

# ВОЗМОЖНОСТИ СИМВОЛИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В ПРОСТРАНСТВЕ СКОРОСТЬ-КРИВИЗНА: TQ-БИФУРКАЦИИ, СИММЕТРИИ, СИНХРОНИЗАЦИЯ

А.В. Макаренко

*Институт проблем управления РАН*

avm.science@mail.ru

Поступила 28.08.2012

Изложен новый метод символического анализа на основе конечного разбиения пространства «скорость-кривизна». Введён минимальный алфавит, инвариантный к однородным растяжениям и сдвигам изучаемой последовательности. Предложенный способ анализа является вычислительно ориентированным и позволяет детально исследовать форму траекторий и структуру динамики многомерных дискретных последовательностей, отображений, потоков. Для этого определён ряд базовых аналитических характеристик, и понятий: TQ-бифуркация, синхронный домен, и т. п. Показана возможность конструктивного применения метода к задачам исследования: глобальная структура траекторий динамических систем, симметрии динамических процессов и систем, синхронизация хаотических колебаний.

УДК 517.9:514.7

## 1 Введение

Современной парадигмой изучения нелинейных систем с преимущественно хаотическим поведением является эргодический (метрический) подход в котором рассматриваются типичные свойства динамической системы и игнорируются исключительные (редкие) траектории [1]. В этом подходе, в качестве основополагающего представления, используется понятие

меры [2]. Классические величины, как-то: показатели Ляпунова, энтропия Колмогорова-Синая, размерностные характеристики (информационная ёмкость, фрактальная размерность), корреляционный интеграл, использующиеся в теории и практике исследований хаоса, имеют самую непосредственную связь с эргодической теорией.

Хаотические системы, как класс динамических систем, в том числе и с конкретным физическим содержанием [3], относятся к случаю “квазислучайного” поведения [4–6] и для их описания удобно пользоваться топологическими аналогами некоторых понятий вероятностного происхождения [1, 7, 8]. Именно в этом ключе действует и символическая динамика [9, 11], которая наиболее эффективна как раз в ситуациях где детерминированные системы демонстрируют аналогию со случайными процессами [10].

Существующие методы вычислительно ориентированного символического анализа [12–14] в принципе позволяют изучать ряд аспектов хаотических систем, в том числе: странные аттракторы, гиперболичность, структурная устойчивость, управляемость, и т.п. Помимо теоретического аспекта, у символического анализа имеется и прикладное значение. Его активно используют в различных областях: анализ ЭЭГ в нейрофизиологии [15, 16]; разработка телекоммуникационных и связанных протоколов [17]; анализ финансовых индикаторов [18]; разработка сложных систем управления [19]; анализ ЭКГ в кардиологии [20]. Применяемые в этих методах исследования схемы формирования алфавитов, как правило, обладают теми или иными недостатками [21]: неинвариантность алфавита к преобразованиям сдвига и масштаба; неоднозначность разбиения пространства состояний; различные трактовки вероятностных мер при попадании траектории на границу ячейки; эмпирический подбор количества символов в алфавите.

Ранее, в работах автора [21–23], был предложен новый метод символического анализа, через конечное разбиение пространства “скорость-кривизна”, и введен в рассмотрение минимальный алфавит. Подобный подход оказался свободен от некоторых недостатков символического анализа на основе классических алфавитов с разбиением пространства состояний или скоростей. Предложенный метод (символический СТQ-анализ) позволяет детально изучать форму (структуру геометрии) траекторий динамических систем в расширенном пространстве состояний (о важности этой характеристики см. [1, 7, 24, 25]) и конструктивно дополняет существующие подходы к символическому анализу в части вычислительно ориентированных методов.

Настоящая работа продолжает тематику разработки СТQ-анализа, содержит ряд новых результатов и построена следующим образом. В разделе 2 приведено краткое описание формализма СТQ-анализа. Раздел 3 посвящён TQ-бифуркациям в дискретных динамических системах, а раздел 4 содержит описание T-синхронизации хаотических колебаний. В разделе 5 приведены выводы по работе в целом.

## 2 Основные положения символического СТQ-анализа

Введём в рассмотрение модель динамической системы в виде дискретного отображения:

$$\mathbf{s}_{k+1} = \mathbf{f}(\mathbf{s}_k, \mathbf{p}), \quad (1)$$

со свойствами:

$$\mathbf{s} \in S \subset \mathbb{R}^N, \quad \mathbf{p} \in P \subset \mathbb{R}^L, \quad k \in K \subset \mathbb{N}, \quad n = \overline{1, N}, \quad l = \overline{1, L}, \quad k = \overline{1, K},$$

где  $\mathbf{s}$  – переменная состояния динамической системы,  $\mathbf{p}$  – вектор параметров модели,  $N$  – размерность пространства состояний системы,  $K$  – количество итераций эволюции системы. С отображением (1) свяжем также последовательность  $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$  – траекторию эволюции динамической системы. Сформулируем базовую гипотезу.

**Гипотеза 1** Форма траектории последовательности  $\{s_k\}_{k=1}^K$  в пространстве  $S \times K$  адекватно отражает (вскрывает) некие ключевые внутренние свойства самой динамической системы (1), важные с позиций вопросов идентификации, управления и предсказания её эволюции.

Отметим, что набор критических свойств динамических систем весьма разнообразен, и зависит, как от цели и задач исследования, так и от класса, к которому принадлежит система (1). Что касается понятия формы траектории, то введём определение, записанное в его простейшей форме.

**Определение 1** Под характеристиками формы траектории последовательности  $\{s_k\}_{k=1}^K$  в пространстве  $S \times K$  понимаются некие её инварианты, сохраняющиеся при однородных сдвигах и растяжениях в пространстве  $S$  и однородных сдвигах в пространстве  $K$ .

Как показано в работе автора [26], форма траектории динамического процесса вполне описывается двумя величинами: крутизной и кривизной графика траектории. Поэтому для последовательности  $\{s_k\}_{k=1}^K$  рассчитаем две характеристики:  $\alpha_k^{(n)}$  – крутизну, и  $\varphi_{0k}^{(n)}$  – кривизну графика траектории  $n$ -фазовой переменной системы при  $k$ -м отсчёте в пространстве  $S \times K$ :

$$\alpha_k^{(n)} = c_{ss}^{(n)} (s_{k+1}^{(n)} - s_k^{(n)}), \quad \varphi_{0k}^{(n)} = c_{as}^{(n)} \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg} \alpha_k^{(n)} - \operatorname{arctg} \alpha_{k-1}^{(n)}}{2}. \quad (2)$$

Масштабные коэффициенты  $c_{ss}^{(n)}, c_{as}^{(n)} > 0$ , по умолчанию  $c_{ss}^{(n)} = c_{as}^{(n)} = 1$ . Отметим, что  $\varphi_0^{(n)}$  – это дискретный аналог динамической кривизны [22], введённой автором в работе [26].

Закодируем величины (2) через конечный набор символов [22]:

$$C_k^\alpha | n = \begin{cases} \text{U} & \alpha_k^{(n)} > \delta_\alpha^+, \\ \text{D} & \alpha_k^{(n)} < \delta_\alpha^-, \\ \text{Z} & \alpha_k^{(n)} \in [\delta_\alpha^-, \delta_\alpha^+], \end{cases}$$

$$C_k^{\bar{\varphi}} | n = \begin{cases} \text{L} & \varphi_{0k}^{(n)} \in [\delta_\varphi^-, \delta_\varphi^+] \vee C_k^\alpha | n = C_{k-1}^\alpha | n = \text{Z}, \\ \text{P} & \varphi_{0k}^{(n)} > \delta_\varphi^+ \wedge \{C_k^\alpha | n \neq \text{Z} \vee C_{k-1}^\alpha | n \neq \text{Z}\}, \\ \text{N} & \varphi_{0k}^{(n)} < \delta_\varphi^- \wedge \{C_k^\alpha | n \neq \text{Z} \vee C_{k-1}^\alpha | n \neq \text{Z}\}, \end{cases} \quad (3)$$

$$C_k^\varphi | n = \begin{cases} \text{L} & \varphi_{0k}^{(n)} \in [\delta_\varphi^-, \delta_\varphi^+] \vee C_k^\alpha | n = C_{k-1}^\alpha | n = \text{Z}, \\ \text{E} & \varphi_k^{(n)} \notin [\delta_\varphi^-, \delta_\varphi^+] \wedge \{ \{C_k^\alpha | n = \text{D} \wedge C_{k-1}^\alpha | n = \text{U}\} \\ & \vee \{C_k^\alpha | n = \text{U} \wedge C_{k-1}^\alpha | n = \text{D}\} \}, \\ \text{B} & \text{иначе.} \end{cases}$$

Параметры  $\delta_\alpha^\mp$  и  $\delta_\varphi^\mp$  являются управляющими, и позволяют расширить аналитические возможности алфавитов [22], по умолчанию  $\delta_\alpha^\mp = \delta_\varphi^\mp = 0$ .

