar}{mc}\int d^4x (\mathbf{A}-\mathbf{a})\delta n\left(\nabla\delta\chi - \frac{q}{\hbar c}\delta\mathbf{A}\right). \qquad (29)$$

Матрица M записывается как

$$\begin{pmatrix} \frac{\hbar^2}{4mn_0}\nabla^2 - g & -\hbar\partial_t & -q \\ \hbar\partial_t & \frac{\hbar^2 n_0}{m}\nabla^2 & 0 \\ -q & 0 & -\frac{1}{4\pi}\nabla^2 \end{pmatrix}. \qquad (30)$$

Вкладом слагаемого $q^2(\mathbf{A}-\mathbf{a})^2/2mc^2$ можно пренебречь, поскольку он дает члены с высшими производными вида $\iiiint d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 d\sigma_4 X_1' X_2' X_3' X_4'$, или $\iiint d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 \dot{X}_1 X_1' X_2' X_3'$. Учет $S_{\mathrm{f}}^{(1)}$ приводит к вкладам с высшими производными, см. ниже. Производящий функционал $Z[j]$, нужный для вычисления вклада возбуждений, записывается в виде функционального интеграла [34]

$$Z[j] = \int D[\delta n]D[\delta\chi]D[\delta\varphi]D[\delta\mathbf{A}]\exp[\frac{i}{\hbar}\widetilde{S_{\mathrm{f}}}] \qquad (31)$$

где $\widetilde{S_{\mathrm{f}}} = S_{\mathrm{f}}^{(0)} + \int d^4x (j_f^T f + j_{\mathbf{A}}\delta\mathbf{A})$ включает внешние токи $j^T = (j_n, j_\chi, j_\varphi)$ и $j_{\mathbf{A}}$. Члены, фиксирующие калибровку, здесь не выписаны, поскольку для целей настоящей работы они не существенны. Снова перейдем в импульсное представление по $k = (\omega, \mathbf{k})$, что позволит выразить меру функционального интегрирования по функциям $f(x)$ в терминах их Фурье-амплитуд:

$$D[f] = \prod_k \frac{d\mathrm{Re} f_k d\mathrm{Im} f_k}{2\pi}.$$

Функциональный интеграл гауссов, а матрица, M^{-1}, необходимая для его вычисления, в импульсном представлении имеет вид

$$M^{-1}=\left(\frac{\varepsilon_B^2(\mathbf{k})}{\hbar^2}+\frac{c^2}{\lambda_L^2}-\omega^2-i0\right)^{-1}\begin{pmatrix} -\frac{n_0}{m}\mathbf{k}^2 & -\frac{i\omega}{\hbar} & -\frac{4\pi n_0 q}{m} \\ \frac{i\omega}{\hbar} & -\frac{m}{\hbar^2\mathbf{k}^2 n_0}\left(\frac{\varepsilon_B^2}{\hbar^2}+\frac{c^2}{\lambda_L^2}\right) & \frac{4\pi i\omega q}{\hbar\mathbf{k}^2} \\ -\frac{4\pi n_0 q}{m} & -\frac{4\pi i\omega q}{\hbar\mathbf{k}^2} & \frac{4\pi}{\mathbf{k}^2}\left(\frac{\varepsilon_B^2}{\hbar^2}-\omega^2\right) \end{pmatrix}. \quad (32)$$

С помощью этого выражения находим, что $Z[j]=\exp\frac{i}{\hbar}\Delta\tilde{S}_{\mathrm{f}}$, где

$$\Delta\tilde{S}_{\mathrm{f}}=i\hbar\ln\det M+\frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left\{\left(\frac{\varepsilon_B^2}{\hbar^2}+\frac{c^2}{\lambda_L^2}-\omega^2-i0\right)^{-1}\times\right.$$

$$\left[\frac{n_0\mathbf{k}^2}{m}|(j_n)_k+qa_{0k}|^2+\frac{m|(j_\chi)_k|^2}{\hbar^2\mathbf{k}^2 n_0}\left(\frac{\varepsilon_B^2}{\hbar^2}+\frac{c^2}{\lambda_L^2}\right)-\frac{4\pi|(j_\varphi)_k|^2}{\mathbf{k}^2}\left(\frac{\varepsilon_B^2}{\hbar^2}-\omega^2\right)+\right.$$

$$\frac{i\omega}{\hbar}[(j_n+qa_0)_k^*(j_\chi)_k-\mathrm{c.c.}]+\frac{4\pi n_0 q}{m}[(j_n+qa_0)_k^*(j_\varphi)_k+\mathrm{c.c.}]+$$

$$\left.\left.\frac{4\pi i\omega}{\hbar\mathbf{k}^2}[(j_\chi)_k^*(j_\varphi)_k+c.c.]\right]+\frac{4\pi|(\mathbf{j}_{\mathbf{A}})_k|^2}{\mathbf{k}^2+\frac{1}{\lambda_L^2}-\frac{\omega^2}{c^2}-i0}\right\}. \quad (33)$$

Здесь

$$\varepsilon_B^2\equiv\varepsilon_B^2(\mathbf{k})=\left(\frac{\hbar^2\mathbf{k}^2}{2m}\right)^2+\hbar^2c_s^2\mathbf{k}^2 \quad (34)$$

есть квадрат боголюбовского спектра [35] со скоростью звука

$$c_s=\sqrt{\frac{n_0 g}{m}}. \quad (35)$$

Добавка $-i0$ гарантирует появление причинных функций Грина после взятия вариационных производных по j. Корреляционные функции вычисляются как

$$\langle f_{k_1}^{(1)}f_{k_2}^{(2)*}\cdots\rangle=Z^{-1}[0]\left(-2i\hbar\frac{\delta}{\delta j_{k_1}^{(1)*}}\right)\left(-2i\hbar\frac{\delta}{\delta j_{k_2}^{(2)}}\right)\cdots Z[j]|_{j=0}. \quad (36)$$

Расходящаяся константа $\ln\det M$ выпадает из выражений (36).

Для выяснения смысла полюсов по ω в (32) рассмотрим свободно распространяющиеся возбуждения. Их уравнения движения получаются из условий равенства нулю вариационных производных:

$$0=\hbar\partial_t\delta\chi+g\delta n+q\delta\varphi-\frac{\hbar^2}{4mn_0}\nabla^2\delta n,$$

$$0=\partial_t\delta n+\frac{\hbar n_0}{m}\nabla^2\delta\chi,$$

$$0=\nabla^2\delta\varphi+4\pi q\delta n. \quad (37)$$

Действуя оператором ∇^2 на первое из уравнений (37) и используя второе и третье уравнения, получим

$$\left(-\partial_t^2 + c_s^2\nabla^2 - \frac{c^2}{\lambda_L^2} - \frac{\hbar^2}{4m^2}\nabla^4\right)\delta n = 0.$$

Решение этого уравнения в виде плоских волн приводит к закону дисперсии

$$\omega^2 \equiv \omega_{\mathbf{k}}^2 = \frac{c^2}{\lambda_L^2} + \frac{\varepsilon_B^2(\mathbf{k})}{\hbar^2}$$

с частотой, являющейся полюсом матрицы M^{-1}. Такой же закон дисперсии выполняется и для распространяющихся флуктуаций фазы $\delta\chi$. В статическом пределе и в пренебрежении вкладом калибровочного поля находим, что пространственные флуктуации модуля скалярного поля затухают на длине когерентности

$$\xi = \frac{\hbar}{2(mn_0 g)^{1/2}}. \tag{38}$$

С учетом (35) отсюда получим соотношение

$$\xi = \frac{\hbar}{2mc_s}. \tag{39}$$

Вклад слагаемого (29) можно оценить с помощью (33). Соответствующая поправка к эффективному действию равна

$$\Delta S_{\mathrm{eff}}^{(1)} = -\frac{q^3 n_0}{4m^2\hbar^2}\int\frac{d^4k_1 d^4k_2}{(2\pi)^8}(\mathbf{A}-\mathbf{a})^*_{k_1+k_2}\,\omega_1\mathbf{k}_1\mathbf{k}_2^2 a_{0k_1}a_{0k_2}\left(\frac{\varepsilon_B^2(\mathbf{k}_1)}{\hbar^2} + \frac{c^2}{\lambda_L^2} - \omega_1^2 - i0\right)^{-1}\times$$
$$\left(\frac{\varepsilon_B^2(\mathbf{k}_2)}{\hbar^2} + \frac{c^2}{\lambda_L^2} - \omega_2^2 - i0\right)^{-1}.$$

Используя (8) и (16) можно видеть, что вследствие множителя ω_1 в подынтегральном выражении поправка содержит члены $\int d\sigma_1 d\sigma_2 d\sigma_3 X_1' X_2' \ddot{X}_3 X_3'$ и приведет к вкладам с третьими производными по времени в уравнениях движения вихря. Для достаточно плавной эволюции контура их вкладом можно пренебречь. На этом основании член (29) можно не учитывать.

