КОГЕРЕНТНЫЕ СОСТОЯНИЯ КУБИЧЕСКОЙ НЕЛИЕВСКОЙ АЛГЕБРЫ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ АТОМА ВОДОРОДА В РЕЗОНАНСНОМ ЭФФЕКТЕ ЗЕЕМАНА-ШТАРКА

Е.М. Новикова*

Московский институт электроники и математики при НИУ ВШЭ

e.m.novikova@gmail.com

Поступила 29.10.2012

Рассматривается спектральная задача для атома водорода, помещенного в возмущающие магнитное и электрическое поля. Найдены резонансные соотношения на величину полей и угол между ними, при которых квантовая усредненная система (в первом порядке теории возмущений) имеет нелиевскую алгебру симметрий, чьи коммутационные соотношения между генераторами задаются полиномами не выше кубического. Неприводимые представления этой алгебры соответствуют спектральным кластерам, локализованным вблизи зееман-штарковских уровней энергии. Усредненный гамильтониан во втором порядке теории возмущений выражен в виде линейной комбинации операторов "рождение-уничтожение" из этой нелиевской алгебры. Асимптотика спектра атома водорода (поправка к эффекту Зеемана-Штарка) задается условием целочисленности интегралов от кэлеровой формы. Найдена асимптотика собственных состояний в виде интеграла от когерентных состояний вдоль линий уровня усредненного гамильтониана на квантовых симплектических листах указанной алгебры с кубическими соотношениями. Работа опирается на общую теорию алгебраического усреднения и квантовую геометрию, развитую М. Карасевым, и на исследования автора когерентных состояний нелиевских алгебр симметрий.

УДК 51.73, 53.043

1. Введение

В работе исследуется спектральная задача для атома водорода, помещенного в возмущающее электромагнитное поле. Конфигурация этого поля – следующая: к однородному электрическому полю E и однородному магнитному полю B добавляется более слабое неоднородное поле с потенциалом $V_2 + V_3$. Здесь V_2 – это квадратичный потенциал конфайнмента, а V_3 - дополнительный кубический потенциал.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант 12-01-00627-а.

Обезразмеренный гамильтониан такой системы имеет вид

$$\Big(|\widehat{p}|^2-\frac{1}{|x|}\Big)+\varepsilon\big((B,x\times\widehat{p})-(E,x)\big)+\varepsilon\delta\big(V_2(x)+V_3(x)\big)+\frac{\varepsilon^2}{4}\big(|B|^2|x|^2-(B,x)^2\big), \quad (1.1)$$

где $x\in\mathbb{R}^3$, $\widehat{p}\equiv -i\hbar\partial/\partial x$, $\varepsilon\lesssim\delta\ll 1$, параметр $\hbar$ либо фиксирован, либо мал (в квазиклассическом приближении). Подробнее об этом см. в разделе 2.

При $\varepsilon=0$ гамильтониан (1.1) принимает вид $\widehat{\mathcal{H}}_0=|\widehat{p}|^2-1/|x|$. Этот оператор описывает хорошо известную интегрируемую систему с алгеброй симметрий $SO(4)$. Эта алгебра порождается компонентами векторов

$$\widehat{J}=\frac{1}{2}\Bigg(\widehat{M}+\frac{\widehat{R}}{\sqrt{-4\widehat{\mathcal{H}}_0}}\Bigg) \qquad \text{and} \qquad \widehat{K}=\frac{1}{2}\Bigg(\widehat{M}-\frac{\widehat{R}}{\sqrt{-4\widehat{\mathcal{H}}_0}}\Bigg),$$

где $\widehat{M}=(x\times\widehat{p})$ – момент импульса, а $\widehat{R}=x/|x|-(\widehat{p}\times\widehat{M})+(\widehat{M}\times\widehat{p})$ – оператор Лапласа–Рунге–Ленца.