Из первичных символов  $C^\alpha | n, C^\varphi | n$  и  $C^{\bar{\varphi}} | n$  сформируем термы  $T^{\alpha\varphi} | n$  – символы описывающие форму траектории  $n$ -й переменной системы в расширенном пространстве состояний:

$$T^{\alpha\varphi} | n : \begin{array}{c} \text{U} \\ \text{Z} \\ \text{D} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|} \hline \text{B} & \text{L} & \text{E} \\ \hline \text{T5} & \text{T2} & \text{T7} \\ \hline \text{T4} & \text{T0} & \times \\ \hline \text{T3} & \text{T1} & \text{T6} \\ \hline \end{array}, \quad T^{\alpha\varphi} | n : \text{Tm} \begin{array}{|c|c|} \hline \text{P} & \text{N} \\ \hline \text{TmP} & \text{TmN} \\ \hline \end{array}, \quad (4)$$

$m = 3, 4, 5.$

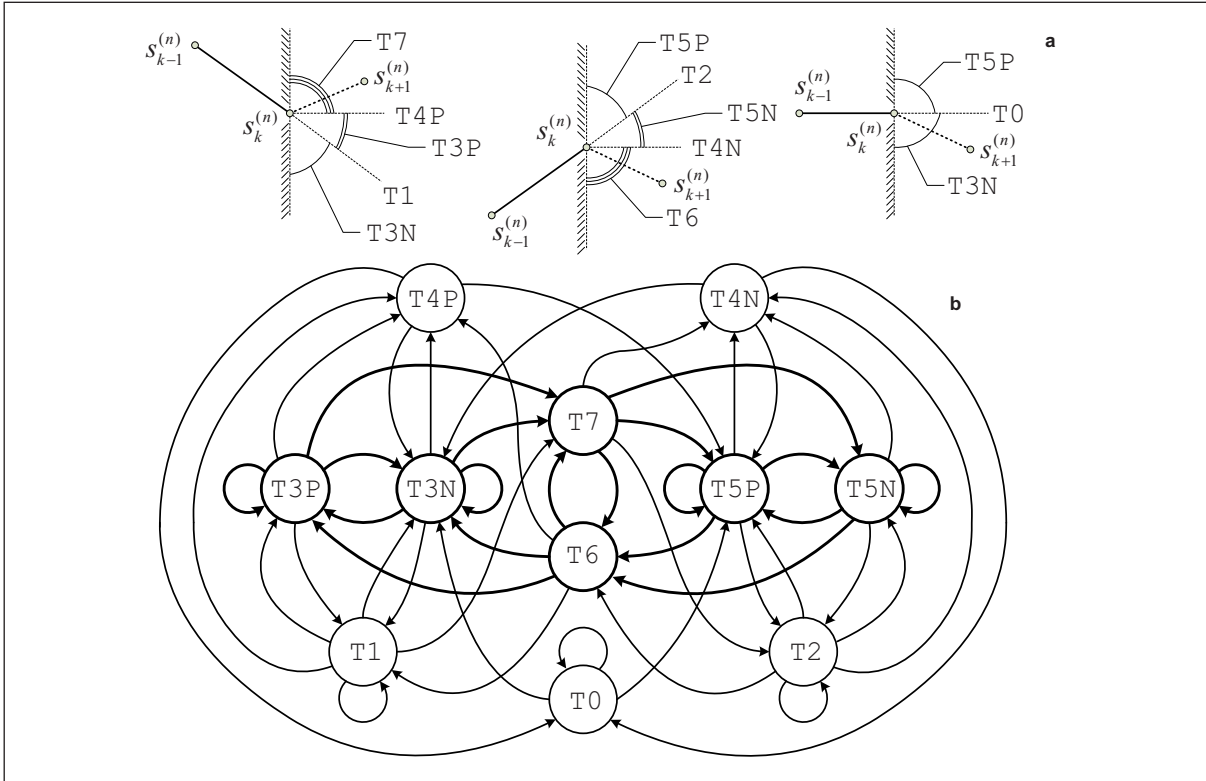


Рис. 1: (а) – графические диаграммы, иллюстрирующие геометрию термов  $T^{\alpha\varphi}|n$ ; (б) – граф допустимых переходов между символами  $T^{\alpha\varphi}|n$  (жирным выделен подграф, не содержащий Z и/или L).

здесь  $\times$  – недопустимая комбинация символов в терме. Таким образом, полный алфавит, кодирующий форму траектории  $n$ -й фазовой переменной дискретной динамической системы, есть следующее множество символов:

$$T_o^{\alpha\varphi} = \{T_0, T_1, T_2, T_3N, T_3P, T_4N, T_4P, T_5N, T_5P, T_6, T_7\}. \quad (5)$$

На рисунке 1а изображены графические диаграммы, иллюстрирующие геометрию символов  $T^{\alpha\varphi}|n$  в расширенном фазовом пространстве переменной  $s^{(n)}$  в момент  $k$ . Эти диаграммы также наглядно раскрывают суть символов  $C^{\varphi}|n$ : L – Line; E – Extremum; B – Bend.

Переход между термами  $T_k^{\alpha\varphi}|n \rightarrow T_{k+1}^{\alpha\varphi}|n$  обозначим через  $Q_k^{\alpha\varphi}|n$ . Этот переход кодируется символами  $Qij$ , где  $i, j$  – это составные части кодов  $Ti_k|n, Tj_{k+1}|n$ , определённых матрицами (4). На рисунке 1б показан граф допустимых переходов между символами  $T^{\alpha\varphi}|n$ . Жирным выделен подграф допустимых переходов для термов  $T^{\alpha\varphi}|n$  не содержащих в своём составе Z и/или L символов. Все допустимые переходы составляют множество символов  $Q_o^{\alpha\varphi}$ .

Строго говоря, исходя из вида функций (2), для расчёта символьных величин  $C^{\alpha}|n, C^{\varphi}|n, C^{\bar{\varphi}}|n, T^{\alpha\varphi}|n$  и  $Q^{\alpha\varphi}|n$  исходная последовательность должна иметь вид  $\{s_k\}_{k=0}^{K+1}$ , но для дальнейшего изложения этот момент не является принципиальным. Кроме того, вид (2), в принципе, избыточен для вычисления указанных символьных величин, но весьма полезен при вычислении различных аналитических характеристик траектории динамической системы [22].

Введём в рассмотрение ориентированный конечный граф (точнее псевдоорграф без кратных дуг, но с петлями):

$$\Gamma^{TQ}|n = \langle V^{\Gamma}|n, E^{\Gamma}|n \rangle, \quad V^{\Gamma}|n \subseteq T_o^{\alpha\varphi}, E^{\Gamma}|n \subseteq Q_o^{\alpha\varphi}, \quad (6)$$

у которого вершины заданы множеством  $V^\Gamma|_n$ , а дуги –  $E^\Gamma|_n$ . Граф  $\Gamma^{TQ}|_n$  назовём символическим TQ-образом динамической системы по её  $n$ -й фазовой переменной.

С целью количественного оценивания характеристик формы траектории последовательности  $\{s_k^{(n)}\}_{k=1}^K$  в пространстве  $S^{(n)} \times K$  введём меру  $\Delta^*|_n$  – частоту появления в  $\{s_k^{(n)}\}$  символа  $*$  ( $0 \leq \Delta^*|_n \leq 1$ ):

$$\Delta^*|_n = \lim_{K \rightarrow \infty} \frac{|M^*|_n|}{U(K)}, \quad (7)$$

здесь  $|\circ|$  – мощность множества,  $*$  – некий символ, из которого состоит мультимножество  $M^*|_n$ :

$$\Delta^\alpha|_n : \quad M^*|_n \ni C_k^\alpha|_n : C_k^\alpha|_n = *, * = U, Z, D, \quad U(K) = K, \quad (8a)$$

$$\Delta^\varphi|_n : \quad M^*|_n \ni C_k^\varphi|_n : C_k^\varphi|_n = *, * = L, B, E, \quad U(K) = K - 1, \quad (8б)$$

$$\Delta^{\bar{\varphi}}|_n : \quad M^*|_n \ni C_k^{\bar{\varphi}}|_n : C_k^{\bar{\varphi}}|_n = *, * = L, N, P, \quad U(K) = K - 1, \quad (8в)$$

$$\Delta^T|_n : \quad M^*|_n \ni T_k^{\alpha\varphi}|_n : T_k^{\alpha\varphi}|_n = *, * = T_o^{\alpha\varphi}, \quad U(K) = K - 1, \quad (8г)$$

$$\Delta^Q|_n : \quad M^*|_n \ni Q_k^{\alpha\varphi}|_n : Q_k^{\alpha\varphi}|_n = *, * = Q_o^{\alpha\varphi} \setminus Q, \quad U(K) = K - 2, \quad (8д)$$

Отметим, что вычисление величин (8г) и (8д) делает граф  $\Gamma^{TQ}|_n$  – взвешенным и позволяет исследовать марковские характеристики последовательности  $\{T_k^{\alpha\varphi}|_n\}_{k=1}^K$  [11]. Дополнительную информацию о свойствах  $\Delta^*$ , а также о других аналитических характеристиках см. в разделе 3 и статье [22].

Таким образом, определён минимальный, но, в определённом смысле, полный набор символов и характеристик, покомпонентно описывающих форму (структуру геометрии) многомерных траекторий дискретных отображений в пространстве  $S^{(n)} \times K$ . Тем не менее, изолированное изучение отдельных компонент многомерного процесса не позволяет до конца изучить его структуру в целом, так как в этом случае отсутствует информация о межкомпонентной динамике. Чтобы снять это ограничение введём в рассмотрение интегрированное описание последовательности  $\{s_k\}_{k=1}^K$ :

$$\begin{aligned} C_k^* &= [C_k^*|_1 \dots C_k^*|_N], \quad * = \alpha, \varphi, \bar{\varphi}, \\ T_k^{\alpha\varphi} &= [T_k^{\alpha\varphi}|_1 \dots T_k^{\alpha\varphi}|_N], \quad Q_k^{\alpha\varphi} = [Q_k^{\alpha\varphi}|_1 \dots Q_k^{\alpha\varphi}|_N]. \end{aligned} \quad (9)$$

Символы  $C^*$  кодируются словами  $i_1 \dots i_N$ , где  $i_n$  – это символы  $C^*|_n$ . Терм  $T^{\alpha\varphi}$  кодируется через  $T i_1 \dots i_N$ , где  $i_n$  – это составная часть кодов  $T i$ , определённых матрицами (4), для  $n$ -ой компоненты последовательности. Соответственно,  $Q_k^{\alpha\varphi}$  – переход между термами  $T_k^{\alpha\varphi} \rightarrow T_{k+1}^{\alpha\varphi}$  – кодируется как  $Q i_1 \dots i_N j_1 \dots j_N$ , где  $i_n, j_n$  – это составные части кодов  $T i$  и  $T j$ ,  $n$ -ой компоненты последовательности, определённых матрицами (4), для состояний  $k$  и  $k + 1$ , соответственно. Для полного алфавита  $T_o^{\alpha\varphi}|_N$ , кодирующего форму траектории последовательности  $\{s_k\}_{k=1}^K$  в целом, справедливо условие:  $|T_o^{\alpha\varphi}|_N| = 11^N$ .

Отметим, что из вектора  $\mathbf{s}$  возможно сформировать его проекции в подпространства исходного пространства  $S$  – множество векторов  $[s^u]_u$ ,  $u = 1, 2^N - 1$ , содержащих различные комбинации компонент исходной последовательности и для них определить вышеперечисленные величины и характеристики. Эта совокупность позволяет детально изучать свойства многомерной траектории  $\{s_k\}_{k=1}^K$  как цельного объекта динамики уже в пространстве  $S \times K$ .