Поправка за счет флуктуаций получается из (33) при $j_n = 0, j_\chi = 0, j_\phi = 0$ и отбрасывании члена $\ln\det M$:

$$\Delta S_{\mathrm{f}} = \frac{1}{2}\int\frac{d^4k}{(2\pi)^4}\left(\frac{\varepsilon_B^2}{\hbar^2} + \frac{c^2}{\lambda_L^2} - \omega^2 - i0\right)^{-1}\frac{n_0 q^2}{m}|a_{0k}|^2\,\mathbf{k}^2, \tag{40}$$

где $a_{0k} = \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i\omega t} a_{0\mathbf{k}}(t)$, выражение для $a_{0\mathbf{k}}(t)$ дается формулой (8). Получим явное выражение в случае медленного движения контура, используя теперь разложение по числу производных по времени

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\cdot\frac{|f_k|^2}{\omega^2 - \Omega_{\mathbf{k}}^2 + i0} = \int_{-\infty}^{\infty} dt d\tau\frac{d\omega}{2\pi}\frac{f_{\mathbf{k}}(t)f_{\mathbf{k}}^*(t+\tau)e^{i\omega\tau}}{\omega^2 - \Omega_{\mathbf{k}}^2 + i0} =$$
$$\int dt f_{\mathbf{k}}(t)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\omega}{2\pi}\frac{1}{\omega^2 - \Omega_{\mathbf{k}}^2 + i0}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{d^l f_{\mathbf{k}}^*}{dt^l}\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\frac{\tau^l}{l!}e^{i\omega\tau} =$$
$$\int dt f_{\mathbf{k}}(t)\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-i)^l}{l!}\frac{d^l f_{\mathbf{k}}^*}{dt^l}\left[\frac{\partial^l}{\partial\omega^l}\frac{1}{\omega^2 - \Omega_{\mathbf{k}}^2}\right]_{\omega=0} =$$

$$\int dt\left[-\frac{|f_{\mathbf{k}}(t)|^2}{\Omega_{\mathbf{k}}^2}-\frac{1}{2\Omega_{\mathbf{k}}^4}\left(f_{\mathbf{k}}\frac{\partial^2 f_{\mathbf{k}}^*}{\partial t^2}+\text{c.c.}\right)+\cdots\right],\tag{41}$$

справедливое в случае достаточно медленного изменения функции $f(t)$. Точки означают вклады высших производных. В рассматриваемом случае типичная $f_{\mathbf{k}}$ включает члены $\dot{\mathbf{X}}$. Поэтому $\partial^2 f_{\mathbf{k}}^*/\partial t^2$ приведет к появлению членов $\partial^3\mathbf{X}/\partial t^3$ и выше в уравнениях движения. Для того, чтобы ограничиться в уравнениях числом производных не выше второго порядка по времени, следует сохранить только первое слагаемое в разложении (41). Тогда вклад флуктуаций в действие, имеющий наименьшее число производных, запишется в виде

$$\Delta S_{\text{f}}=\frac{\Phi_0^2}{8\pi\lambda_L^2}\int dt d\sigma_1 d\sigma_2\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}_{21}}}{\dfrac{\hbar^2\mathbf{k}^4}{4m^2}+c_s^2\mathbf{k}^2+\dfrac{c^2}{\lambda_L^2}}\frac{(\mathbf{k}[\dot{\mathbf{X}}_1\times\mathbf{X}_1'])(\mathbf{k}[\dot{\mathbf{X}}_2\times\mathbf{X}_2'])}{\mathbf{k}^2}.\tag{42}$$

Из-за наличия в подынтегральном выражении множителя $1/\mathbf{k}^2$ действие ΔS_{f} логарифмически расходится при больших $\sigma_2-\sigma_1$. Аналогичная расходимость, но с противоположным знаком, уже встречалась в выражениях для действия фоновых полей (19), (23). Вводя обозначение $\Delta S_{\text{eff}}=\Delta S_{\text{bg}}+\Delta S_{\text{f}}$ для суммы расходящихся вкладов и принимая в расчет соотношение $4m^2c_s^2/\hbar^2=1/\xi^2$, получим выражение, удобное для интегрирования по импульсу:

$$\Delta S_{\text{eff}}=\frac{\Phi_0^2}{8\pi c^2}\int dt d\sigma_2 d\sigma_2[\dot{\mathbf{X}}_1\times\mathbf{X}_1']_i[\dot{\mathbf{X}}_2\times\mathbf{X}_2']_j\nabla_{21i}\nabla_{21j}I(\sigma_1,\sigma_2),$$

$$I(\sigma_1,\sigma_2)=\frac{\partial}{\partial\lambda_L^2}\left[\lambda_L^2\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{\mathbf{k}^2}-\frac{1}{\mathbf{k}^2+1/\lambda_L^2}\right)e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}_{21}}\right]-\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{k}\mathbf{X}_{21}}\times$$
$$\left[\frac{1}{\mathbf{k}^2}-\frac{\mathbf{k}^2+1/\xi^2}{\mathbf{k}^4+\mathbf{k}^2/\xi^2+1/\xi^2\lambda_s^2}\right].\tag{43}$$

Здесь $\nabla_{21i}=\partial/\partial X_{21i}$. Выражение (43) ясно демонстрирует сокращение вкладов, расходящихся при $|\mathbf{k}|\to 0$. Отметим возникновение нового масштаба длин

$$\lambda_s=\lambda_L\cdot\frac{c_s}{c}\ll\lambda_L\tag{44}$$

в динамическом случае. Выражения для $I(\sigma_1,\sigma_2)$ имеют вид

$$I(\sigma_1,\sigma_2)=-\frac{e^{-|\mathbf{X}_{21}|/\lambda_L}}{4\pi|\mathbf{X}_{21}|}\left(1+\frac{|\mathbf{X}_{21}|}{2\lambda_L}\right)+\frac{1}{8\pi|\mathbf{X}_{21}|}\left[e^{-|\mathbf{X}_{21}|\left(1-\sqrt{1-4\xi^2/\lambda_s^2}\right)^{1/2}/\xi\sqrt{2}}\times\right.$$
$$\left(1+\frac{1}{\sqrt{1-4\xi^2/\lambda_s^2}}\right)+e^{-|\mathbf{X}_{21}|\left(1+\sqrt{1-4\xi^2/\lambda_s^2}\right)^{1/2}/\xi\sqrt{2}}\times$$
$$\left.\left(1-\frac{1}{\sqrt{1-4\xi^2/\lambda_s^2}}\right)\right]\tag{45}$$

при $\xi\le\lambda_s/2$, и

$$I(\sigma_1,\sigma_2)=-\frac{e^{-|\mathbf{X}_{21}|/\lambda_L}}{4\pi|\mathbf{X}_{21}|}\left(1+\frac{|\mathbf{X}_{21}|}{2\lambda_L}\right)+\frac{1}{4\pi|\mathbf{X}_{21}|}e^{-|\mathbf{X}_{21}|\sqrt{1/2\xi\lambda_s+1/4\xi^2}}\times$$

$$\left[\cos\left(|\mathbf{X}_{21}|\sqrt{1/2\xi\lambda_s+1/4\xi^2}\right)+\frac{1}{\sqrt{4\xi^2/\lambda_s^2-1}}\times\right.$$
$$\left.\sin\left(|\mathbf{X}_{21}|\sqrt{1/2\xi\lambda_s+1/4\xi^2}\right)\right] \tag{46}$$

при $\xi>\lambda_s/2$. Они связаны аналитическим продолжением. С учетом масштаба λ_s пространство параметров модели разбивается на две области: $\lambda_s<\xi\ll\lambda_L$ и $\xi<\lambda_s\ll\lambda_L$. Для определенности сосредоточимся на последнем случае и будем считать, что $\xi\ll\lambda_s/2\ll\lambda_L$. Разлагая квадратный корень в (45), пренебрегая членами, экспоненциально малыми при $|\mathbf{X}_{21}|>\xi$ и применяя к полученному выражению $\nabla_{21i}\nabla_{21j}$, находим, что

$$\Delta S_{\mathit{eff}}=\frac{\Phi_0^2}{32\pi^2c^2}\int dt d\sigma_1 d\sigma_2[\dot{\mathbf{X}}_1\times\mathbf{X}_1']_i[\dot{\mathbf{X}}_2\times\mathbf{X}_2']_j\left\{-\frac{\delta_{ij}}{|\mathbf{X}_{21}|^3}\left[\left(1+\frac{|\mathbf{X}_{21}|}{\lambda_s}\right)e^{-|\mathbf{X}_{21}|/\lambda_s}-\right.\right.$$
$$\left.\left(1+\frac{|\mathbf{X}_{21}|}{\lambda_L}\right)e^{-|\mathbf{X}_{21}|/\lambda_L}\right]+\frac{\delta_{ij}}{2\lambda_L^2|\mathbf{X}_{21}|}e^{-|\mathbf{X}_{21}|/\lambda_L}+\frac{X_{21i}X_{21j}}{|\mathbf{X}_{21}|^5}\times$$
$$\left[\left(1+3\frac{|\mathbf{X}_{21}|}{\lambda_s}+\frac{\mathbf{X}_{21}^2}{\lambda_s^2}\right)e^{-|\mathbf{X}_{21}|/\lambda_s}-\left(1+3\frac{|\mathbf{X}_{21}|}{\lambda_L}+\frac{\mathbf{X}_{21}^2}{\lambda_L^2}\right)e^{-|\mathbf{X}_{21}|/\lambda_L}+\right.$$
$$\left.\left.\frac{\mathbf{X}_{21}^2}{2\lambda_L^2}\left(1+\frac{|\mathbf{X}_{21}|}{\lambda_L}\right)e^{-|\mathbf{X}_{21}|/\lambda_L}\right]\right\} \tag{47}$$

Снова используем разложение по числу производных по параметру контура. Вклады, пропорциональные δ_{ij}, содержат логарифмическую расходимость на малых расстояниях, которая регуляризуется обычным способом (26). С учетом другого регуляризованного соотношения

$$\int_\xi^\infty\frac{dz}{z^3}\left(1+\frac{z}{\lambda}\right)e^{-z/\lambda}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\xi^2}+\frac{C-\ln\lambda/\xi}{\lambda^2}\right) \tag{48}$$

можно убедиться в том, что члены $\propto\ln(\lambda_L/\xi)$ сокращаются, тогда как член $\propto\ln(\lambda_s/\xi)$ остается. Собирая все вместе, получаем поправку к эффективному действию, возникающую от суммы вкладов возбуждений и части (23) действия фоновых полей:

$$\Delta S_{\mathit{eff}}=\frac{\Phi_0^2}{32\pi^2c^2}\int dt d\sigma\left\{\left[\frac{1}{\lambda_s^2}\left(\ln\frac{\lambda_s}{\xi}-C\right)+\kappa^2\left(\ln\frac{\lambda_L}{\lambda_s}-\frac{1}{24}\right)\right][\dot{\mathbf{X}}\times\mathbf{X}']^2-\right.$$
$$\left.\left(\ln\frac{\lambda_L}{\lambda_s}+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}[\dot{\mathbf{X}}\times\mathbf{X}']\right)^2+\frac{1}{2}\left(\ln\frac{\lambda_L}{\lambda_s}+\frac{3}{2}\right)(\dot{\mathbf{X}}[\mathbf{X}'\times\mathbf{X}''])^2\right\}. \tag{49}$$