При $\varepsilon\neq 0$ система с гамильтонианом (1.1) неинтегрируема. Но с помощью (двойного) операторного усреднения ее можно асимптотически редуцировать к интегрируемой системе с гамильтонианом

$$\widehat{\mathcal{H}}_0+\varepsilon\big(\widehat{\mathcal{H}}_1+\delta\widehat{\mathcal{H}}_3+\varepsilon\widehat{\mathcal{H}}_2+O(\varepsilon\delta)\big). \quad (1.2)$$

Здесь усредненные операторы $\widehat{\mathcal{H}}_1$, $\widehat{\mathcal{H}}_2$, $\widehat{\mathcal{H}}_3$ коммутируют со старшей частью $\widehat{\mathcal{H}}_0$, а младшие члены $\widehat{\mathcal{H}}_3$ и $\widehat{\mathcal{H}}_2$ коммутируют также и с $\widehat{\mathcal{H}}_1$. Оператор $\widehat{\mathcal{H}}_1$ является линейной функцией на алгебре $SO(4)$:

$$\widehat{\mathcal{H}}_1=\Bigg(B-\frac{3E}{\sqrt{-4\widehat{\mathcal{H}}_0}},\widehat{J}\Bigg)+\Bigg(B+\frac{3E}{\sqrt{-4\widehat{\mathcal{H}}_0}},\widehat{K}\Bigg),$$

а $\widehat{\mathcal{H}}_2$ и $\widehat{\mathcal{H}}_3$ – это (соответственно) квадратичная и кубическая функции от $\widehat{J}$ и $\widehat{K}$.

Спектральная задача для гамильтониана (1.2) сводится к совместной спектральной задаче для трех коммутирующих гамильтонианов: $\widehat{\mathcal{H}}_0$, $\widehat{\mathcal{H}}_1$ и $(\delta\widehat{\mathcal{H}}_3+\varepsilon\widehat{\mathcal{H}}_2)$. Хорошо известно, что собственное подпространство оператора $\widehat{\mathcal{H}}_0$, отвечающее энергетическому уровню $-1/(4n^2\hbar^2)$, имеет размерность n^2 (здесь $n=1,2,\dots$). На этом подпространстве оператор $\widehat{\mathcal{H}}_1$ принимает вид

$$\widehat{\mathcal{H}}_1=\big(B-3n\hbar E,\widehat{J}\big)+\big(B+3n\hbar E,\widehat{K}\big). \quad (1.3)$$

Кратность собственных значений оператора $\widehat{\mathcal{H}}_1$ (1.3) и динамическая алгебра $\mathcal{F}_{quant}$ редуцированной системы (1.2) (т.е. алгебра совместных симметрий гамильтонианов $\widehat{\mathcal{H}}_0$ и $\widehat{\mathcal{H}}_1$) зависят от соотношения между полями E и B. Если длины векторов $B-3n\hbar E$ и $B+3n\hbar E$ несоизмеримы, то спектр оператора $\widehat{\mathcal{H}}_1$ простой, а алгебра $\mathcal{F}_{quant}$ коммутативна. В этом случае вырождение спектра гамильтониана (1.2) (а, значит, и гамильтониана (1.1)) снимается уже в первом порядке ε по полю. Здесь “работает” стандартная теория возмущений.

Если же длины указанных векторов соизмеримы, т.е.

$$\frac{|B-3n\hbar E|}{|B+3n\hbar E|}=\frac{l}{r}, \quad (1.4)$$

то спектр оператора $\widehat{\mathcal{H}}_1$ (на собственных подпространствах $\widehat{\mathcal{H}}_0$) вырожден, а алгебра $\mathcal{F}_{quant}$ некоммутативна. Именно этот резонансный случай и исследуется в данной работе.

Для наглядности в работе рассматривается частный случай резонанса (1.4), когда

$$l = 2, \qquad r = 1. \tag{1.5}$$

Общая картина была изложена в [1]. В случае (1.5) алгебра $\mathcal{F}_{quant}$ порождается операторами

$$\begin{aligned}
&\widehat{A}_1 = (a^1, \widehat{J}), && \widehat{A}_2 = (a^2, \widehat{K}),\\
&\widehat{A}_3 = |\widehat{J}|^2 - (a^1, \widehat{J})^2, && \widehat{A}_4 = |\widehat{K}|^2 - (a^2, \widehat{K})^2,\\
&\widehat{A}_+ = (b^1 - ic^1, \widehat{J})(b^2 + ic^2, \widehat{K})^2, && \widehat{A}_- = (b^1 + ic^1, \widehat{J})(b^2 - ic^2, \widehat{K})^2.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Здесь

$$a^1 = \frac{B - \frac{3E}{\sqrt{-4\widehat{\mathcal{H}}_0}}}{\left|B - \frac{3E}{\sqrt{-4\widehat{\mathcal{H}}_0}}\right|}, \qquad a^2 = \frac{B + \frac{3E}{\sqrt{-4\widehat{\mathcal{H}}_0}}}{\left|B + \frac{3E}{\sqrt{-4\widehat{\mathcal{H}}_0}}\right|},$$