### 3 TQ-бифуркации символического образа

Анализ символического TQ-образа динамической системы, посредством исследования структурных и метрических характеристик взвешенного графа  $\Gamma^{TQ}$ , способен дать информацию о различных качественных характеристиках её динамики. На основе этих данных

возможно определить наличие релаксационных колебаний и их характер, присутствие режимов обострения или успокоения динамики системы, и т. п. [22]. Весьма важная информация, о структуре последовательности, содержится в асимметриях графа (как качественных, так и количественных по параметрам  $\Delta^*$ ) относительно пар вершин и рёбер, связанных отношением инвертирования фазовых переменных системы  $s_k^{(n)} \rightarrow -1 \cdot s_k^{(n)}$ . В этом случае замена символов  $T_k^{\alpha\varphi}|_n$  и  $Q_k^{\alpha\varphi}|_n$  осуществляется в соответствии с таблицей 1. Отметим, что схема замены символов  $Q_k^{\alpha\varphi}|_n$  при инвертировании отсчётов  $s_k^{(n)}$  без труда

Таблица 1: Схема замены символов  $T_k^{\alpha\varphi}|_n$ , при  $s_k^{(n)} \rightarrow -1 \cdot s_k^{(n)}$

+1	T0	T1	T2	T3N	T3P	T4N	T4P	T5N	T5P	T6	T7
-1	T0	T2	T1	T5P	T5N	T4P	T4N	T3P	T3N	T7	T6

формируется из данных таблицы 1.

Анализ вышеперечисленных свойств динамики систем может проводиться как с позиций эргодической (метрической) теории, так и с позиций теории информации, т. е. либо на уровне многообразия типичных траекторий в “среднем”, либо на уровне отдельных “редких” траекторий [2, 5, 11].

Ключевую роль в анализе свойств динамической системы (в излагаемом здесь аспекте) играет качественное изменение структуры её символического образа  $\Gamma^{TQ}$ , напрямую связанное с TQ-бифуркациями в самой системе. По своей сути, эти бифуркации подразделяются на три рода (см. рис. 2):

I – изменяется набор термов  $T^{\alpha\varphi}$ , набор переходов  $Q^{\alpha\varphi}$  между неизменными термами остаётся неизменным.

II – набор термов  $T^{\alpha\varphi}$  остаётся постоянным, но изменяется набор переходов  $Q^{\alpha\varphi}$  между ними.

III – изменяется как набор термов  $T^{\alpha\varphi}$ , так и набор переходов  $Q^{\alpha\varphi}$  между неизменными термами.

К примеру в логистическом отображении (см. раздел 3.2) присутствуют TQ-бифуркации всех трёх родов. Отметим, что в настоящий момент ведутся исследования на предмет поиска возможных запретов на существование TQ-бифуркаций различных родов у тех или иных отображений типа (1), в зависимости от их вида (структуры).

Рис. 2: Графические диаграммы, иллюстрирующие суть трёх родов TQ-бифуркаций.

### 3.1 Аналитическое построение карт TQ-бифуркаций

В работах автора [21, 22] приведены вычислительно-ориентированные способы нахождения TQ-бифуркаций символического образа динамической системы. Этот подход оправдан, когда в распоряжении исследователя есть только последовательность  $\{s_k\}_{k=1}^K$  – траектория динамики системы. Если же известна сама модель системы, в виде отображения (1), тогда, в большинстве случаев, предпочтительно аналитическое (численно-аналитическое) построение карт TQ-бифуркаций в пространстве  $S \times P$ . Это позволяет точнее и более детально исследовать качественные свойства динамической системы с точки зрения формализма СТQ-анализа.

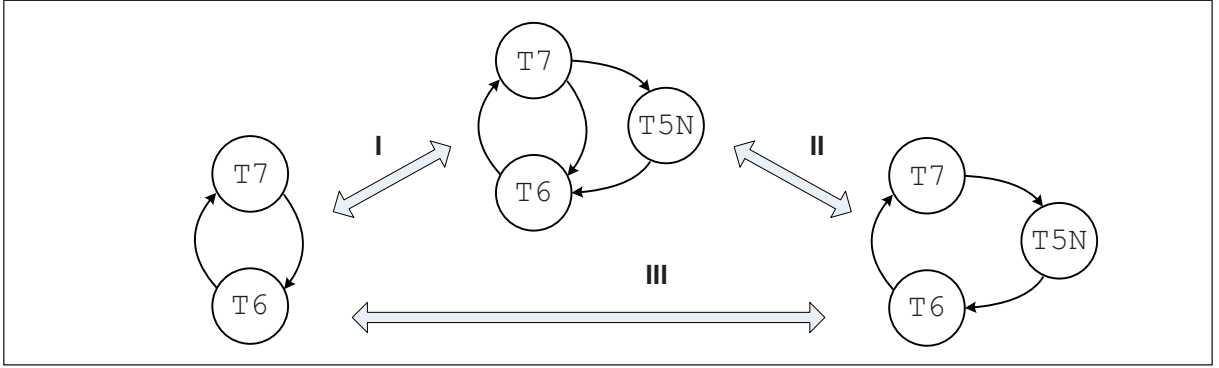


Рис. 2: Графические диаграммы, иллюстрирующие суть трёх родов TQ-бифуркаций

Определим  $k$ -ю итерацию отображения (1) через выражение:

$$\mathbf{s}_k = \mathbf{f}^k(\mathbf{s}_0, \mathbf{p}) = \mathbf{f}(\mathbf{f}(\dots \mathbf{f}(\mathbf{s}_0, \mathbf{p}), \mathbf{p}), \mathbf{p}), \quad \mathbf{f}^0(\mathbf{s}_0, \mathbf{p}) \equiv \mathbf{s}_0, \quad (10)$$

и введём в рассмотрение величины:

$$\begin{aligned} \alpha'_k(\mathbf{s}, \mathbf{p}) &= \mathbf{c}_{ss} \left[ \mathbf{f}^k(\mathbf{s}, \mathbf{p}) - \mathbf{f}^{k-1}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \right], \\ \varphi'_{0k}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) &= \mathbf{c}_{as} \operatorname{tg} \frac{\arctg \alpha_k(\mathbf{s}, \mathbf{p}) - \arctg \alpha_{k-1}(\mathbf{s}, \mathbf{p})}{2}, \end{aligned} \quad (11)$$

здесь  $\mathbf{c}_{ss}$  и  $\mathbf{c}_{as}$  имеют вид диагональных матриц.

По аналогии с (3) и (4) введём отношения:

$$\begin{aligned} T_k^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n &= T \left[ \alpha_{k-1}^{(n)}(\mathbf{s}, \mathbf{p}), \alpha_k^{(n)}(\mathbf{s}, \mathbf{p}), \varphi_k^{(n)}(\mathbf{s}, \mathbf{p}) \right], \\ Q_k^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n &= Q \left[ T_k^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n, T_{k+1}^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

Будем считать что отображение  $\mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  гладкое относительно  $\mathbf{s}$  и непрерывно относительно  $\mathbf{p}$ . Пусть  $B_{AS}(\mathbf{p})$  – внешняя оболочка  $S_A(\mathbf{p}) \neq \emptyset$  – притягивающего множества (аттрактора) отображения (1), т. е.  $B_{AS} = \operatorname{Conv} S_A$  и  $B_{AS} \supset S_A$ , а  $B_{AS}^{in}(\mathbf{p})$  – внутренняя оболочка аттрактора (для иллюстрации см. рис. 3а). Разделение  $B_{AS}(\mathbf{p})$  и  $B_{AS}^{in}(\mathbf{p})$  вызвано рядом причин, в их числе и то, что внешняя оболочка, как правило, находится прощ, нежели внутренняя.

Рассмотрим три итерации отображения  $\mathbf{f}(\mathbf{s}, \mathbf{p})$ :  $k = \overline{1, 3}$  (для иллюстрации см. рис. 3б), и на их основе построим две карты термов  $T_1^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n$ ,  $T_2^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n$  и одну карту перехода  $Q_1^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n$ .

Как уже отмечалось в работе [22], термы  $\{T_0, T_1, T_2, T_4N, T_4P\}$ , для отображения вида (1), являются своего рода сепаратрисами разделяющими области динамики системы с качественно различной формой траекторий (см. рис. 1а). Поэтому решим уравнения ( $k' = \overline{1, 2}$ ):

$$Sp_{k'}^*(\mathbf{p})|_n = \{ \mathbf{s} : T_{k'}^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n = * \}, \quad * = T_0, T_1, T_2, T_4N, T_4P, \quad (13)$$

и получим набор сепаратрис  $Sp_{k'}^*|_n$ , разделяющих множество значений  $(\mathbf{s}, \mathbf{p})$  на области внутри которых динамика системы (при фиксированном  $k'$ ) характеризуется единственным термом  $T^{\alpha\varphi}|_n$ . Для иллюстрации см. рис. 3а.

Для нахождения собственно точек TQ-бифуркации решим уравнения:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_{k'}^*|_n &= \{ \mathbf{p} : Sp_{k'}^*(\mathbf{p})|_n = B_{AS}(\mathbf{p}) \}, \\ \mathbf{p}_{k'}^*|_n &= \{ \mathbf{p} : Sp_{k'}^*(\mathbf{p})|_n = B_{AS}^{in}(\mathbf{p}) \}. \end{aligned} \quad (14)$$



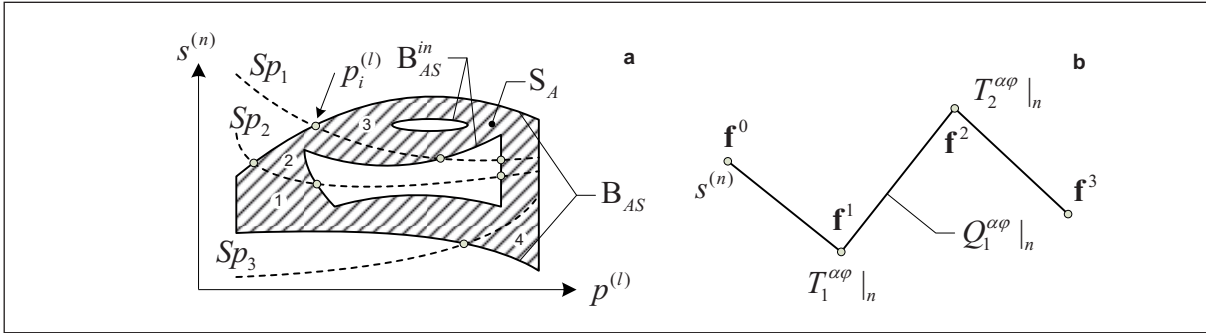


Рис. 3: (а) – иллюстрация процесса построения карт ТQ-бифуркаций ( $Sp_{1,2,3}$  – сепаратрисы, определяемые уравнениями (13);  $Sp_i^{(l)}$  – точки бифуркаций, определяемые уравнениями (14); цифрами 1-4 в кружках обозначены области пространства  $S^{(n)} \times P^{(l)}$ , однородные по  $T^{\alpha\varphi}|_n$ ); (б) – иллюстрация процесса построения карт термов  $T^{\alpha\varphi}|_n$  и перехода  $Q^{\alpha\varphi}|_n$ .