Отсюда видно, что вклады высших производных не содержат больших логарифмических множителей $\ln\lambda_L/\xi$ и/или $\ln\lambda_s/\xi$. Пренебрегая этими вкладами, получим нерелятивистское эффективное действие калибровочного (локального) вихря:

$$S_{\mathit{eff}}\approx\left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L}\right)^2\int dt d\sigma\left\{\frac{1}{2c_s^2}[\dot{\mathbf{X}}\times\mathbf{X}']^2\ln\frac{\lambda_s}{\xi}-\mathbf{X}'^2\ln\frac{\lambda_L}{\xi}\right\}+n_0q\int d^4xa_0. \tag{50}$$

Заметим, что вклад от короткодействующего электрического поля в (25) имеет такую же форму $[\dot{\mathbf{X}}\times\mathbf{X}']^2$ как в (50). Но он не содержит логарифмического усиления и дополнительно подавлен множителем c_s^2/c^2. Поэтому указанный вклад можно не учитывать. Поскольку в калибровке $\dot{\mathbf{X}}\cdot\mathbf{X}'=0$, $\mathbf{X}'^2=1$ имеет место соотношение $[\dot{\mathbf{X}}\times\mathbf{X}']^2=\dot{\mathbf{X}}^2$, первый член в фигурных скобках (50) можно интерпретировать как кинетическую энергию вихря с эффективной массой на единицу длины L, равной

$$\frac{m_{eff}}{L}=\left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L c_s}\right)^2\ln\frac{\lambda_s}{\xi}=\frac{\pi\hbar^2}{g}\ln\frac{\lambda_s}{\xi}=m_e n_e\xi^2\times 4\pi\ln\frac{\lambda_s}{\xi}. \tag{51}$$

Первое равенство в (51) совпадает с выражением, полученным ранее [14] для прямого вихря. Последнее равенство означает, что эффективная масса калибровочного вихря равна массе сверхпроводящих электронов, вытолкнутых из сердцевины $\sim\xi$ вихря, умноженной на логарифмический фактор усиления.

4. Уравнения движения калибровочного вихря.

Покажем, что вариация $n_0 q\int d^4xa_0$ в (24) дает отличный от нуля результат несмотря на отсутствие вклада этого члена в эффективное действие. Используя (8), находим

$$\delta\int d^4xa_0=\int dtd^3x\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{kx}}\left(-\frac{i\Phi_0}{c\mathbf{k}^2}\right)\mathbf{k}\cdot\int d\sigma e^{-i\mathbf{kX}}\left\{[\delta\dot{\mathbf{X}}\times\mathbf{X}']+[\dot{\mathbf{X}}\times\delta\mathbf{X}']-\right.$$
$$\left.i[\dot{\mathbf{X}}\times\mathbf{X}'](\mathbf{k}\delta\mathbf{X})\right\}=-\frac{\Phi_0}{c}\int dtd\sigma d^3x\frac{d^3k}{(2\pi)^3}e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{X})}(\delta\mathbf{X}[\dot{\mathbf{X}}\times\mathbf{X}'])=$$
$$-\frac{\Phi_0}{c}\int dtd\sigma(\delta\mathbf{X}[\dot{\mathbf{X}}\times\mathbf{X}']). \tag{52}$$

Уравнения движения нерелятивистского калибровочного вихря в приближении больших логарифмов получаются вариацией (24) и (47) по $\mathbf{X}$. Снова пренебрежем вкладом высших производных. При варьировании нужно сначала учитывать конечный профиль полей в вихре $e^{-|\mathbf{X}_{21}|/\lambda_L}$ и только после этого использовать разложения (20). Продемонстрируем процедуру на примере вариации вклада от натяжения:

$$\delta\int d\sigma_1d\sigma_2(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2')\frac{e^{-|\mathbf{X}_{21}|/\lambda_L}}{|\mathbf{X}_{21}|}=-\int d\sigma_1d\sigma_2\left[(\delta\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2')\frac{\partial}{\partial\sigma_1}+(\delta\mathbf{X}_2\mathbf{X}_1')\frac{\partial}{\partial\sigma_2}+\right.$$
$$\left.(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2')(\mathbf{X}_{21}\delta\mathbf{X}_{21})\frac{\partial}{\partial|\mathbf{X}_{21}|}\right]\frac{e^{-|\mathbf{X}_{21}|/\lambda_L}}{|\mathbf{X}_{21}|}=$$
$$2\int d\sigma_1d\sigma_2\left\{\delta\mathbf{X}_1\cdot[\mathbf{X}_{21}(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_2')-\mathbf{X}_2'(\mathbf{X}_{21}\mathbf{X}_1')]\right\}\times$$
$$\frac{1+|\mathbf{X}_{21}|/\lambda_L}{|\mathbf{X}_{21}|^3}e^{-|\mathbf{X}_{21}|/\lambda_L}=2\int d\sigma_1d\sigma_2(\delta\mathbf{X}_1\cdot$$
$$[\mathbf{X}_1'\times[\mathbf{X}_{21}\times\mathbf{X}_2']])\frac{1+|\mathbf{X}_{21}|/\lambda_L}{|\mathbf{X}_{21}|^3}e^{-|\mathbf{X}_{21}|/\lambda_L}=$$
$$2\int d\sigma\int_{-\infty}^{\infty}dz\frac{e^{-|z|/\lambda_L}}{2|z|}\delta\mathbf{X}\cdot[\mathbf{X}'\times[\mathbf{X}'\times\mathbf{X}'']]=$$
$$-2\ln\frac{\lambda_L}{\xi}\int d\sigma\delta\mathbf{X}\cdot\mathbf{X}''. \tag{53}$$

Наивная вариация приближенно локальной формы вклада натяжения струны в (25) привела бы дополнительному множителю 2. Что касается ΔS_{eff}, то слагаемые в (47), возникающие при свертке $[\dot{\mathbf{X}}_1\times\mathbf{X}_1']_i[\dot{\mathbf{X}}_2\times\mathbf{X}_2']_j$ с $X_{21i}X_{21j}$, относятся к категории вкладов, не усиленных множителем $\ln\lambda_s/\xi$. Они представлены в выражении (49) и по предположению должны быть отброшены. Применяя регуляризацию (26), (48) и выполняя указанную процедуру, находим вариацию вкладов, содержащих скорость $\dot{\mathbf{X}}$. В результате вариация эффективного действия с наименьшим числом производных принимает вид

$$\delta S_{\text{eff}} = -\left(\frac{\Phi_0}{4\pi\lambda_L}\right)^2 \int dt d\sigma \delta\mathbf{X} \cdot \left\{ \frac{1}{c_s^2}[\mathbf{X}' \frac{\partial}{\partial t}[\dot{\mathbf{X}} \times \mathbf{X}']] \ln\frac{\lambda_s}{\xi} - \mathbf{X}'' \ln\frac{\lambda_L}{\xi} \right\} -$$
$$\frac{n_0 q \Phi_0}{c} \int dt d\sigma (\delta\mathbf{X}[\dot{\mathbf{X}} \times \mathbf{X}']). \qquad (54)$$

Отсюда следуют уравнения движения

$$[\dot{\mathbf{X}} \times \mathbf{X}'] = \frac{\hbar}{2m}\left(\mathbf{X}'' \ln\frac{\lambda_L}{\xi} + \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial}{\partial t}[[\dot{\mathbf{X}} \times \mathbf{X}'] \times \mathbf{X}'] \ln\frac{\lambda_s}{\xi}\right). \qquad (55)$$

Наивная вариация кинетического члена в локальной форме действия (50) привела бы к дополнительному вкладу в уравнения движения вида $\propto \frac{\partial}{\partial\sigma}[[\dot{\mathbf{X}} \times \mathbf{X}'] \times \dot{\mathbf{X}}]$, и, как следствие, к возникновению нефизической продольной компоненты скорости вдоль касательного вектора $\mathbf{X}'$. Подчеркнем, что левая часть уравнения (55) полностью обязана вариации (52). Именно этот вклад теряется при переходе к нерелятивистскому пределу в уравнения движения струны, получаемых из действия Намбу-Гото.

Рассмотрим движения контура, когда нелинейность в уравнении (55) существенна. Обозначив для краткости

$$\gamma = \frac{\hbar}{2m} \ln\frac{\lambda_L}{\xi}, \qquad (56)$$

в нулевом приближении, когда можно пренебречь членами $\propto 1/c_s^2$, получаем

$$[\dot{\mathbf{X}} \times \mathbf{X}']^{(0)} = \gamma\kappa\mathbf{n}, \ \dot{\mathbf{X}}^{(0)} = \gamma\kappa\mathbf{b} + V_l^{(0)}\mathbf{X}'. \qquad (57)$$

Продольная компонента скорости $V_l^{(0)}$ не имеет физического смысла и обычно исключается с помощью дополнительного условия $\dot{\mathbf{X}}\mathbf{X}' = 0$. Поэтому в нулевом приближении внутренняя (т.е. не обусловленная переносом) скорость искривленного калибровочного вихря имеет вид

$$\dot{\mathbf{X}}^{(0)} = \mathbf{b}\frac{\hbar}{2m}|\mathbf{X}''| \ln\frac{\lambda_L}{\xi}. \qquad (58)$$

Она направлена вдоль бинормали, а ее величина много меньше скорости звука:

$$\frac{|\dot{\mathbf{X}}^{(0)}|}{c_s} = \frac{\hbar}{2mc_s}|\mathbf{X}''| \ln\frac{\lambda_L}{\xi} = \frac{\xi}{R}\ln\frac{\lambda_L}{\xi} \ll 1.$$

Здесь $R = |\mathbf{X}''|^{-1}$ обозначает радиус кривизны контура. Для получения поправок первого приближения $O(1/c_s^2)$ следует вычислить производные по времени от кривизны κ и кручения τ, равно как и от векторов $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{X}'$. Используя уравнения (21), (57), (59) и определения $\kappa = (\mathbf{n}\mathbf{X}'')$, $\tau = -(\mathbf{b}'\mathbf{n})$, находим как производные по времени от основных векторов, характеризующих контур,

$$\frac{\partial\mathbf{X}'}{\partial t} = \gamma(\kappa'\mathbf{b} - \kappa\tau\mathbf{n}),$$
$$\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial t} = \gamma\left[\kappa\tau\mathbf{X}' + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - \tau^2\right)\mathbf{b}\right],$$
$$\frac{\partial\mathbf{b}}{\partial t} = -\gamma\left[\kappa'\mathbf{X}' + \left(\frac{\kappa''}{\kappa} - \tau^2\right)\mathbf{n}\right], \qquad (59)$$