а векторы b^j, c^j задаются условиями

$$a^j \times b^j = c^j, \qquad c^j \times a^j = b^j, \qquad b^j \times c^j = a^j \qquad (j = 1, 2)$$

(т.е. (a^j, b^j, c^j) – правая тройка попарно ортогональных векторов единичной длины). Генераторы (1.6) алгебры $\mathcal{F}_{quant}$ подчинены кубическим перестановочным соотношениям:

$$\begin{aligned}
&[\widehat{A}_j, \widehat{A}_k] = 0, && [\widehat{A}_-, \widehat{A}_+] = \hbar f(\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \widehat{A}_3, \widehat{A}_4),\\
&\widehat{A}_1\widehat{A}_+ = \widehat{A}_+(\widehat{A}_1 - \hbar), && \widehat{A}_-\widehat{A}_1 = (\widehat{A}_1 - \hbar)\widehat{A}_-,\\
&\widehat{A}_2\widehat{A}_+ = \widehat{A}_+(\widehat{A}_2 + 2\hbar), && \widehat{A}_-\widehat{A}_2 = (\widehat{A}_2 + 2\hbar)\widehat{A}_-,\\
&\widehat{A}_3\widehat{A}_+ = \widehat{A}_+(\widehat{A}_3 + 2\hbar\widehat{A}_1 - \hbar^2), && \widehat{A}_-\widehat{A}_3 = (\widehat{A}_3 + 2\hbar\widehat{A}_1 - \hbar^2)\widehat{A}_-,\\
&\widehat{A}_4\widehat{A}_+ = \widehat{A}_+(\widehat{A}_4 - 4\hbar\widehat{A}_2 - 4\hbar^2), && \widehat{A}_-\widehat{A}_4 = (\widehat{A}_4 - 4\hbar\widehat{A}_2 - 4\hbar^2)\widehat{A}_-,
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где f – кубический полином от четырех переменных.

В работе показано, что усредненные гамильтонианы $\widehat{\mathcal{H}}_2$ и $\widehat{\mathcal{H}}_3$ выражаются через образующие алгебры $\mathcal{F}_{quant}$ следующим образом:

$$\widehat{\mathcal{H}}_2 = h_2(\widehat{A}_1, \widehat{A}_2), \qquad \widehat{\mathcal{H}}_3 = h_3(\widehat{A}_1, \widehat{A}_2, \widehat{A}_-, \widehat{A}_+).$$

Здесь $h_2 = h_2(A_1, A_2)$ – это некоторая квадратичная функция от A_1, A_2 а $h_3 = h_3(A_1, A_2, A_+, A_-)$ – это сумма линейной функции от A_+ и A_- и кубической функции от A_1, A_2. Двойное операторное усреднение и явление резонанса описаны в разделах 3, 4, 5.

Алгебра $\mathcal{F}_{quant}$ подробно исследуется в разделе 6. Это алгебра со структурой “рождение-уничтожение”. Для алгебр с такой структурой известен [2] алгоритм построения неприводимых представлений и когерентных состояний. В данной статье построены неприводимые представления алгебры $\mathcal{F}_{quant}$ обыкновенными дифференциальными операторами 3-его порядка в пространстве полиномов. Соответствующие когерентные состояния заданы с помощью гипергеометрических полиномов.

В разделе 7 вычисляются собственные значения и собственные функции дважды усредненного гамильтониана (1.2) в случае резонанса (1.4), (1.5). С помощью когерентного преобразования этот гамильтониан сводится к обыкновенному дифференциальному оператору третьего порядка в гильбертовом пространстве полиномов. Для исходной спектральной задачи собственные числа выражаются через собственные числа этого дифференциального оператора, а для собственных функций получается представление через гипергеометрические когерентные состояния.