Изучение карт термов  $T_1^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n$ ,  $T_2^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n$  и перехода  $Q_1^{\alpha\varphi}(\mathbf{s}, \mathbf{p})|_n$  в окрестности точки бифуркации позволяет определить характер изменений по составу термов и/или переходов, и, соответственно, определить род ТQ-бифуркации.

### 3.2 Логистическое отображение

В работе [22] посредством изложенного в разделе 2 подхода было численно исследовано логистическое отображение:

$$s_{k+1} = 4\lambda s_k(1 - s_k), \quad s \in (0, 1), \quad \lambda \in (0, 1], \quad k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}. \quad (15)$$

Было установлено, что справа от  $\lambda_\infty = 0.892486418\dots$  – предельной точки удвоений периода [5] – форма хаотических траекторий логистического отображения существенно различна и крайне асимметрична (с позиций структуры символического ТQ-образа и величин  $\Delta^*$ ). Обнаружены четыре критических значения параметра  $\lambda$  при которых происходит качественная перестройка геометрической структуры траектории в пространстве  $S \times K$  [22]:  $\lambda_B$  – среди термов Т6 и Т7 впервые появляется терм Т5, в виде субтерма Т5N;  $\lambda_{Т5P}$  – впервые появляется субтерм Т5P;  $\lambda_{55}$  – впервые появляется переход Т5  $\rightarrow$  Т5, в виде перехода Т5P  $\rightarrow$  Т5N;  $\lambda_{P5P}$  – впервые появляется переход Т5P  $\rightarrow$  Т5P. Известно [5], что в точке  $\lambda_{3c} = 1/4 + 1/\sqrt{2}$ , в колебаниях отображения (15) реализуется цикл периода 3 (точка касательной бифуркации, переход к хаосу через перемежаемость). Из данных работы [22] следует, что в этот момент происходит исчезновение субтерма Т5N и перехода Т7  $\rightarrow$  Т6, т. е. происходит ТQ-бифуркация III рода. Вопросы о механизмах этих явлений остались на тот момент без ответа. Поэтому в данной работе сделана попытка несколько прояснить ситуацию уже с привлечением методов из раздела 3.1.

На рисунке 4 показаны карты термов, которые размечены  $B_{AS}$  – внешней границей аттрактора логистического отображения. Из этих рисунков наглядно видно когда и почему появляются различные термы  $T^{\alpha\varphi}|_n$  и переходы  $Q^{\alpha\varphi}|_n$  в траекториях логистического отображения.

Решение уравнений пересечений сепаратрис  $\{T_0, T_1, T_2, T_4N, T_4P\}$  с внешней оболочкой притягивающего множества, позволило найти также точные значений указанных выше бифуркационных значений параметра  $\lambda$ :



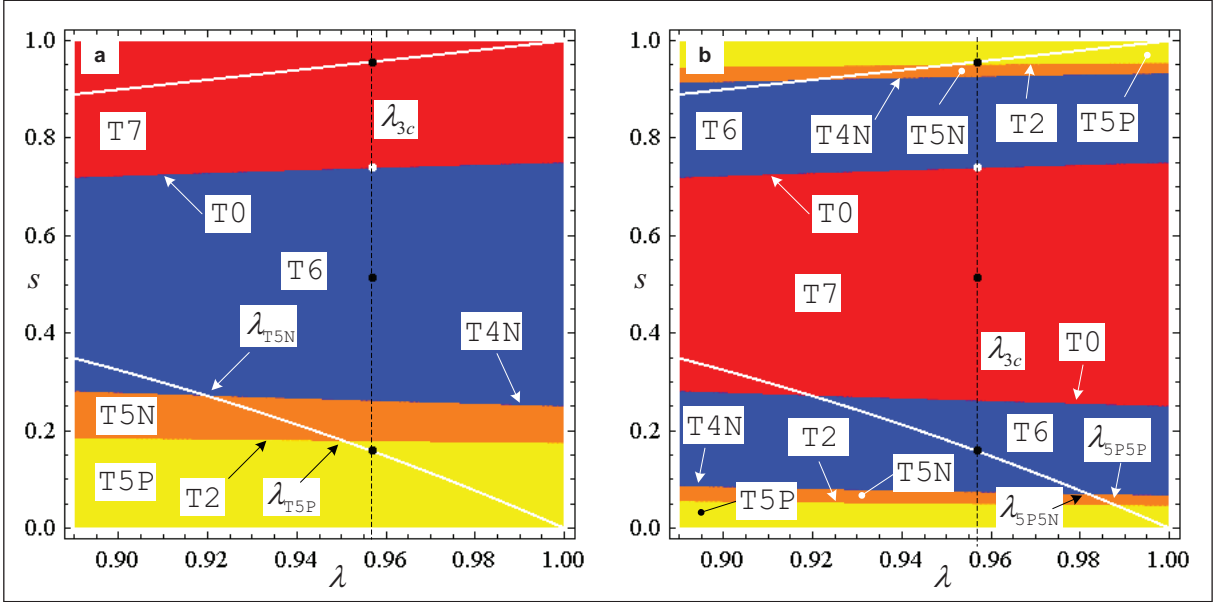


Рис. 4: Карты термов  $T_1^{\alpha\varphi}(s, \lambda)$  (a) и  $T_2^{\alpha\varphi}(s, \lambda)$  (b); белыми линиями показана  $V_{AS}$ ; чёрные точки – это цикл периода 3, белая точка – точка неустойчивого равновесия.

$$\begin{aligned}\lambda_{T5N} &= \lambda_B = \text{Root} [8\lambda^3 - 4\lambda^2 - 2\lambda - 1, 1], \\ \lambda_{T5N} &= \frac{1}{6} \left[ 1 + (19 - 3\sqrt{33})^{1/3} + (19 + 3\sqrt{33})^{1/3} \right], \\ \lambda_{T5N} &= 0.9196433776 \dots\end{aligned}\quad (16)$$

$$\begin{aligned}\lambda_{T5P} &= \frac{1}{12} (\text{Root} [\lambda^8 - 108\lambda^6 + 5022\lambda^4 - 160380\lambda^2 - 570807, 2] + 3), \\ \lambda_{T5P} &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2\sqrt{2}\sqrt[4]{3}} \left( \frac{3\sqrt{3}}{2} + c + \sqrt{6c^{-1}\sqrt{3} - c^2 - 3} \right)^{1/2}, \\ a &= \left( \frac{2}{11 + 3\sqrt{69}} \right)^{1/3}, \quad b = 2^{2/3} (11 + 3\sqrt{69})^{1/3}, \quad c = \sqrt{b - 10a - 1}, \\ \lambda_{T5P} &= 0.9505328097 \dots\end{aligned}\quad (17)$$

$$\begin{aligned}\lambda_{5P5N} &= \lambda_{55} = \text{Root} [128\lambda^7 - 192\lambda^6 + 32\lambda^5 + 48\lambda^4 - 8\lambda^3 - 4\lambda^2 - 2\lambda - 1, 1], \\ \lambda_{5P5N} &= 0.9819342504 \dots\end{aligned}\quad (18)$$

$$\begin{aligned}\lambda_{5P5P} &= \frac{1}{4} \left( [4 \text{Root} [\lambda^8 - 4\lambda^7 + 6\lambda^6 - 6\lambda^5 + 6\lambda^4 - 4\lambda^3 + \right. \\ &\quad \left. + 2\lambda^2 - 2\lambda - 1, 2] + 1]^{1/2} + 1 \right), \\ \lambda_{5P5P} &= 0.9880824703 \dots\end{aligned}\quad (19)$$

Здесь функция  $\text{Root}[\text{polynomial}, \text{the root number}]$  – стандартная функция системы компьютерной алгебры Wolfram Mathematica.

Важность результатов (16) – (19) состоит в том, что они позволяют уточнить обнаруженные в работе [22] нетривиальные закономерности первого появления термов  $T^{\alpha\varphi}_n$  и пере-

ходов  $Q^{\alpha\varphi}|_n$  в логистическом отображении, увязанные на константу Фейгенбаума [5], определяющей масштабный фактор бифуркаций удвоения периодов для квадратичных отображений.

Данные приведенные на рисунке 4 наглядно иллюстрируют недостаточность изучения областей пересечения сепаратрис только с внешней оболочкой аттрактора. Так при  $\lambda = \lambda_{3c}$  у отображения (15) существует устойчивый цикл периода 3 и реализуется переход к хаосу через перемежаемость. В точке касательной бифуркации, где реализуется переход: “хаос”  $\Leftrightarrow$  “цикл периода 3”, также происходит TQ-бифуркация III-го рода, см. рис. 4, но её обнаружение возможно лишь при изучении областей пересечения сепаратрис с  $B_{AS}^{in}$  – внутренней оболочкой аттрактора.