так и производные по времени от кривизны и кручения:

$$\frac{\partial\kappa}{\partial t} = -\gamma(2\kappa'\tau + \kappa\tau'),$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial t}=\gamma\left[\kappa\kappa'+\left(\frac{\kappa''}{\kappa}-\tau^2\right)'\right]. \quad (60)$$

Уравнения (60) (без множителя γ) известны в литературе по гидродинамике как уравнения Да Риоса. См. [36] и приведенные там ссылки. С учетом (21), (55), (57), (59) и (60) получаем выражение для поправки $\dot{\mathbf{X}}^{(1)}$ за счет вклада $O(1/c_s^2)$:

$$\dot{\mathbf{X}}^{(1)}=\frac{\hbar\gamma^2}{2mc_s^2}\ln\frac{\lambda_s}{\xi}\left[\mathbf{b}(\kappa''-\kappa\tau^2)-\mathbf{n}(2\kappa'\tau+\kappa\tau')\right]=|\dot{\mathbf{X}}^{(0)}|\,\xi^2\ln\frac{\lambda_L}{\xi}\ln\frac{\lambda_s}{\xi}\times$$

$$\left[\mathbf{b}(\kappa''-\kappa\tau^2)-\mathbf{n}(2\kappa'\tau+\kappa\tau')\right]\frac{1}{\kappa}.(61)$$

Отношение к скорости в нулевом порядке по порядку величины,

$$\frac{|\dot{\mathbf{X}}^{(1)}|}{|\dot{\mathbf{X}}^{(0)}|}\sim\xi^2\kappa^2\ln\frac{\lambda_s}{\xi}\ln\frac{\lambda_L}{\xi}<1,$$

мало, но не пренебрежимо, поскольку малое отношение квадрата длины когерентности к квадрату радиуса кривизны умножается на два больших логарифмических множителя.

Рассмотрим малые колебания относительно локально прямого вихря. Можно выбрать $\mathbf{X}'=\mathbf{e}_z$, $\mathbf{X}(\sigma,t)=\mathbf{u}(\sigma,t)+\mathbf{e}_z\sigma$, где $\mathbf{e}_z\cdot\mathbf{u}(\sigma,t)=0$. Вводя характерную скорость

$$c_0^2=c_s^2\times\frac{\ln(\lambda_L/\xi)}{\ln(\lambda_s/\xi)}, \quad (62)$$

получим линейное приближение к уравнению (55):

$$\frac{\ddot{\mathbf{u}}}{c_0^2}-\mathbf{u}''+\frac{1}{\gamma}[\dot{\mathbf{u}}\times\mathbf{e}_z]=0. \quad (63)$$

Решения в виде плоских волн $u_{x,y}\propto e^{i(k\sigma-\omega t)}$ дают спектр колебаний

$$\omega=\frac{c_0^2}{2\gamma}\left(\pm1\pm\sqrt{1+\frac{4\gamma^2k^2}{c_0^2}}\right)$$

и соотношения между амплитудами $u_y=\pm iu_x$. Поскольку

$$\gamma^2k^2/c_0^2=2k^2\xi^2\ln(\lambda_L/\xi)\ln(\lambda_s/\xi)\ll1,$$

квадратный корень можно разложить и записать общее решение уравнения (63) в виде

$$\mathbf{u}(\sigma,t)=\frac{\mathbf{e}_x+i\mathbf{e}_y}{\sqrt{2}}\sum_{l=-\infty}^{\infty}\left(\alpha_le^{-i\omega_1t}+\beta_le^{-i\omega_2t}\right)e^{ik_l\sigma}+\text{c.c.} \quad (64)$$

Здесь

$$\omega_1=\gamma k_l^2=\frac{\hbar k_l^2}{2m}\ln\frac{\lambda_L}{\xi},$$

$$\omega_2=\frac{c_0^2}{\gamma}+\gamma k_l^2=\frac{2n_0g}{\hbar\ln(\lambda_s/\xi)}+\frac{\hbar k_l^2}{2m}\ln\frac{\lambda_L}{\xi}, \quad (65)$$

и были введены периодические граничные условия с длиной периодичности L. Тогда $k_l=2\pi l/L$, $l=0,1,2\ldots$. Первая ветвь ω_1 совпадает с законом дисперсии волн Фриделя-Де Жена-Матрикона [37, 38], если принять в расчет, что здесь скалярное поле описывает конденсат куперовских пар, т.е. $m=2m_e$ и $q=2e$. Соответствующее движение вихря возникает из-за того, что его элемент приобретает ускорение под действием силы натяжения $\propto\mathbf{X}''$, поэтому возникает дополнительная скорость $\Delta\mathbf{v}\propto\mathbf{n}$ вдоль направления нормали к контуру. Под действием поперечной силы $\propto[\mathbf{e}_z\times\dot{\mathbf{u}}]$, аналогичной силе

Магнуса, элемент струны начинает круговое движение в направлении бинормали $\mathbf{b} = [\mathbf{X}' \times \mathbf{n}]$. Высокочастотная ветвь спектра ω_2 содержит щель

$$\omega_{\min} = \frac{2n_0 g}{\hbar \ln(\lambda_s / \xi)}.$$

Мода с $\omega_{\min} = \omega_2(k_l = 0)$ отвечает пренебрежению членом $\propto \mathbf{X}''$ в уравнении движения (63). Принимая во внимание соотношения (51), (35), (56) и (62), в данном предельном случае можно переписать уравнение движения в виде

$$\frac{m_{\mathit{eff}}}{L}\ddot{\mathbf{u}} = 2\pi\hbar n_0[\mathbf{e}_z \times \dot{\mathbf{u}}], \tag{66}$$

совпадающем с уравнением движения вихря с учетом поперечной силы и в пренебрежении эффектами пиннинга и диссипации [1]. Заметим, что характерная скорость поперечных движений контура (62) превышает скорость звука. Поэтому должно возникать затухание таких движений за счет испускания звуковых волн. Расчет декремента затухания выходит за рамки настоящей работы.

5. Глобальный вихрь

Нерелятивистский глобальный вихрь, наблюдаемый как квантованный сверхтекучий вихрь в жидком HeII, может быть рассмотрен как предел локального вихря при выключении связи с калибровочным полем. Опуская промежуточные вычисления, представим эффективное действие как $S_{\mathit{eff}} = S_{\mathrm{bg}} + \Delta S_{\mathrm{f}}$, где

$$S_{\mathrm{bg}} = \hbar n_0 \int d^4x \left[a_0 - \partial_t \chi_{\mathrm{b}} - \frac{\hbar}{2m}(\mathbf{a} + \nabla\chi_{\mathrm{b}})^2 \right], \tag{67}$$

относится к фоновому полю, а χ_{b} обозначает гладкую фазу, отвечающую за возможное потенциальное течение, $\mathbf{v}_{\mathrm{b}} = \frac{\hbar}{m}\nabla\chi_{\mathrm{b}}$. Далее, $a_0 = -\partial_t \chi_s$ и $\mathbf{a} = \nabla\chi_s$ суть производные от сингулярной фазы χ_s, отвечающей за квантованный вихрь. Для них имеются выражения, аналогичные (8) и (7), соответственно:

$$a_{0\mathbf{k}}(t) = -\frac{2\pi i}{\mathbf{k}^2}\sum_a n_a \int d\sigma_a \mathbf{k}[\dot{\mathbf{X}}_a \times \mathbf{X}'_a] e^{-i\mathbf{k}\mathbf{X}_a},$$

$$\mathbf{a}_{\mathbf{k}}(t) = \frac{2\pi i}{\mathbf{k}^2}\sum_a n_a \int d\sigma_a [\mathbf{k} \times \mathbf{X}'_a] e^{-i\mathbf{k}\mathbf{X}_a}. \tag{68}$$

Снова ограничимся единственным вихрем с единичным квантом циркуляции $n_a = 1$. В координатном пространстве производные от сингулярной фазы запишутся как

$$a_0(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int d\sigma \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{X}) \cdot [\dot{\mathbf{X}} \times \mathbf{X}']}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}|^3},$$

$$\mathbf{a}(t,\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\int d\sigma \frac{[\mathbf{X}' \times (\mathbf{x} - \mathbf{X})]}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}|^3}, \tag{69}$$

$\mathbf{X} \equiv \mathbf{X}(t,\sigma)$. Вклад флуктуаций над фоном может быть получен из соотношения (40) в пределе $q \to 0$ и с учетом опущенного ранее слагаемого $\propto \mathbf{a}^2 / 2m$:

$$\Delta S_{\mathrm{f}} = \frac{\hbar^2 n_0}{2m}\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{|\rho_{\mathbf{k}}|^2}{\hbar^2\mathbf{k}^2 / 4m^2 + c_s^2}. \tag{70}$$

Здесь для краткости введено обозначение $\rho_{\mathbf{k}} = \int d^3x \rho e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}$ для Фурье-компоненты величины

$$\rho = a_0 - \partial_t \chi_b - \frac{\hbar}{2m}(\mathbf{a} + \nabla\chi_b)^2. \tag{71}$$

Отметим, что именно ρ (взятая в пределе $a_0 = 0$, $\mathbf{a} = 0$, т.е. в отсутствие вихря) является комбинацией производных голдстоуновского поля χ_b, введенной ранее [39, 40, 41, 42] на основе требования галилеевой инвариантности. Поскольку $|\mathbf{k}| \ll 1/\xi$, где ξ дается выражением (39), вклад флуктуаций (70) можно представить в виде ряда по числу производных

$$\Delta S_f = \frac{\hbar^2 n_0}{2mc_s^2}\int dt d^3x \left[\rho^2 - \xi^2 \sum_{l=0}^{\infty}(\xi^2\nabla^2)^l (\nabla\rho)^2\right]. \tag{72}$$

Главный вклад в эффективное действие при отсутствии вихря можно записать как

$$S_{eff} = \frac{\hbar^2 n_0}{2m}\int d^4x \left[\frac{1}{c_s^2}(\partial_t\chi_b)^2 - (\nabla\chi_b)^2 + \ldots\right]. \tag{73}$$

Это выражение воспроизводит эффективное действие для голдстоуновской моды, полученное в [39] на основе требования, что эта мода должна быть звуковой волной. В отличие от подхода, развитого в [39, 40, 41, 42], в данной работе не требуется знать уравнения движения голдстоуновской моды. Все необходимые коэффициенты получаются после учета вклада флуктуаций модуля и фазы скалярного поля.