В разделе 8 спектральная задача для усредненного гамильтониана (1.2) решается в квазиклассическом приближении (при $\hbar \to 0$). В квазиклассическом пределе алгебре $\mathcal{F}_{quant}$ соответствует некоторая кубическая пуассонова алгебра $\mathcal{F}$. Неприводимые представления алгебры $\mathcal{F}_{quant}$ можно реализовать некоторыми дифференциальными операторами $\breve{A}_1$, $\breve{A}_2$, $\breve{A}_3$, $\breve{A}_4$, $\breve{A}_+$, $\breve{A}_-$ третьего порядка в пространстве функций над замкнутой кривой Λ, лежащей на соответствующем симплектическом листе Ω пуассоновой алгебры $\mathcal{F}$. В этом представлении усредненный гамильтониан $\delta\breve{\mathcal{H}}_3 + \varepsilon\breve{\mathcal{H}}_2$ принимает вид

$$\delta\breve{\mathcal{H}}_3 + \varepsilon\breve{\mathcal{H}}_2 = \delta h_3(\breve{A}_1, \breve{A}_2, \breve{A}_+, \breve{A}_-) + \varepsilon h_2(\breve{A}_1, \breve{A}_2).$$

Абстрактное представление алгебры $\mathcal{F}_{quant}$ сплетается с неприводимым представлением этой алгебры над кривой Λ с помощью Λ-когерентных гипергеометрических состояний $\mathfrak{h}_\alpha$, параметризованных точками α кривой Λ. Собственные функции φ усредненного гамильтониана $\delta\breve{\mathcal{H}}_3 + \varepsilon\breve{\mathcal{H}}_2$ над $\mathbb{R}^3$ ищутся в виде интеграла

$$\varphi = \int_\Lambda \phi(\alpha)\mathfrak{h}_\alpha \, d\sigma(\alpha) \tag{1.8}$$

по некоторой мере $d\sigma$ вдоль кривой Λ. Здесь ϕ - это новая волновая функция, которая должна быть подчинена некоторому квантовому уравнению над кривой Λ. В силу сплетающего свойства Λ-когерентных состояний для интеграла (1.8) имеет место формула

$$(\delta\breve{\mathcal{H}}_3 + \varepsilon\breve{\mathcal{H}}_2)\varphi = \int_\Lambda \big((\delta\breve{\mathcal{H}}_3 + \varepsilon\breve{\mathcal{H}}_2)\phi\big)(\alpha)\mathfrak{h}_\alpha \, d\sigma(\alpha).$$

Поэтому ϕ должна быть собственной для оператора $\delta\breve{\mathcal{H}}_3 + \varepsilon\breve{\mathcal{H}}_2$ над Λ. Тогда формула (1.8) даст интегральное представление точной собственной функции оператора (1.2) над $\mathbb{R}^3$.

Если выбрать в качестве Λ замкнутую траекторию гамильтонова потока, порожденного функцией $\delta h_3 + \varepsilon h_2$ на симплектическом листе Ω, и меру $d\sigma$ выбрать инвариантной $d\sigma = dt$, то окажется, что

$$\delta\breve{\mathcal{H}}_3 + \varepsilon\breve{\mathcal{H}}_2 = \mathrm{const} - i\hbar\frac{d}{dt} + O(\hbar^2), \qquad \text{где} \quad \mathrm{const} = (\delta h_3 + \varepsilon h_2)|_\Lambda.$$

Отсюда видно, что в качестве приближенной собственной функции оператора $\delta\breve{\mathcal{H}}_3 + \varepsilon\breve{\mathcal{H}}_2$ можно взять константу $\phi \approx 1$. Тогда получим главный член квазиклассической асимптотики собственных функций оператора (1.2):

$$\varphi = \int_\Lambda \mathfrak{h}_{\alpha(t)} \, dt.$$

Здесь интеграл берется по квантованной траектории Λ гамильтонова потока над Ω. Условие квантования Λ записано в разделе 7 как условие целочисленности интегралов от кэлеровой формы. Описанный здесь метод построения квазиклассической асимптотики был изложен в [3].

Автор благодарен М.В.Карасеву за подробное обсуждение задачи, полезные замечания и помощь.

2. Гамильтониан системы

2.1. Постановка задачи

Рассмотрим спектральную задачу в $L^2(\mathbb{R}^3)$ для гамильтониана

$$\begin{aligned}\mathcal{H} \stackrel{\text{def}}{=} -\hbar^2\Delta_x - \frac{1}{|x|} - i\varepsilon\hbar\Big(x_1\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_1}\Big) + \varepsilon(e_1x_1 + e_3x_3)\\ + \frac{\varepsilon^2}{4}(x_1^2 + x_2^2) + \frac{\varepsilon\delta}{2}(\beta x, x) + \varepsilon\delta V(x).\end{aligned} \tag{2.1}$$

Здесь e_1, e_3 – некоторые константы, причем можно считать, что $e_1 \geq 0$. Магнитное поле предполагается направленным вдоль третьей оси, а электрическое поле имеет компоненты вдоль первой и третьей осей. Симметричная матрица β определяет квадратичный потенциал конфайнмента. Дополнительный потенциал V является кубической функцией от координат. Для наглядности рассматривается случай, когда

$$V(x) = \gamma x_1 x_2^2, \tag{2.2}$$

где γ – некоторая константа, хотя метод исследования применим к произвольному потенциалу V.