## 4 Т-синхронизация хаотических колебаний

### 4.1 Общая идея и интегральный коэффициент Т-синхронности

Синхронизация – принадлежит к числу фундаментальных понятий теории нелинейной динамики и теории хаоса, оно широко распространено в природе, науке, технике и в обществе [27]. Одно из важных проявлений этого феномена – это синхронизация хаотических колебаний [28]. Данное явление экспериментально наблюдалось в различных физических приложениях (см. [3, 27–29] и приведённые там ссылки): радиотехнические генераторы, механические системы, лазеры, электрохимические осцилляторы, плазма и газовый разряд, квантовые системы. Изучение данного явления является весьма важным также с точки зрения его применения к передаче информации [30], криптографическому шифрованию [31] с помощью детерминированных хаотических колебаний и к квантовым вычислениям [29, 32].

Синхронизация хаотических колебаний подразделяется на следующие основные виды: обобщённая [33]; полная [34]; противофазная [35]; с запаздыванием [36]; частотная [37]; фазовая [38]; на уровне временных масштабов [39]. Под каждый из них разработан соответствующий аналитический аппарат и методы диагностики. Тем не менее продолжают активные исследования, направленные, с одной стороны, на рассмотрение разных видов синхронизации с единых позиций, а, с другой – поиск новых видов синхронного поведения, не укладывающихся в означенные.

В данной работе изложен, впервые представленный в работе автора [23], новый подход к оцениванию и анализу синхронизации хаотических систем в аспекте форм их траекторий в расширенном пространстве фазовых переменных. Забегая вперёд отметим, что предложенный метод исследования синхронизации, основанный на T-символьном представлении, позволяет анализировать синхронизацию в сложных ансамблях сильно нестационарных и неидентичных осцилляторов больших размерностей с произвольной конфигурацией и топологией сети (решётки). Далее, для определённости изложения, под  $n$ -й компонентой последовательности  $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$  будем понимать некую фазовую переменную некоей  $n$ -й динамической системы. Кроме того, положим, что с  $k$ -м отсчётом связан момент времени  $t_k$ ,  $t_k \in T \subset \mathbb{R}$ .

Итак, введём определение.

**Определение 2** Компоненты последовательности  $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$  являются T-синхронными по отсчёту  $k$ , если для соответствующей ей последовательности  $\{T_k^{\alpha\varphi}\}_{k=1}^K$  выполняется равенство  $J_{sym}^{\alpha\varphi} [T_k^{\alpha\varphi}] = 1$ , где

$$J_{sym}^{\alpha\varphi} [T_k^{\alpha\varphi}] = \begin{cases} 1 & T_k^{\alpha\varphi}|_1 = \dots = T_k^{\alpha\varphi}|_n = \dots = T_k^{\alpha\varphi}|_N, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (20)$$

Таким образом, анализируемые, на предмет T-синхронизации, конфигурации систем и их фазовых переменных определяются схемой комплектования  $n$ -х компонент в последовательности  $\{\mathbf{s}_k\}_{k=1}^K$  и структурой равенства в функции (20).

Принимая во внимание возможность наличия противофазной синхронизации [35] между системами, необходимо также рассмотреть все возможные варианты инвертирования их фазовых переменных:  $s_k^{(n)} \rightarrow -1 \cdot s_k^{(n)}$ . В этом случае для  $n$ -й системы замена символов  $T_k^{\alpha\varphi}|_n$  в  $k$ -м отсчёте происходит по схеме приведённой в таблице 1. Каждый вариант инвертирования обозначим номером  $m$ ,  $m = \overline{1, 2^{N-1}}$ .

Синхронизация между системами может наступать и в лаг-режиме [36]. Для её обнаружения необходимо подвигать относительно друг друга фазовые траектории систем:

$$\left\{ T_k^{\alpha\varphi}|_1 \rightarrow T_{k+h_1}^{\alpha\varphi}|_1, \dots, T_k^{\alpha\varphi}|_N \rightarrow T_{k+h_N}^{\alpha\varphi}|_N \right\}. \quad (21)$$

Причём на значения сдвигов наложены ограничения:  $0 \leq h_n \ll K$ .

Так как противофазная синхронизация и лаг-синхронизация могут присутствовать вместе, то при расчёте частного интегрального коэффициента синхронности учтём это обстоятельство:

$$\delta_{m,\mathbf{h}}^{\alpha\varphi} = \frac{1}{K^* + 1 - k^*} \sum_{k=k^*}^{K^*} J[T_k^{\alpha\varphi}|\{m, \mathbf{h}\}], \quad (22)$$

где:  $k^* = 1 + \max(h_1, \dots, h_N)$ ,  $K^* = K + \min(h_1, \dots, h_N)$ .

Исходя из частного, рассчитаем полный интегральный коэффициент синхронности систем:

$$\delta^{\alpha\varphi} = \max_m \max_{\mathbf{h}} \delta_{m,\mathbf{h}}^{\alpha\varphi}, \quad 0 \leq \delta^{\alpha\varphi} \leq 1, \quad (23)$$

т. е. выберем такую комбинацию сдвигов между траекториями систем и варианта инвертирования их фазовых переменных, которые, в совокупности, доставляют максимальное количество отсчётов  $k$  в последовательности  $\{T_k^{\alpha\varphi}\}_{k=1}^K$ , отвечающих условию  $J_{sym}^{\alpha\varphi}[T_k^{\alpha\varphi}] = 1$ .

Важно отметить, что предлагаемый анализатор синхронности оценивает уровень полной синхронизации [34], обнаруживает противофазную [35] и лаг-синхронизацию [36] именно в алфавитном представлении  $T^{\alpha\varphi}$ , так как это следует из условия синхронизации  $J_{sym}^{\alpha\varphi}[T_k^{\alpha\varphi}] = 1$ . Но по смыслу символов  $T^{\alpha\varphi}|_n$  полная синхронизация на уровне отсчётов  $T_k^{\alpha\varphi}$  не есть полная синхронизация на уровне  $\mathbf{s}_k$  – отсчётов самой последовательности. Поэтому появляется потенциальная возможность конструктивного применения предложенного анализатора к вопросам изучения обобщённой синхронизации [33].

## 4.2 Временная структура

Введённая через (23) величина  $\delta^{\alpha\varphi}$  характеризует синхронность изучаемых систем в среднем на рассматриваемом периоде времени  $t_K - t_1$ . Но зачастую исследователя может интересовать временная структура синхронизации систем. Под этой структурой будем понимать всплески синхронного поведения фазовых переменных систем, в промежутках между которыми уровень синхронности характеризуется малой величиной, т.е. перемежаемое поведение [24, 25]. Поэтому введём понятие *синхронного домена*.

**Определение 3** *Синхронный домен  $SD$  – это совокупность отсчётов последовательности  $\{T_k^{\alpha\varphi}\}_{k=1}^K$ , для которых справедливо условие:*

$$SD_r : \left\{ J_{sym}^{\alpha\varphi}[T_{k'}^{\alpha\varphi}] = 1, J_{sym}^{\alpha\varphi}[T_{k^-}^{\alpha\varphi}] = 0 \vee k^- = 0, \right. \\ \left. J_{sym}^{\alpha\varphi}[T_{k^+}^{\alpha\varphi}] = 0 \vee k^+ = K + 1 \right\}, \quad (24)$$

где  $k' = \overline{b_r^{SD}, b_r^{SD} + L_r^{SD}}$ ,  $k^- = b_r^{SD} - 1$ ,  $k^+ = b_r^{SD} + L_r^{SD} + 1$ ,  $r$  – номер домена,  $r = \overline{1, R^{SD}}$ , причём  $R^{SD} \leq (K + 1) \operatorname{div} 2$ .

Таким образом домен  $SD_r$  описывается двумя параметрами:  $b_r^{SD}$  – моментом появления и  $L_r^{SD}$  – длиной, причём  $L_r^{SD} \leq K$ .

Для описания временной структуры синхронизации систем рассчитаем функцию спектральной плотности синхронных доменов  $SD$ :

$$H^{SD} [L^{SD}] = \sum_{r=1}^{R^{SD}} \delta[L_r^{SD}, L^{SD}], \quad (25)$$

где  $\delta[o, \circ]$  – символ Кронекера,  $L^{SD} = \overline{1, K}$ . Дополнительно определим  $E_{cnd}^{SD}$  – условную энтропию структуры синхронных доменов, при  $\delta^{\alpha\varphi} > 0$ :

$$E_{cnd}^{SD} = - \sum_{i=1}^K P^{SD} [i] \ln P^{SD} [i], \quad P^{SD} [L^{SD}] = \frac{H^{SD} [L^{SD}]}{\sum_{i=1}^K H^{SD} [i]}. \quad (26)$$

Отметим, что энтропия  $E_{cnd}^{SD}$  минимальна ( $E_{cnd}^{SD} = 0$ ) – когда спектр  $H^{SD} [L^{SD}]$  – вырожден (все домены синхронизации имеют одну длину) и максимальна ( $E_{cnd}^{SD} = \hat{E}_{cnd}^{SD}$ ) – в случае равномерного гребёчатого спектра  $H^{SD} [L^{SD}]$  с предельным числом различных длин доменов синхронизации равном  $W$ :

$$W = \left\lfloor \frac{\sqrt{17 + 8 \delta^{\alpha\varphi} K} - 3}{2} \right\rfloor, \quad \hat{E}_{cnd}^{SD} = \ln W, \quad (27)$$

где  $\lfloor a \rfloor$  – целая часть  $a$ . Результат для  $\hat{E}_{cnd}^{SD}$  получен в виде доказанного утверждения.

Если перед исследователем стоит задача сравнить случаи синхронизации различающиеся величинами  $\delta^{\alpha\varphi}$  и/или  $K$ , то вместо  $E_{cnd}^{SD}$  необходимо оперировать величиной

$$\Delta_E = \frac{E_{cnd}^{SD}}{\hat{E}_{cnd}^{SD}}. \quad (28)$$

Для наглядного рассмотрения временной структуры процесса синхронизации систем в пространстве  $S \times K$  построим карту синхронизации:

$$M_k^{SD} = \begin{cases} L_r^{SD} & b_r^{SD} \leq k \leq b_r^{SD} + L_r^{SD}, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \quad (29)$$

Отметим, что карта  $M^{SD}$  осуществляет переход от представления структуры синхронизма в  $SD$  непосредственно в пространство  $K$ . Дальнейший спуск в пространство  $T$  должен учитывать возможную неэквидистантность последовательности  $\{t_k\}_{k=1}^K$ .