Для получения уравнений движения глобальной струны отбросим гладкую фазу χ_b и пренебрежем в (72) всеми членами $\propto \xi^2$. При варьировании действия следует учесть, что

$$\delta a_0(\mathbf{x}) = -\int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int d\sigma e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}} \left\{\delta\mathbf{X}\cdot[\dot{\mathbf{X}}\times\mathbf{X}'] + \frac{\delta\mathbf{X}\cdot[\mathbf{k}\times\mathbf{X}']}{\mathbf{k}^2} i\partial_t\right\},$$

$$\delta\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int d\sigma e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}} \left\{[\delta\mathbf{X}\times\mathbf{X}'] - \frac{\mathbf{k}(\mathbf{k}\cdot[\delta\mathbf{X}\times\mathbf{X}'])}{\mathbf{k}^2}\right\}. \tag{74}$$

Уравнения движения в нулевом порядке (т.е. при пренебрежении вкладом флуктуаций) принимают вид

$$[\dot{\mathbf{X}}\times\mathbf{X}'] - \frac{\hbar}{m}[\mathbf{a}(\mathbf{X})\times\mathbf{X}'] = 0, \tag{75}$$

и приводят к классическому закону вихревого движения

$$\dot{\mathbf{X}} = \frac{\hbar}{m}\mathbf{a}(\mathbf{X}) = \mathbf{V}. \tag{76}$$

Действительно, $\frac{\hbar}{m}\mathbf{a}(\mathbf{X})$ есть скорость, индуцированная в данном месте расположения участка вихря $\mathbf{x} = \mathbf{X}(\sigma)$ другими элементами этого же вихря. Подставляя сюда (69), используя (20) принимая, что верхний и нижний пределы интегрирования есть ξ и R соответственно (см. ниже), получим в нулевом порядке

$$\dot{\mathbf{X}}^{(0)}(\sigma_1) = \frac{\hbar}{m}\mathbf{a}(\mathbf{X}) = \frac{\hbar}{2m}\int d\sigma_2 \frac{[\mathbf{X}_{21}\times\mathbf{X}_2']}{|\mathbf{X}_{21}|^3} \approx \frac{\hbar}{2m}[\mathbf{X}_1'\times\mathbf{X}_1'']\ln\frac{R}{\xi} \equiv \gamma_g\kappa\mathbf{b}, \tag{77}$$

где

$$\gamma_g = \frac{\hbar}{2m}\ln\frac{R}{\xi}. \tag{78}$$

Напомним, что $\mathbf{X}_{1,2} \equiv \mathbf{X}(\sigma_{1,2})$, а $\kappa = |\mathbf{X}''|$. В случае кольцевого контура (77) совпадает с выражением для скорости вихревого кольца в сверхтекучем HeII [3]. Крупномасштабные внутренние движения глобального вихря медленны:

$$\frac{|\dot{\mathbf{X}}^{(0)}|}{c_s}=\frac{\hbar\kappa}{2mc_s}\ln\frac{R}{\xi}\sim\frac{\xi}{R}\ln\frac{R}{\xi}\ll 1.$$

Здесь в качестве кривизны контура взят обратный радиус обрезания $1/R$.

Рассчитаем вклад ΔS_{f} в предположении $|\mathbf{k}|\ll 1/\xi$, как это было сделано в случае локального вихря. Кроме расходимости на малых расстояниях $r\leq\xi$, вызванной пренебрежением сердцевиной вихря, из-за наличия бесщелевой голдстоуновской моды в данном случае возникает и расходимость на больших расстояниях. Она регуляризуется введением обрезания на расстояниях $r\sim R$, где R-величина порядка радиуса кривизны контура:

$$\frac{1}{\mathbf{k}^2}\to\frac{1}{\mathbf{k}^2+1/R^2},$$

$R\to\infty$. После интегрирования по импульсу получаем выражение

$$\Delta S_{\mathrm{f}}=\frac{\pi\hbar^2 n_0}{4mc_s^2}\int dt d\sigma_1 d\sigma_2\left\{[\dot{\mathbf{X}}_1\times\mathbf{X}_1'][\dot{\mathbf{X}}_2\times\mathbf{X}_2']-\left(1+\frac{|\mathbf{X}_{21}|}{R}\right)\times\right.$$
$$\left.\frac{(\mathbf{X}_{21}\cdot[\dot{\mathbf{X}}_1\times\mathbf{X}_1'])(\mathbf{X}_{21}\cdot[\dot{\mathbf{X}}_2\times\mathbf{X}_2'])}{\mathbf{X}_{21}^2}\right\}\frac{e^{-|\mathbf{X}_{21}|/R}}{|\mathbf{X}_{21}|}\approx$$
$$\frac{\pi\hbar^2 n_0}{2mc_s^2}\int dt d\sigma\left\{[\dot{\mathbf{X}}\times\mathbf{X}']^2\ln\frac{R}{\xi}+\frac{3R^2}{4}(\dot{\mathbf{X}}\cdot[\mathbf{X}'\times\mathbf{X}''])^2\right\}.\qquad(79)$$

Приближенное равенство получено в локальном пределе, когда вклад разнесенных точек контура мал. В отличие от случая калибровочного вихря, здесь вклад высших производных умножается на большой множитель R^2. Тем не менее, отношения этого вклада к вкладу с наименьшим числом производных, оцениваемое с помощью (77), составляет

$$\frac{R^2\kappa^2}{\ln R/\xi}\sim\frac{1}{\ln R/\xi}\ll 1,$$

где было учтено, что $R\sim 1/\kappa$. Таким образом, вклад высших производных подавлен и в данном случае, хотя и без дополнительного малого множителя $\lambda_L^2\kappa^2$, имеющего место в случае локального вихря. Как и в разделе 4, при получении поправки к уравнениям движения пренебрежем вкладом высших производных. При этом вклад, содержащий квадрат скорости, интерпретируется как кинетическая энергия участка глобального вихря с эффективной массой на единицу длины

$$\frac{m_{\mathit{eff}}}{L}=\frac{\pi\hbar^2 n_0}{mc_s^2}\ln\frac{R}{\xi}=\frac{\pi\hbar^2}{g}\ln\frac{R}{\xi}.\qquad(80)$$

Это выражение совпадает с выражениями, полученными ранее другими методами [14, 43], с учетом явной опечатки (лишняя масса в знаменателе) в работе [43].

Как и в предыдущем разделе, поправку к уравнениям движения глобального вихря находим путем варьирования нелокального действия (79). Получаем

$$[\dot{\mathbf{X}}\times\mathbf{X}']=\frac{\hbar}{m}[\mathbf{a}(\mathbf{X})\times\mathbf{X}']+\frac{\hbar}{2mc_s^2}\ln\frac{R}{\xi}[\partial_t[\dot{\mathbf{X}}\times\mathbf{X}']\times\mathbf{X}'].\qquad(81)$$

С учетом того, что

$$\mathbf{a}(\mathbf{X})\approx\frac{\kappa}{2}\ln\frac{R}{\xi}\mathbf{b},$$

[см. (77)], уравнение (81) выглядит так же как уравнение движения (55). Поэтому поправка за счет флуктуаций модуля и фазы скалярного поля сразу может быть получена из (61) с помощью замен $\gamma\to\gamma_g$, $\lambda_s,\lambda_L\to R$:

$$\dot{\mathbf{X}}^{(1)}=\frac{\hbar\gamma_g^2}{2mc_s^2}\ln\frac{R}{\xi}\left[\mathbf{b}(\kappa''-\kappa\tau^2)-\mathbf{n}(2\kappa'\tau+\kappa\tau')\right]=$$
$$|\dot{\mathbf{X}}^{(0)}|\,\xi^2\ln^2\frac{R}{\xi}\left[\mathbf{b}(\kappa''-\kappa\tau^2)-\mathbf{n}(2\kappa'\tau+\kappa\tau')\right]\frac{1}{\kappa}. \qquad (82)$$

Относительная величина поправки мала,

$$\frac{|\dot{\mathbf{X}}^{(1)}|}{|\dot{\mathbf{X}}^{(0)}|}\sim\xi^2\kappa^2\ln^2\frac{R}{\xi}<1,$$

но не пренебрежима, ввиду большого логарифмического множителя. Как и в локальном вихре, поперечное внутреннее движение глобального вихря медленное.

Малые линейные отклонения глобального вихря от прямой анализируются аналогично тому, как было сделано в случае локального вихря. Уравнения движения выглядят так же, как уравнение (63), в котором следует провести замены $c_0\to c_s$ [поскольку отношение логарифмов в (62) равно единице в случае глобального вихря] и $\gamma\to\gamma_g$. Спектр колебаний дается выражениями (65), с указанными заменами и с заменой $\lambda_L,\lambda_s\to R$. Низкочастотная часть представляет собой известные волны Кельвина [3, 38]. Высокочастотная часть спектра содержит щель

$$\omega_{\min}=\frac{2n_0g}{\hbar\ln(R/\xi)}.$$

Как показано в разделе 4, такая ветвь возникает в пределе, когда ускорение участка вихря с массой на единицу (80) вызывается поперечной силой Магнуса. Уравнения движения в этом пределе имеют вид уравнений (66) с заменой эффективной массы (51) на (80). Поскольку малые поперечные колебания характеризуются скоростью звука, кинематическая ситуация является строго пороговой, и затухание поперечных волн за счет испускания звуковых волн пренебрежимо мало.

6. Магнитная спиральность калибровочного вихря.

Имеется обширная литература по проблеме топологических свойств замкнутых кривых, характеризующих векторные поля с нулевой дивергенцией. См., например, [22, 29, 30]. К ним относятся силовые линии магнитного поля, линии тока несжимаемой жидкости и т.д. Было бы интересно проследить за тем, как указанные топологические концепции работают в случае вихревых объектов в теоретико-полевых моделях со спонтанно нарушенной симметрией. Данная проблема также интенсивно исследуется на протяжении ряда лет. См., например, [16, 17, 44].