### 4.3 О проверке T-синхронности на не случайность

Чтобы оценить не случайность зарегистрированной синхронизации, между исследуемыми системами, необходимо найти статистически значимые различия [40, 41] (по тем или иным параметрам, интересующим исследователя) между  $T_s$  – изучаемой и  $T_\xi$  – опорной последовательностями символов  $T^{\alpha\varphi}$ . Последовательность  $T_\xi$  должна иметь заведомо независимые компоненты  $n$ , и быть статистически эквивалентной последовательности  $T_s$  по частотам (вероятностям) встречаемости символов  $T^{\alpha\varphi}|_n$  и переходов между ними  $Q^{\alpha\varphi}|_n$ , при  $t_k \rightarrow t_{k+1}$ .

Введём в рассмотрение величину  $\alpha$  – уровень значимости – допустимую вероятность ошибки первого рода [40, 41]. Сформулируем основную гипотезу  $\mathcal{H}_0$  – что зафиксированные параметры и характеристики синхронизации для изучаемой последовательности  $T_s$  на

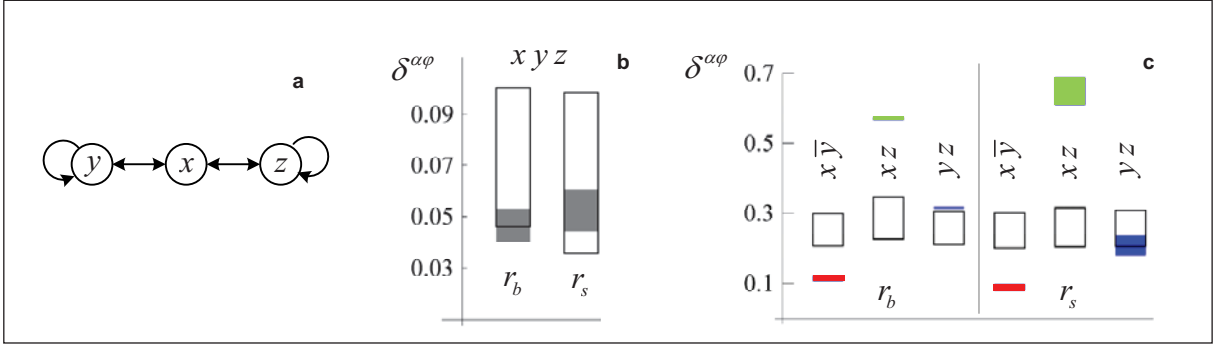


Рис. 5: (a) – структура системы (30); (b) и (c) – зависимость  $\delta^{\alpha\varphi}$  от параметра  $r$ , соответственно для комбинаций 3-х и 2-х фазовых переменных; прямоугольниками обозначены: закрашенными – интервал значений  $\delta^{\alpha\varphi}$  для системы (30) с границами по вероятности  $1 - \alpha$ , пустыми – критическая область для гипотезы  $\mathcal{H}_0$  по опорной последовательности  $T_\xi$ ; инвертированная переменная в комбинации обозначается штрихом  $\bar{\cdot}$ .

самом деле являются не следствием синхронного поведения систем, а определяется случайным стечением обстоятельств (случайным совпадением подпоследовательностей у независимых компонент анализируемой последовательности). В этом случае опорная последовательность  $T_\xi$  формирует критические области для гипотезы  $\mathcal{H}_0$  по тем или иным параметрам и характеристикам синхронизации.

#### 4.4 Исследование системы Рёсслера

В качестве примера рассмотрим T-синхронизацию фазовых переменных в системе Рёсслера находящейся в режимах ленточного (band-type)  $r = r_b = 4.4$  и винтового (screw-type)  $r = r_s = 12$  хаоса [7, 42–44]:

$$\dot{x} = -y - z, \quad \dot{y} = x + py, \quad \dot{z} = q + z(x - r). \quad (30)$$

Здесь  $x$ ,  $y$ ,  $z$  – динамические переменные;  $p = 0.2$ ,  $q = 0.1$ ,  $r$  – параметры системы. Выбор объекта исследования обусловлен тем, что система Рёсслера хорошо изучена и является эталонным объектом нелинейной и хаотической динамики. При этом анализ характеристик символической синхронизации между переменными  $x(t)$ ,  $y(t)$  и  $z(t)$  возможно трактовать двояко. Либо как изучение формы аттрактора системы (30) [7], либо как исследование синхронизации сильно связанных структурно неидентичных систем [28] (см. схему на рис. 5а).

Численное интегрирование системы (30) проводилось методом Dormand–Prince 5-го порядка на интервале времени  $T = [0, 8 \times 10^3]$ , с шагом  $\Delta t = 1 \times 10^{-2}$ . Для каждого значения параметра  $r$  рассчитывалось  $10^3$  траекторий с начальными условиями  $x_0 = \xi_1 \in [-7, 7]$ ,  $y_0 = \xi_2 \in [-7, 7]$ ,  $z_0 = \xi_3 \in [0, 15]$ , где  $\xi_{1-3}$  – некоррелированные равномерно распределённые случайные величины. Это позволило свести к минимуму эффект памяти на траекториях системы, индуцированный начальными условиями. Для каждой  $n$ -й фазовой переменной на интервале  $T' = [7, 8] \times 10^3$  порождалась последовательность  $\{T_k^{\alpha\varphi}|_n\}_{k=1}^K$ , длиной  $K = 10^5$ , посредством стробоскопического преобразования Пуанкаре [3]. Подобный сдвиг от  $t = 0$  объясняется необходимостью сведения паразитного влияния переходного процесса к минимуму. Лаг-синхронизация не рассматривалась ( $h_n = 0$ ). Критические области для гипотезы  $\mathcal{H}_0$ , строились как двусторонние, с уровнем значимости  $\alpha = 10^{-3}$  [40, 41]. Построение критических областей производилось по эмпирическим функциям распределения рассчитываемых характеристик. Опорные последовательности  $T_\xi$  символов  $T^{\alpha\varphi}|_n$  генерировались как однородные марковские цепи. Параметры цепей: исходные абсолютные вероятности со-

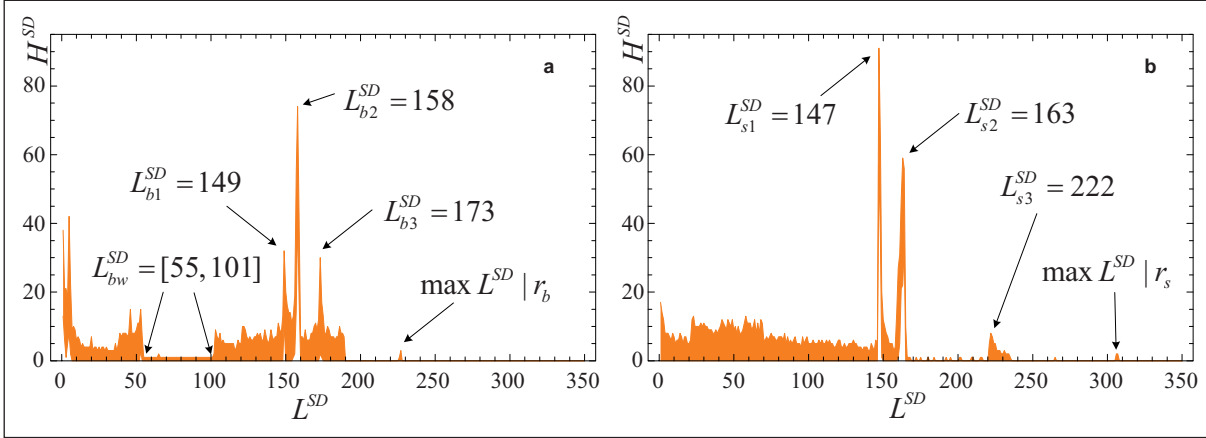


Рис. 6: Зависимость  $H^{SD}$  от  $L^{SD}$  для пары  $x, z$ : (а) –  $r = r_b$  и (б) –  $r = r_s$ ; (цветом заполнен интервал значений с границами по вероятности  $1 - \alpha$ ).

стояний и переходные вероятности, определялись из соответствующих последовательностей  $\{T_k^{\alpha\varphi}|n\}_{k=1}^K$ . Интервалы значений случайных величин (параметров синхронизации) для системы (30) формировались с границами по вероятности  $1 - \alpha$ . Доверительные интервалы строились как классические с доверительной вероятностью равной  $1 - \alpha$ .

Из данных рисунков 5б и 5с следует, что из всех возможных комбинаций фазовых переменных системы Рёсслера, наибольшим интегральным уровнем синхронизации, статистически превосходящим таковой для опорной последовательности (в обоих хаотических режимах), обладает пара переменных  $x$  и  $z$ :

$$\begin{aligned} M[\delta^{\alpha\varphi}]|r_b &\approx 0.570, & D[\delta^{\alpha\varphi}]|r_b &\approx 1.542 \times 10^{-6} \\ M[\delta^{\alpha\varphi}]|r_s &\approx 0.643, & D[\delta^{\alpha\varphi}]|r_s &\approx 1.606 \times 10^{-4}. \end{aligned} \quad (31)$$

В режиме ленточного хаоса ( $r = r_b$ ) также статистически значима синхронность переменных  $y$  и  $z$ , хотя прямой связи между ними в системе (30) нет (см. рис. 5а). Тем не менее, уровень синхронности пары  $y, z$  превосходит таковой для пары  $x, y$ , через которую осуществляется связь, и чьё значение величины  $\delta^{\alpha\varphi}$  статистически ниже чем для опорной последовательности, причём в обоих исследованных режимах. Отметим, что эта же пара, единственная, которая синхронизируется в противофазе (как при  $r = r_b$ , так и при  $r = r_s$ ). Изучение механизма этого эффекта – предмет наших дальнейших исследований.

Известно [7, 43, 44], что режим винтового хаоса ( $r = r_s$ ) является более развитым (в аттракторе системы присутствуют гомоклинические орбиты Шильникова [1, 8]), нежели режим ленточного хаоса ( $r = r_b$ ). Однако, данные рисунка 5с указывают на то, что при  $r = r_s$ , система (30) по переменным  $x$  и  $z$  более синхронна, нежели при  $r = r_b$ . Правда в режиме винтового хаоса увеличивается дисперсия величины  $\delta^{\alpha\varphi}$ , что можно трактовать как снижение, в этом режиме, структурной устойчивости процесса синхронизации фазовых переменных  $x$  и  $z$  относительно смены начальных условий. Остальные пары при переходе к режиму развитого хаоса снижают свой уровень синхронизации. Уровень  $\delta^{\alpha\varphi}$  всех трёх переменных ( $x, y$  и  $z$ ) попадает в критическую область опорной последовательности, поэтому рассматривать эту конфигурацию не имеет смысла.

Анализ спектральной плотности синхронных доменов для пары  $x, z$  (см. рис. 6), показывает наличие нескольких особенностей: для режима  $r_b$  – трёх превалирующих длин доменов ( $L_{b1}^{SD}$ ,  $L_{b2}^{SD}$  и  $L_{b3}^{SD}$ ), и окна  $L_{bw}^{SD}$  – в диапазоне длин которого происходит существенное и стабильное снижение количества доменов; для режима  $r_s$  – также трёх превалирующих длин доменов ( $L_{s1}^{SD}$ ,  $L_{s2}^{SD}$  и  $L_{s3}^{SD}$ ). При интерпретации этого факта имеет смысл

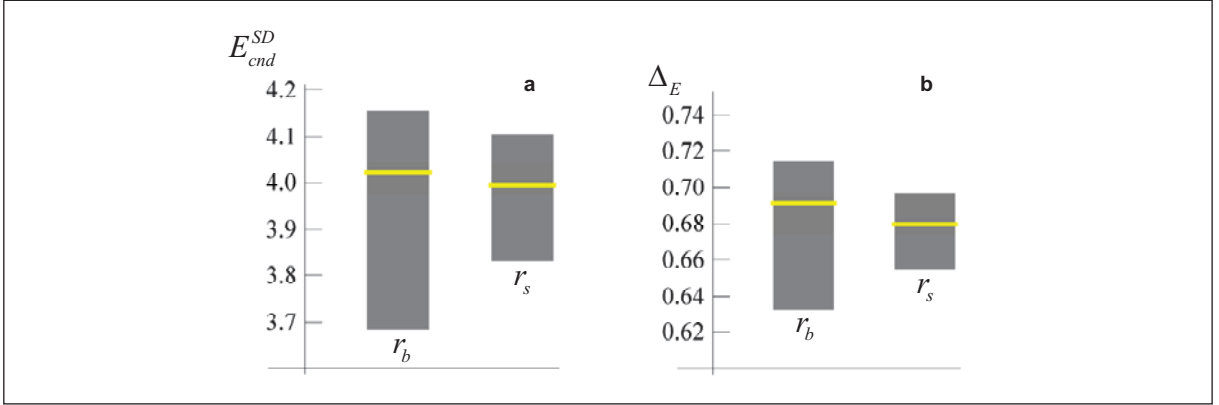


Рис. 7: Значения  $E_{cnd}^{SD}$  (а) и  $\Delta_E$  (б) для пары  $x, z$ , при  $r = r_b$  и  $r = r_s$ ; внешние прямоугольники – интервалы значений для самих величин с границами по вероятности  $1 - \alpha$ , внутренние – доверительные интервалы для их математических ожиданий (доверительная вероятность равна  $1 - \alpha$ ).

вновь обратиться к условиям численного эксперимента: для обоих режимов интегрирование системы (30) велось с постоянным шагом во времени, переходной процесс из рассмотрения исключался, результаты обобщались на множестве начальных условий. Следовательно, обнаруженные особенности – результат перестройки структуры аттрактора, вызванный скорее внутренними причинами, нежели условиями эксперимента. В целом  $\max L^{SD}|_{r_b} = 227$ , а  $\max L^{SD}|_{r_s} = 307$ , что указывает на не случайный характер повышения синхронности между фазовыми переменными  $x$  и  $z$  в системе Рёсслера в режиме более развитого хаоса. Усиливает этот факт также снижение, по переменным  $x$  и  $z$ , среднего значения и дисперсии величины  $\Delta_E$  – нормированной условной энтропии структуры синхронных доменов (см. рис. 7b):

$$\begin{aligned} M[\Delta_E]|_{r_b} &\approx 0.6915, & D[\Delta_E]|_{r_b} &\approx 1.528 \times 10^{-4}, \\ M[\Delta_E]|_{r_s} &\approx 0.6797, & D[\Delta_E]|_{r_s} &\approx 4.427 \times 10^{-5}, \end{aligned} \quad (32)$$

т. е. временная структура синхронизации становится более вырожденной (упорядоченной) и более грубой относительно смены начальных условий в системе. Примечательно, что не смотря на увеличение уровня синхронизации, условная энтропия  $E_{cnd}^{SD}$  также снижается в случае более развитого хаоса (см. рис. 7a).

Изучение карт синхронизации  $M^{SD}$ , в привязке к фазовым портретам системы (30), демонстрирует любопытный факт (см. рис. 8): зоны синхронизации ( $M^{SD} \geq 1$ ) переменных  $x$  и  $z$  не размазаны по аттрактору, а локализованы на нём в достаточно компактные и плотные области. Причём зоны синхронизации расположены как у основания аттрактора (плоскость  $xOy$ ) так и на его возвышении – ближе к верхушке.

Таким образом, из полученных результатов следует, что в хаотических режимах динамические переменные системы Рёсслера имеют ненулевой уровень и неслучайный характер синхронизации с позиции формы траектории в расширенном фазовом пространстве. Причём в случае винтового хаоса (более развитого) уровень синхронизации для переменных  $x$  и  $z$  даже выше – за счёт большего количества более длинных участков синхронного поведения. Локализованное расположение этих участков на фазовом аттракторе говорит в пользу наличия специфических детерминированных механизмов подобной самоорганизации. Полученная информация потенциально может оказаться полезной при изучении вопросов подавления хаоса в системе Рёсслера посредством малых внешних воздействий [44].



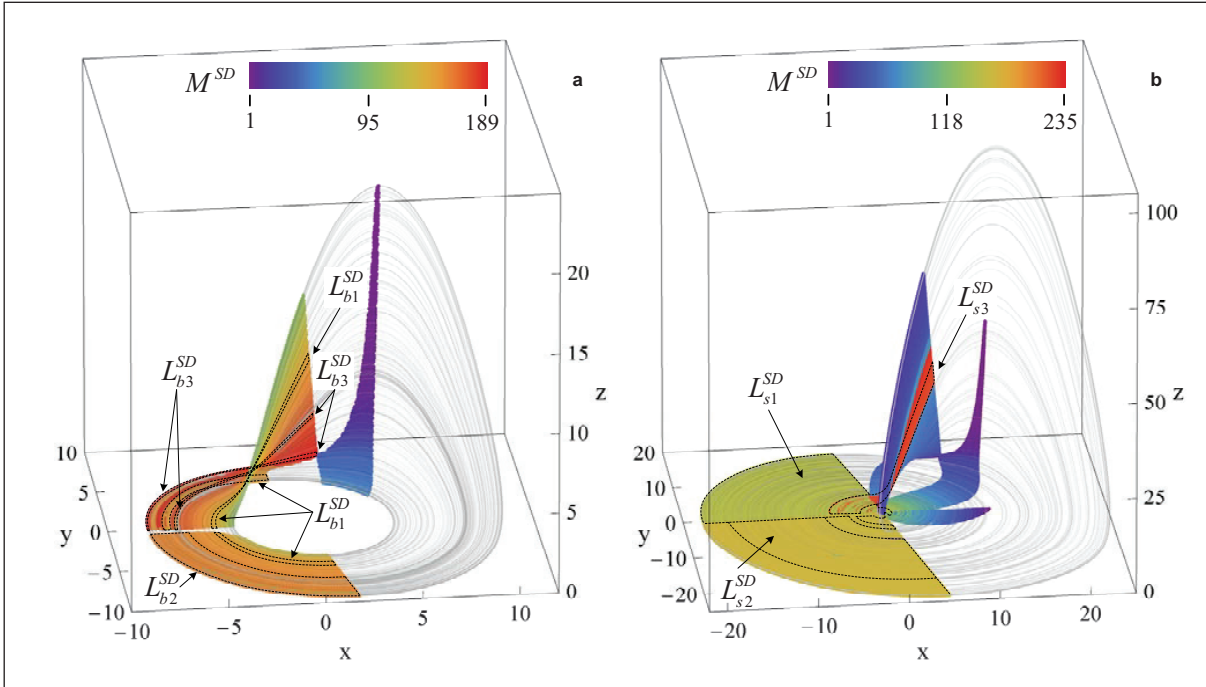


Рис. 8: Расположение зон синхронизации  $M^{SD} \geq 1$  переменных  $x$  и  $z$  на фазовых портретах системы Рёсслера: (a) –  $r = r_b$  и (b) –  $r = r_s$ .

## 5 Заключение

В настоящей работе описан новый подход к символическому анализу многомерных вещественных последовательностей и дискретных отображений, оперирующий понятием форма траектории в пространстве  $S \times K$  – так называемый символический СТQ-анализ. Предложенный формализм основан на минимальном конечном алфавите и свободен от некоторых недостатков символического анализа на основе “классических” алфавитов с разбиением пространств  $S$  или  $\dot{S}$ . Необходимо отметить, что предложенный способ исследования свойств динамических систем ни в коем случае не является заменой классических символических анализаторов и не умаляет их достоинств, напротив, он органично интегрируется с ними, позволяя посмотреть на исследуемую систему с несколько иной точки зрения.

Сильнейший плюс методов СТQ-анализа – изначальная нацеленность на многомерность и нестационарность исследуемых процессов и систем, к том числе сложных ансамблей неидентичных осцилляторов больших размерностей с произвольной конфигурацией и топологией сети (решётки). Кроме того, изложенный подход может быть применён для анализа экспериментальных данных, поскольку не требует, в обязательном порядке, каких-либо априорных знаний об изучаемой системе. Подобные свойства СТQ-анализа несомненно способствуют возможности его конструктивного применения для анализа многомерных временных рядов, порождаемых физическими, физиологическими, биологическими, финансовыми и другими сложными системами.