Рассмотрим поставленную задачу на примере калибровочного вихря в абелевой модели Хиггса, являющейся примером модели со спонтанно нарушенной U(1)-симметрией. В данном случае речь будет идти не о топологии воображаемых замкнутых линий магнитного поля, а о реально сконцентрированном в узкой поперечной области магнитном поле, пронизывающим вихрь. Это позволит учесть ненулевую толщину вихря (эквивалентно, конечную массу калибровочного бозона, см. Введение) при вычислении магнитной спиральности

$$h_A=\int d^3x\mathbf{A}\cdot\mathbf{H}=\frac{1}{2}\int\frac{d^3k}{(2\pi)^3}\left(\mathbf{A}^*_\mathbf{k}\mathbf{H}_\mathbf{k}+\mathbf{A}_\mathbf{k}\mathbf{H}^*_\mathbf{k}\right). \qquad (83)$$

Такое вычисление необходимо и для нахождения производной спиральности по времени. Цель этого двояка. Во-первых, конфигурации полей с ненулевой магнитной спиральностью могут представлять интерес в связи с процессами в эпоху электрослабого фазового перехода в ранней вселенной [31, 32, 44]. Во-вторых, в ряде работ [23, 24] динамика твиста и райзинга обсуждалась с точки зрения геометрии кривых контуров. В то же время калибровочная струна подчиняется динамическим уравнениям движения. Было бы интересным сравнить результаты, получаемые в разных подходах.

Вычислим магнитную спиральность (83), используя полевую конфигурацию (15) и (17), отвечающую калибровочному вихрю :

$$h_A = i\Phi_0^2 \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3\mathbf{k}^2}\left(\frac{1/\lambda_L^2}{\mathbf{k}^2+1/\lambda_L^2}\right)^2 \sum_{a,b} n_a n_b \iint d\sigma_a d\sigma_b e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}_{ab}} \left(\mathbf{k}\cdot[\mathbf{X}_a' \times \mathbf{X}_b']\right). \qquad (84)$$

Эта величина отлична от нуля только для конфигураций, не инвариантных относительно пространственной инверсии. Для краткости введены обозначения $\mathbf{X}_{a,b} \equiv \mathbf{X}_{a,b}(\sigma_{a,b},t)$, $\mathbf{X}_{ab} = \mathbf{X}_a - \mathbf{X}_b$. С помощью формул

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}}{\mathbf{k}^2} = \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|},$$

$$\int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left(\frac{1/\lambda_L^2}{\mathbf{k}^2+1/\lambda_L^2}\right)^2 \exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}) = \frac{1}{8\pi\lambda_L^3}\exp(-|\mathbf{X}|/\lambda_L) \qquad (85)$$

можно провести интегрирование по $\mathbf{k}$ в выражении (84). Члены с $a \neq b$ после интегрирования по $\mathbf{k}$ приведут к вкладу в магнитную спиральность

$$h_A(a\neq b) = 2\Phi_0^2 \sum_{b<a} n_a n_b Lk[a,b],$$

где

$$Lk[a,b] = \frac{1}{4\pi}\oint d\sigma_a \oint d\sigma_b \frac{\mathbf{X}_{ab}\cdot[\mathbf{X}_a' \times \mathbf{X}_b']}{|\mathbf{X}_{ab}|^3}$$

суть коэффициент зацепления двух контуров a и b [33], плюс поправки, подавленные как $\exp(-|\mathbf{X}_a - \mathbf{X}_b|/\lambda_L)$. В свою очередь, результат интегрирования по $\mathbf{k}$ типичного члена с $a = b$ (опуская для краткости индекс a) может быть представлен в виде

$$h_A(a=b) = \Phi_0^2\left\{Wr[a] - \frac{1}{4\pi}\oint d\sigma_1 \oint d\sigma_2 \frac{\mathbf{X}_{12}\cdot[\mathbf{X}_1' \times \mathbf{X}_2']}{|\mathbf{X}_{12}|^3} \times \right.$$

$$\left.\left(1+\frac{|\mathbf{X}_{12}|}{\lambda_L}+\frac{|\mathbf{X}_{12}|^2}{2\lambda_L^2}\right)\exp(-|\mathbf{X}_{12}|/\lambda_L)\right\}, \qquad (86)$$

где первый член в фигурных скобках,

$$Wr[a] = \frac{1}{4\pi}\oint d\sigma_1 \oint d\sigma_2 \frac{\mathbf{X}_{12}\cdot[\mathbf{X}_1' \times \mathbf{X}_2']}{|\mathbf{X}_{12}|^3}, \qquad (87)$$

суть райзинг контура [27]. В выписанных соотношениях введено обозначение $\mathbf{X}_{12} \equiv \mathbf{X}_a(\sigma_1) - \mathbf{X}_a(\sigma_2)$, $\mathbf{X}_{1,2} \equiv \mathbf{X}(\sigma_{1,2})$, а $\sigma_{1,2}$ относится к одному и тому же контуру a. Второй член в фигурных скобках (86) зависит от λ_L. Он учитывает профиль напряженности магнитного поля вихря по поперечной координате. Бесконечно тонкий идеализированный вихрь получается в пределе $\lambda_L \to 0$. С помощью разложений (20) можно получить приближенно локальное выражение для поправки к магнитной спиральности, возникающей в случае распределенного профиля:

$$\Delta h_A(a=b) = -\Phi_0^2 \frac{1}{2\pi}\oint d\sigma \mathbf{X}'\cdot[\mathbf{X}'' \times \mathbf{X}''']\frac{1}{24}\int_{-\infty}^{\infty} dz\,|z|\,e^{-|z|/\lambda_L} =$$

$$-\frac{\Phi_0^2\lambda_L^2}{24\pi R^2}\oint d\sigma\left(\mathbf{X}'\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{n}']\right). \qquad (88)$$

Последнее равенство в (88) справедливо для контуров с медленно меняющимся с σ радиусом кривизны $R = |\mathbf{X}''(\sigma)|^{-1/2}$. Отметим, что

$$Tw[a] = \frac{1}{2\pi}\oint d\sigma\left(\mathbf{X}'\cdot[\mathbf{n}\times\mathbf{n}']\right) \tag{89}$$

представляет собой твист полосы [25, 26, 27] с контуром, имеющим нормаль $\mathbf{n}$. Таким образом, вклад твиста в магнитную спиральность калибровочного вихря подавлен как λ_L^2 / R^2, поэтому в пределе $\lambda_L \to 0$ выражение для спиральности принимает вид [16, 17]

$$h_A = \Phi_0^2\left\{\sum_a n_a^2 Wr[a] + 2\sum_{a<b} n_a n_b Lk[a,b]\right\}. \tag{90}$$

7. Топологические характеристики вихря, сохраняющиеся при его движении

Вычислим производную по времени от магнитной спиральности, продифференцировав по времени выражение (84). Используя соотношение

$$\frac{\partial}{\partial t}\oint d\sigma[\mathbf{k}\times\mathbf{X}']\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}) = i\oint d\sigma\mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times[\dot{\mathbf{X}}\times\mathbf{X}'])\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}),$$

которое проверяется непосредственным дифференцированием, находим

$$\begin{aligned}\dot{h}_A &= \Phi_0^2\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left(\frac{1/\lambda_L^2}{\mathbf{k}^2+1/\lambda_L^2}\right)^2\sum_{ab} n_a n_b\oint d\sigma_a\oint d\sigma_b(\dot{\mathbf{X}}_a-\dot{\mathbf{X}}_b)[\mathbf{X}_a'\times\mathbf{X}_b'] \\ &\qquad\times\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}_{ab}) \\ &= \frac{\Phi_0^2}{8\pi\lambda_L^3}\sum_{ab} n_a n_b\oint d\sigma_a\oint d\sigma_b(\dot{\mathbf{X}}_a-\dot{\mathbf{X}}_b)[\mathbf{X}_a'\times\mathbf{X}_b']\exp(-|\mathbf{X}_{ab}|/\lambda_L).\end{aligned} \tag{91}$$

Очевидно, что члены с $a \neq b$ вносят экспоненциально малый вклад $\propto \exp(-|\mathbf{X}_a-\mathbf{X}_b|\,\lambda_L)$. Это согласуется с тем, что аналогичные члены в выражении для h_A происходят от коэффициента зацепления $Lk[a,b]$, являющегося топологическим инвариантом. Вклад членов с $a=b$ рассчитывается с помощью разложений (20) так же, как было сделано выше при вычислении поправки к спиральности за счет конечной толщины вихря. В результате получаем

$$\begin{aligned}\dot{h}_A &= \frac{\Phi_0^2}{8\pi\lambda_L^3}\sum_a n_a^2\oint d\sigma_a\dot{\mathbf{X}}_a'\cdot[\mathbf{X}_a'\times\mathbf{X}_a'']\int_{-\infty}^{+\infty}dz(-z^2)\exp(-|z|/\lambda_L) \\ &= \frac{\Phi_0^2}{2\pi}\sum_a n_a^2\oint d\sigma_a\dot{\mathbf{X}}_a\cdot[\mathbf{X}_a'\times\mathbf{X}_a'''] = \Phi_0^2\sum_a n_a^2\frac{dWr[a]}{dt}.\end{aligned} \tag{92}$$

Заметим, что выражение (92) можно вывести непосредственно из соотношения [29]

$$\dot{h}_A = -2\oint d^3x\mathbf{E}\cdot\mathbf{H} = -\int\frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3}\left[\mathbf{E}(\mathbf{k},t)\cdot\mathbf{H}^*(\mathbf{k},t)+\mathbf{E}^*(\mathbf{k},t)\cdot\mathbf{H}(\mathbf{k},t)\right], \tag{93}$$

если подставить сюда выражения (17) и (18). Представленный вывод показывает, что производная спиральности по времени (92) обязана внутреннему динамическому движению вихря. В случае трансляционного движения с постоянной скоростью правая часть выражения (92) обращается в нуль. Действительно, полагая $\dot{\mathbf{X}}_a = \mathbf{V}$, рассматривая одиночный вихрь с $n_a = 1$, находим, что

$$\dot{h}_A = \frac{\Phi_0^2}{2\pi}\mathbf{V}\cdot\oint d\sigma_a[\mathbf{X}_a'\times\mathbf{X}_a'''] = \frac{\Phi_0^2}{2\pi}\mathbf{V}\cdot\oint d\sigma_a\frac{d}{d\sigma}[\mathbf{X}_a'\times\mathbf{X}_a''].$$

Последний интеграл в этом выражении сводится к комбинации $\kappa\mathbf{b}\,\big|_{\sigma_i}^{\sigma_f}$, которая обращается в нуль для достаточно гладких замкнутых контуров.