В рамках описываемого подхода создан ряд аналитических характеристик позволяющих, уже на данном этапе разработки, достаточно полно исследовать структуру аттракторов динамических систем. Ключевую роль в СТQ-анализе играет символический образ  $\Gamma^{TQ}$ , кодирующий форму траектории динамического процесса. С качественным изменением структуры графа  $\Gamma^{TQ}$  связано понятие TQ-бифуркации, которая вскрывает структурную перестройку динамики системы. В будущем предполагается расширить информативные возможности символического анализатора через определение энтропийных (размер-

ностных) и марковских характеристик для последовательностей  $\{T_k^{\alpha\varphi}|_n\}_{k=1}^K$  и  $\{Q_k^{\alpha\varphi}|_n\}_{k=1}^K$  и их подпоследовательностей. Это позволит расширить спектр соответствий между свойствами символического образа  $\Gamma^{TQ}$ , свойствами траектории  $\{s_k\}_{k=1}^K$  в пространстве  $S \times K$  и существенными свойствами самой динамической системы (1), важными в аспекте её идентификации, предсказания эволюции и управления динамикой.

Формализм СТQ-анализа позволил определить новый способ синхронизации хаотических колебаний, так называемую T-синхронизацию. Предложенный метод, в отличие от большинства других, позволяет количественно оценивать и изучать не только интегральный уровень синхронизации хаотических систем, но и временную структуру их синхронизма (через введённое понятие “синхронный домен”), позволяя обнаруживать и изучать факт перестройки структуры аттракторов и перемежаемое поведение.

В работе приведены примеры демонстрирующие некоторые возможности символического СТQ-анализа. В плане расширения областей его применения – это согласованный анализ структурных характеристик ЭЭГ в нейрофизиологии и задачи управления хаотической динамикой и подавления хаотических колебаний при помощи малых внешних воздействий.

Таким образом, представляется, что формализм СТQ-анализа потенциально способен исследовать с единых позиций новые типы и механизмы синхронизации, самоорганизации и управления в нелинейных системах с хаотической динамикой. А результаты подобного исследования возможно будут способствовать продвижению в понимании ряда фундаментальных вопросов о ключевых внутренних свойствах нелинейных динамических систем, лежащих в основе исследуемых феноменов.

## Литература

1. Лоскутов А.Ю. Очарование хаоса // УФН, 2010, **180** (12), 1305-1329.
2. Синай Я.Г. Современные проблемы эргодической теории // М.: Физматлит, 1995.
3. Кузнецов С.П. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике // УФН, 2011, **181** (2), 121-149.
4. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика // Пер. с англ. – М.: Мир, 1984.
5. Табор М. Хаос и интегрируемость в нелинейной динамике // Пер. с англ. – М.: Эдиториал УРСС, 2001.
6. Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Окрокверцхов Г.А., Стрелкова Г.И. Статистические свойства динамического хаоса // УФН, 2005, **175** (2), 163–179.
7. Giltmore R., Lefranc M. The topology of chaos // Wiley-Interscience, 2002.
8. Шильников Л.П., Шильников А.Л., Тураев Д.В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике // (Том 1, ИКИ, Ижевск, 2004), (Том 2, РХД, Ижевск, 2009).
9. Алексеев В.М. Символическая динамика, Одиннадцатая математическая школа // Изд-во Ин-та Математики АН УССР, Киев, 1976.
10. Колесов А.Ю., Розов Н.Х. К вопросу об определении хаоса // УМН, 2009, **64** (4), 125–172.
11. Боуэн Р. Методы символической динамики // Сб. статей. Пер. с англ. – М.: Мир, 1979.
12. Hsu C.S. Cell-to-Cell Mapping: A method of Global Analysis for Nonlinear Systems // Springer-Verlag, N.Y., 1987.
13. Dellnitz M., Hohmann A. A subdivision algorithm for the computation of unstable manifolds and global attractors // Numerische Mathematik, 1997, **75** (3), 293-317.
14. Осипенко Г.С., Ампилова Н.Б. Введение в символический анализ динамических систем // Изд-во СПбГУ, 2005.
15. Balakrishnan G., Shoeb A., Syed Z. Creating symbolic representations of electroencephalographic signals: An investigation of alternate methodologies on intracranial data // Annual International Conference of the IEEE, EMBC, 2010, 4683-4686.
16. Keller K., Lauffer H. Symbolic analysis of high-dimensional time series // Int. J. Bifurcation Chaos, 2003, **13** (9), 2657-2668.
17. Douglas L., Brian M. An Introduction to Symbolic Dynamics and Coding // Cambridge University Press, 1996.

18. *Pichl L., Yamano T., Kaizoji T.* On the Symbolic Analysis of Market Indicators with the Dynamic Programming Approach // *Lecture Notes in Computer Science*, 2006, **3973**, 432–441.
19. *Alur R., Henzinger T.A., Wong-Toi H.* Symbolic analysis of hybrid systems // *Decision and Control*, 1997, Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control, 1997, 1, 702-707.
20. *Porta A., D'Addio G., Pinna G.D., Maestri R., Gneccchi-Ruscione T., Furlan R., Montano N., Guzzetti S., Malliani A.* Symbolic analysis of 24h holter heart period variability series: comparison between normal and heart failure patients // *Proceedings of the IEEE Conference on Computers in Cardiology*, 2005, **32**, 575-578.
21. Макаренко А.В. Символический анализ в пространстве "скорость-кривизна" структуры хаоса в режиме синхронизации // *Письма в ЖТФ*, 2012, 38 (4), 1–9.
22. Макаренко А.В. Символический анализ в пространстве "скорость-кривизна" многомерных динамических процессов // *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 2012, **52** (7), 1248-1260.
23. Макаренко А.В. Мера синхронности многомерных хаотических последовательностей на основе их символьного представления в Т-алфавите // *Письма в ЖТФ*, 2012, 38 (17), 53-60.
24. Безручко Б.П., Смирнов Д.А. Математическое моделирование и хаотические временные ряды // ГосУНЦ "Колледж", Саратов, 2005.
25. Зельдович Я.Б., Молчанов С.А., Рузмайкин А.А. Соколов Д.Д. Перемежаемость в случайной среде // *УФН*, 1987, **152** (5), 3-32.
26. Макаренко А.В. Выражение структуры динамического процесса во временной области в терминах дифференциальной геометрии // *Изв. вузов. ПНД*, 2006, 14 (4), 71–86.
27. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences // Cambridge University Press, 2001.
28. *Voccaletti S., Kurths J., Osipov G.V., Valladares D.L., Zhou C.S.* The synchronization of chaotic systems // *Physics Reports*, 2002, **366** (1-2), 1-101.
29. Аргонов В.Ю., Пранц С.В. Синхронизация и бифуркации внутренних и внешних степеней свободы атома в стоячей световой волне // *Письма в ЖЭТФ*, 2004, 80 (4), 260-264.
30. *Suoto K.M., Oppenheim A.V.* Circuit implementation of synchronized chaos with applications to communications // *Phys. Rev. Lett.*, 1993, 71 (1), 65-68.
31. *Larger L., Goedgebuer J.-P.* Encryption using chaotic dynamics for optical telecommunications // *C.R. Physique*, 2004, 5 (6), 609-611.
32. *Planat M.* On the Cyclotomic Quantum Algebra of Time Perception // *Neuroquantology*, 2004, 2 (4), 292-308; arXiv:quant-ph/0403020.
33. *Abarbanel H.D.I., Rulkov N.F., Sushchik M.M.* Generalized synchronization of chaos: The auxiliary system approach // *Phys. Rev. E*, 1996, 53 (5), 4528–4535.
34. *Pecora L.M., Carroll T.L.* Synchronization in chaotic systems // *Phys. Rev. Lett.*, 1990, **64** (8), 821-824.
35. *Liu W., Qian X., Yang J., Xiao J.* Antisynchronization in coupled chaotic oscillators // *Phys. Lett. A*, 2006, **354** (1-2), 119-125.
36. *Rosenblum M.G., Pikovsky A.S., Kurths J.* From Phase to Lag Synchronization in Coupled Chaotic Oscillators // *Phys. Rev. Lett.*, 1997, 78 (22), 4193-4196.
37. Анищенко В.С., Постнов Д.Э. Эффект захвата базовой частоты хаотических автоколебаний. Синхронизация странных аттракторов // *Письма в ЖТФ*, 1988, 14 (6), 569-573.
38. *Pikovsky A.S., Rosenblum M.G., Kurths J.* Phase synchronization in regular and chaotic systems // *Int. J. of Bifurcation and Chaos*, 2000, 10 (10), 2291-2306.
39. Короновский А.А., Храмов А.Е. Анализ хаотической синхронизации динамических систем с помощью вейвлетного преобразования // *Письма в ЖЭТФ*, 2004, 79 (7), 391–395.
40. Леман Э. Проверка статистических гипотез // М: Наука, 1979. (Lehmann E.L. // *Testing statistical hypotheses*, Wiley and Sons, 1970.)
41. Худсон Д. Статистика для физиков // М: Мир, 1970. (Hudson D.J. // *Statistics*, CERN, Geneva, 1964.)
42. *Rossler O.E.* An equation for continuous chaos // *Physics Letters A*, 1976, 57 (5), 397–398.
43. *Rossler O.E.* Chaos in abstract kinetics: Two prototypes // *Bulletin of Mathematical Biology*, 1977, 39 (2), 275-289.
44. Кузнецов А.П., Станкевич Н.В., Чернышов Н.Ю. Стабилизация хаоса в системе Ресслера импульсным и гармоническим сигналом // *Изв. вузов. ПНД*, 2010, 18 (4), 3-16.

# POSSIBILITIES OF SYMBOLIC ANALYSIS IN VELOCITY-CURVATURE SPACE: TQ-BIFURCATION, SYMMETRY, SYNCHRONIZATION

A.V. Makarenko

*Institute of Control Sciences, RAS*

avm.science@mail.ru

Received 28.08.2012

A new method of symbolic analysis based on finite discretization of velocity-curvature space is proposed. We introduce the minimum alphabet, which is invariant to uniform tension and shear the studied sequence. The proposed method of analysis is computationally oriented. It allows one to study in detail the shape of the trajectories and structure of dynamics of the multidimensional discrete sequences, maps, and flows. A number of basic features and concepts are defined for this analysis: TQ-bifurcation, synchronous domain, etc. A constructive application of the method to problems of study: global structure of trajectories of dynamical systems, symmetry of dynamic processes and systems, synchronization of chaotic oscillations, are demonstrated.