Что будет в случае самоиндуцированных движений вихря? Для ответа на этот вопрос подставим в правую часть (92) решение уравнений движения калибровочного вихря, найденное в разделе 4. Вводя наряду с (56) обозначение

$$T_0 = \frac{\hbar}{2mc_s^2} \ln \frac{\lambda_s}{\xi}, \tag{94}$$

представим решение уравнения (55) для скорости вихря в виде

$$\dot{\mathbf{X}} = \gamma \left[\kappa + \gamma T_0 \left(\kappa'' - \kappa \tau^2 \right) \right] \mathbf{b} - \gamma^2 T_0 \left(2\kappa' \tau + \kappa \tau' \right) \mathbf{n}. \tag{95}$$

Ограничиваясь случаем единственного вихря с единичным квантом магнитного потока $n_a = 1$ и учитывая соотношение

$$[\mathbf{X}' \times \mathbf{X}'''] = \kappa' \mathbf{b} - \kappa \tau \mathbf{n}, \tag{96}$$

которое следует из уравнений Френе (21), убеждаемся, что подынтегральное выражение в (92) является полной производной. Поэтому производная спиральности по времени (92) обращается в нуль для замкнутого контура:

$$\dot{h}_A = \frac{\Phi_0^2 \gamma}{4\pi} \oint d\sigma \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[\kappa^2 + \gamma T_0 \left(\kappa'^2 + \kappa^2 \tau^2 \right) \right] = 0. \tag{97}$$

Этот вывод согласуется с общим утверждением [30], что спиральность векторного поля является топологическим инвариантом Хопфа.

Найденная выше мера изменения спиральности обязана изменению райзинга вихревого контура. Поэтому выражение (92), после деления на Φ_0^2 и полагая $n_a = 1$, можно отождествить с производной по времени от райзинга. См. (90)и (92). Тогда вариация райзинга может быть записана в виде

$$\delta Wr[a] = \frac{1}{2\pi} \oint d\sigma \delta \mathbf{X} \cdot [\mathbf{X}' \times \mathbf{X}''']. \tag{98}$$

Представленный здесь вывод следует сравнить с альтернативным подходом [23, 24], где изменение райзинга было получено чисто геометрическим методом. Выражения, найденные в настоящей работе и в [23, 24], в точности совпадают.

Представим вывод выражения для вариации райзинга (98), который не использует явного представления профиля магнитного поля локального вихря. Для этого возьмем явное выражение для Wr (87), записанное в виде Фурье-представления с помощью первой формулы (85):

$$Wr = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \oint d\sigma_1 d\sigma_2 \frac{(\mathbf{k} \cdot [\mathbf{X}_2' \times \mathbf{X}_1'])}{\mathbf{k}^2} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}_{21}}. \tag{99}$$

Его удобно варьировать по $\mathbf{X}(\sigma)$. Используя в нижеследующей цепочке преобразований интегрирование по частям и векторное соотношение $[\mathbf{a} \times [\mathbf{b} \times \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, получаем

$$\delta Wr = -i \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} \oint d\sigma_1 d\sigma_2 \left\{ [\delta \mathbf{X}_2' \times \mathbf{X}_1'] + [\mathbf{X}_2' \times \delta \mathbf{X}_1'] + \right.$$

$$\left. i[\mathbf{X}_2' \times \mathbf{X}_1'](\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}_{21}) \right\} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}_{21}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} \oint d\sigma_1 d\sigma_2 \left\{ -[\delta \mathbf{X}_2 \times \mathbf{X}_1'](\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}_2') + \right.$$

$$\left. [\mathbf{X}_2' \times \delta \mathbf{X}_1](\mathbf{k} \cdot \mathbf{X}_1') + [\mathbf{X}_2' \times \mathbf{X}_1'](\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{X}_2) - [\mathbf{X}_2' \times \mathbf{X}_1'](\mathbf{k} \cdot \delta \mathbf{X}_1) \right\} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}_{21}} =$$

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{k}^2} \oint d\sigma_1 d\sigma_2 \left\{ [\mathbf{X}_2' \times [\mathbf{k} \times [\delta \mathbf{X}_1 \times \mathbf{X}_1']]] - [\mathbf{X}_1' \times [\mathbf{k} \times [\mathbf{X}_2 \times \delta \mathbf{X}_2']]] \right\} \times$$

$$e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}_{21}} = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \oint d\sigma_1 d\sigma_2 \left(\delta \mathbf{X}_{21} \cdot [\mathbf{X}_2' \times \mathbf{X}_1'] \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{X}_{21}} =$$

$$\int d\sigma_1 d\sigma_2 \left(\delta\mathbf{X}_{21}\cdot[\mathbf{X}_2'\times\mathbf{X}_1']\right)\delta^{(3)}(\mathbf{X}_{21}). \qquad (100)$$

Особенность вида $0\times\infty$, возникшую в последнем равенстве цепочки (100), раскроем с помощью представления δ-функции

$$\delta^{(3)}(\mathbf{X}) = \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\xi^3}e^{-\mathbf{X}^2/2\xi^2}.$$

Тогда регуляризованное выражение для вариации райзинга можно записать в виде

$$\delta Wr_{\text{reg}} = \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\xi^3}\int d\sigma_1 d\sigma_2 e^{-\mathbf{X}_{21}^2/2\xi^2}\delta\mathbf{X}_{21}\cdot[\mathbf{X}_2'\times\mathbf{X}_1']. \qquad (101)$$

Поскольку основной вклад в особенность дают близкие точки, можно взять $\sigma_1=\sigma$, $\sigma_2=\sigma+z$ и разложить $\mathbf{X}(\sigma_2)$ в ряд по z вплоть до членов $O(z^3)$, используя разложения (20). Члены более высокого порядка чем z^3 выпадают после перехода к пределу $\xi\to 0$. Получим выражение

$$\delta Wr_{\text{reg}} = \lim_{\xi\to 0}\frac{1}{(2\pi)^{3/2}\xi^3}\int d\sigma dz z^2 e^{-z^2/2\xi^2}\delta\mathbf{X}\cdot[\mathbf{X}'\times\mathbf{X}'''] = \frac{1}{2\pi}\int d\sigma\delta\mathbf{X}\cdot[\mathbf{X}'\times\mathbf{X}'''], \quad (102)$$

совпадающее с (98). Предложенный вывод подтверждает независимость вариации райзинга от конкретной физической реализации контура.

Вариация твиста может быть записана как следующая цепочка преобразований:

$$\delta Tw[a] = \frac{1}{2\pi}\delta\int d\sigma\tau = \frac{1}{2\pi}\int d\sigma\delta(\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}') = \frac{1}{2\pi}\int d\sigma\left\{(\delta\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}')-(\delta\mathbf{n}\cdot\mathbf{b}')\right\}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int d\sigma\left\{\delta\mathbf{b}(-\kappa\mathbf{X}'+\tau\mathbf{b})+\tau\mathbf{n}\cdot\delta\mathbf{n}\right\} = -\frac{1}{2\pi}\int d\sigma\kappa(\mathbf{X}'\cdot\delta\mathbf{b}) =$$
$$\frac{1}{2\pi}\int d\sigma\kappa(\mathbf{b}\cdot\delta\mathbf{X}') = -\frac{1}{2\pi}\int d\sigma\delta\mathbf{X}(\kappa\mathbf{b})' = -\frac{1}{2\pi}\int d\sigma\delta\mathbf{X}(\kappa'\mathbf{b}-\kappa\tau\mathbf{n}) =$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int d\sigma\delta\mathbf{X}\cdot[\mathbf{X}'\times\mathbf{X}'''] = -\delta Wr[a]. \qquad (103)$$

При выводе существенно использовалось свойство ортонормированности векторов $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{X}'$, уравнения Френе (21), соотношения (96) и (98). Таким образом, сумма твиста и райзинга суть константа, которая может быть отождествлена с так называемым числом самозацепления $Sl[a]$, являющимся топологическим инвариантом [28]. Приведенный вывод дает другое доказательство соотношения

$$Wr[a]+Tw[a]=Sl[a]=\text{c}onst, \qquad (104)$$

выведенного ранее в ряде работ [16, 25, 26, 27, 28]. Отметим, что с учетом второго из уравнений (60) производная твиста по времени равна нулю,

$$\dot{T}w = \frac{1}{2\pi}\int d\sigma\dot{\tau} = 0.$$

Таким образом, уравнения движения вихря и топологический интеграл движения (104) согласуются друг с другом и с сохранением спиральности.

Любопытно отметить, что закон сохранения (104) накладывает некоторые ограничения на глобальный выбор поперечной калибровки $\dot{\mathbf{X}}\mathbf{X}'=0$, обычно используемый при анализе динамики вихрей (струн). Действительно, для вихрей имеет место соотношение $\dot{\mathbf{X}}=V_n\mathbf{n}+V_b\mathbf{b}$ [см. (58), (61), (77), (82)], так что локально справедливо условие $\dot{\mathbf{X}}\cdot\mathbf{X}'=0$. Однако если усреднить это условие по всей длине замкнутого контура, не инвариантного относительно пространственной инверсии, можно получить результат, отличный от нуля. Продемонстрируем это утверждение на примере глобального вихря. С учетом выражений (69) и (76) приходим к соотношению

$$\oint d\sigma_1 \dot{\mathbf{X}}_1 \cdot \mathbf{X}_1' = \frac{\hbar}{m}\oint d\sigma_1 \mathbf{a}[\mathbf{X}(\sigma_1)]\cdot \mathbf{X}_1' = \frac{\hbar}{2m}\oint d\sigma_1 d\sigma_2 \frac{[\mathbf{X}_1' \times \mathbf{X}_2']\cdot \mathbf{X}_{12}}{|\mathbf{X}_{21}|^3} =$$

$$\frac{2\pi\hbar}{m}Wr = \frac{2\pi\hbar}{m}(Sl - Tw), \tag{105}$$

где Wr есть райзинг контура (87). Хотя райзинг не является топологическим инвариантом, и контур может быть деформирован в состояние с $Wr = 0$, это может быть выполнено лишь за счет возникновения ненулевого твиста Tw (89). Если созданный каким-то образом вихрь имел нетривиальную топологическую конфигурацию с $Sl \neq 0$, то в силу (105) существует препятствие к глобальному выбору калибровочного условия $\dot{\mathbf{X}}\mathbf{X}' = 0$.

8. Заключение

Нерелятивистское эффективное действие для локального и глобального вихрей получено здесь в рамках нерелятивистского предела моделей, известных в физике частиц как абелева модель Хиггса (АМХ) и модели Голдстоуна, соответственно. Пространство параметров этих моделей включает как ситуации из физики конденсированного состояния, характеризуемые глубиной проникновения λ_L и корреляционной длиной ξ, так и физики частиц и астрофизики, где указанным параметрам отвечают соответственно масса калибровочного и хиггсовского бозонов. Показано, что, в отличие от обычно предполагавшихся на основе действия Намбу-Гото ультрарелятивистских движений [6], поперечные движения струн в этих моделях могут быть медленными. Этот вывод является следствием использования явно поперечного выражения для электрической части напряженности калибровочного поля (18) и, как следствие, необходимости учета члена $n_0 q a_0$ в плотности лагранжиана. Вариация этого вклада приводит к восстановлению правильного нерелятивистского закона вихревого движения, не воспроизводимого в нерелятивистском пределе действия Намбу-Гото. Учет обмена возбуждениями модуля и фазы векторного и скалярного полей оказывается совершенно обязательным для получения эффективного действия калибровочного вихря, не содержащего искусственных расходимостей на больших расстояниях. Вместе с тем такой учет приводит к поправкам к классическому закону вихревой динамики. Хотя эти поправки обратно пропорциональны квадрату скорости звука, они содержат численное усиление благодаря большим логарифмическим множителям. Изучение динамики вихревых состояний позволяет пролить дополнительный свет на топологию замкнутых кривых.

Уже эти отдельные результаты позволяют заключить, что исследование динамики вихрей даже в идеализированной ситуации, когда отсутствуют эффекты диссипации, пиннинга, ненулевой температуры среды и.д., является интересной задачей математической физики, с возможными приложениями к реальным физическим системам.

Литература

1. *Ao P.* Yes, 60 years later we are still working hard on vortices//arXiv:cond-mat/0311495v1; Snapshots on Vortex Dynamics//arXiv:cond-mat/0504222v1.
2. *Абрикосов А.А.* Основы теории металлов//Наука, Москва, 1987, 520 стр. .
3. *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Статистическая физика, часть 2//Наука, Москва 1978, 448 стр..
4. *Nielsen H.B., Olesen P.* Vortex line models for dual strings// Nucl. Phys., 1973, **B61**, 45-61.
5. *Vilenkin A., Shellard E.P.S.* Cosmic Strings and Other Topological Defects//Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1994, 580 pp..
6. *Hindmarsh M.B.,Kibble T.W.B.* Cosmic strings// Rept.Prog.Phys., 1995, **58**, 477-562, arXiv:hep-ph/9411342v1.
7. *Rajantie A.* Defect formation in the early universe// Contemp.Phys., 2003, **44**, 485-502, arXiv:astro-ph/0307387v2.
8. *Kibble T.W.B.* Cosmic strings reborn?//arXiv:astro-ph/0410073v2.
9. *Vachaspati T., Vilenkin A.* Formation and evolution of cosmic strings// Phys. Rev., 1984, D**30**, 2036-2045.

10. *Avgoustidis A., Gomis J.* Non-relativistic strings in expanding spacetime//arXiv:0707.3944v1.
11. *Kibble T.W.B.* Topology of cosmic domains and strings// J.Phys.,1976, A**9**, 1387-1398.
12. *Zurek W.H.* Cosmological experiments in condensed matter systems// Phys.Rept., 1996, **276**, 177-221, arXiv:cond-mat/9607135v1.
13. *Kozhevnikov A.A.* The effective action and equations of motion of curved local and global vortices: Role of the field excitations//Int.J.Mod.Phys., 2010, B**24**, 605-628, arXiv:0810.0878.
14. *Hatsuda M., Sato M., Yahikozawa S., Hatsuda T.* Adiabatic effective action for vortices in neutral and charged superfluids/ /Int. J. Mod. Phys., 1996, B**10**, 1875-1894, arXiv:cond-mat/9505158v2.
15. *Goldstone J.* Field theories with superconductor solutions// Nuovo Cim.,1961, **19**, 154-164.
16. *Sato M., Yahikozawa S.* "Topological" formulation of effective vortex strings// Nucl. Phys., 1995, **B436**, 100-128, arXiv:hep-th/9406208.
17. *Kozhevnikov A.A.* Relation between helicity, linking, and writhing numbers of the closed Nielsen-Olesen strings// Phys. Rev., 1995, D **52**, 6043-6049.
18. *Kozhevnikov A.A.* Gauge vortex dynamics at finite mass of bosonic fields// Phys. Rev. , 1999, D **59**, 085003,5 pp. [Phys. Rev., 1999, D**60**, 109904 (E)], arXiv: hep-ph/9812512.
19. *Orland P.* Extrinsic curvature dependence of Nielsen-Olesen strings// Nucl. Phys., 1994, **B428**, 221-232.
20. Arodz′ H. Expansion in the width: The case of vortices// Nucl. Phys., 1995, **B450**, 189-208.
21. *Anderson M., Bonjour F., Gregory R., Stewart J.* Effective action and motion of a cosmic string// Phys. Rev., 1997, D **56**, 8014-8028.
22. *Moffatt H.K.* The degree of knottedness of tangled vortex lines// J. Fluid Mech., 1969, **35**, 117-129.
23. *Goldstein R.E., Powers T.R., Wiggins C.H.* The viscous nonlinear dynamics of twist and writhe// Phys. Rev. Lett., 1998, **80**, 5232-5235.
24. *Kamien R.D.* Local writhing dynamics// Eur. Phys. Journ., 1998, **B1**, 1-4.
25. *Франк-Каменецкий М.Д., Вологодский А.В.* Топологические аспекты физики полимеров: Теория и ее биофизичесие приложения// УФН, 1981, **134**, 642-673.
26. *Moffatt H.K., Ricca R.L.* Helicity and Calugareanu invariant// Proc. R. Soc. Lond., 1992, A **439**, 411-429.
27. *Fuller F.B.* The writhing number of a space curve// Proc. Natl. Acad. Sci. USA, 1971, **68**, 815-819.
28. *Pohl W.F.* The self-linking number of a closed space curve// J. Math. Mech., 1968, **17**, 975-985.
29. *Berger M., Field G.B.* The topological properties of magnetic helicity// J. Fluid Mech., 1984, **147**, 133-148.
30. *V. I. Arnold, B. A. Khesin.* Topological Methods in Hydrodynamics//Springer, 1998, 374 pp.
31. *Cornwall J.M.* Speculations on primordial magnetic helicity// Phys. Rev., 1997, D **56**, 6146-6154.
32. *Joyce M., Shaposhnikov M.E.* Primordial magnetic fields, right electrons, and the abelian anomaly// Phys. Rev. Lett., 1997, **79**, 1193-1196; *Giovannini M., Shaposhnikov M.E.* Primordial hypermagnetic fields and the triangle anomaly// Phys. Rev., 1998, D **57**, 2186-2206.
33. *Б. А. Дубровин, С. П. Новиков, А. Т. Фоменко.* Современная геометрия// Наука, Москва, 1986, 760 стр.
34. *П. Рамонд*. Теория поля. Современный вводный курс//Мир, Москва, 1984, 336 стр.
35. *Боголюбов Н.Н.* К теории сверхтекучести. Изв. АН СССР Сер. физ., 1947, **11**, 77-90.
36. *Ricca R.L.* Rediscovery of Da Rios equations// Nature, 1991, **352**, 561-562.
37. *Friedel J., De Gennes P.G., Matricon J.* Nature of the driving force in flux creep phenomena// Appl. Phys. Lett., 1963, **2**, 119-120.
38. *Fetter A.L.* Quantum theory of superfluid vortices. I. Liquid helium II //Phys. Rev. , 1967, **162**, 143-153; Quantum theory of superfluid vortices. II. Type-II superconductors//ibid., 1967, **163**, 390-400.
39. *Greiter M., Wilczek F., Witten E.* Hydrodynamic relations in superconductivity// Mod. Phys. Lett., 1989, B**3**, 903-918.
40. *Greiter M.* Is electromagnetic gauge invariance spontaneously violated in superconductors?//Annals of Physics, 2005, **319**, 217-249, arXiv:cond-mat/0503400v1.
41. *Aitchison I.J.R, Ao P., Thouless D.J., Zhu X.-M.* Effective Lagrangians for BCS Superconductors at T=0//. Phys. Rev., 1995, B**51**, 6531-6535, arXiv:cond-mat/9411047v1.
42. *Schakel A.N.J.* Effective theory of bosonic superfluids// Int. Journ. Mod. Phys., 1994, B**8**, 2021-2-39; Effective field theory of ideal-fluid hydrodynamics// Mod. Phys. Lett. , 1996, B**10**, 999-1010.
43. *Wexler C., Thouless D.J.* Effective vortex vynamics in vuperfluid systems//arXiv:cond-mat/9612059v1.
44. *Vachaspati T., Field G.B.* Electroweak string configurations with baryon number// Phys. Rev. Lett.,1994, **73**, 373-376.

DYNAMICS OF CURVED VORTICES IN NON-RELATIVISTIC FIELD-THEORETIC MODELS

A.A. Kozhevnikov

Laboratory of Theoretical Physics Institute for Mathematics, Novosibirsk
kozhev@math.nsc.ru

Received 21.05.2009

The review is given of the dynamics of curved vortices in nonrelativistic limit of field theoretic models called Abelian Higgs model (AHM) and Goldstone one. The basis of the approach is the derivative expansion of the effective action for local and global vortices (strings). The role of excitations of the modulus and phase of the scalar field and of the vector field emitted and absorbed by the vortex is investigated. Taking the excitations into account is necessary for obtaining the effective action finite at large distances. Equations of motion of the both type of vortices are obtained and solved in case of large and small contour displacements. The behavior of helicity of the gauge field forming the vortex in case of its finite thickness is considered in the AHM framework. The discussed are the contributions to helicity and the dynamics of such topological characteristics as *twist* and *writhe*.