Мы предполагаем, что $\varepsilon \lesssim \delta \ll 1$. Параметр $\hbar$ либо фиксирован, либо мал (в квазиклассическом приближении).

2.2. Приведение гамильтониана к сумме оператора "действие" и возмущения

Рассмотрим уравнение

$$\mathcal{H}\Psi(x) = \mathcal{E}\Psi(x) \tag{2.3}$$

на интервале энергий $\mathcal{E} < 0$. Хорошо известно, что при $\varepsilon = 0$ энергетические уровни оператора $\mathcal{H}$ задаются формулой $\mathcal{E} = -1/(4n^2\hbar^2)$, где $n \in \mathbb{N}$. Поэтому при малом ε уровни энергии оператора $\mathcal{H}$ будем искать в виде

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{4\nu^2},$$

где ν – новый спектральный параметр. Далее, введем параметры μ и σ, а также новую переменную $q \in \mathbb{R}^3$ и новую волновую функцию $\widehat{\Psi}$:

$$\mu = \varepsilon\nu^2, \qquad \sigma = \delta\nu^2, \qquad q = \frac{x}{\nu}, \qquad \Psi(q, \mu, \sigma) = \Psi(x). \tag{2.4}$$

Рассмотрим следующие $\hbar$-дифференциальные операторы по переменной q:

$$\mathbf{S}_0 = |\mathbf{q}|\Big(\frac{1}{4} + |\mathbf{p}|^2\Big), \qquad \mathbf{S}_1 = (\mathbf{X}_1 + \nu\mathbf{Z}_1) + \sigma(\mathbf{R}_1 + \nu\mathbf{Q}_1) + \mu\mathbf{Y}_1, \tag{2.5}$$

где

$$\mathbf{q} = q, \qquad \mathbf{p} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q}, \qquad \mathbf{X}_1 = |\mathbf{q}|(\mathbf{q}_1\mathbf{p}_2 - \mathbf{q}_2\mathbf{p}_1), \qquad \mathbf{Y}_1 = \frac{1}{4}|\mathbf{q}|(\mathbf{q}_1^2 + \mathbf{q}_2^2),$$
$$\mathbf{Z}_1 = |\mathbf{q}|(e_1\mathbf{q}_1 + e_3\mathbf{q}_3), \qquad \mathbf{R}_1 = \frac{1}{2}|\mathbf{q}|(\beta\mathbf{q}, \mathbf{q}), \qquad \mathbf{Q}_1 = \gamma|\mathbf{q}|\mathbf{q}_1\mathbf{q}_2^2.$$

Отметим, что эти операторы эрмитовы в гильбертовом пространстве $L^2_-(\mathbb{R}^3)$ со скалярным произведением

$$\langle\psi_1, \psi_2\rangle_- \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\pi}{4}\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\psi_1(q)\overline{\psi_2(q)}}{|q|}\,dq.$$

Замена (2.4) приводит к следующей спектральной задаче в пространстве $L^2_-(\mathbb{R}^3)$:

$$(\mathbf{S}_0 + \mu\mathbf{S}_1)\widetilde{\Psi} = \nu\widetilde{\Psi}. \tag{2.6}$$

Число ν – искомое собственное значение, а μ – параметр (связанный с напряженностью внешнего поля). Известно [4], что $\mathbf{S}_0$ – оператор типа "действие", т.е. его спектр имеет вид $\big\{\hbar n \mid n = 1, 2, 3, \dots\big\}$. При $\mu > 0$ будем рассматривать ветви собственных значений оператора $\mathbf{S}_0 + \mu\mathbf{S}_1$, "выходящие" из n-го собственного значения, т.е. имеющие вид $\nu = \hbar n + \mu\lambda(\mu, \sigma)$, где $\lambda(\mu, \sigma)$ – некоторые гладкие функции в окрестности точки $\mu = 0$. Соответствующие собственные функции задачи (2.6) обозначим через $\widetilde{\Psi}(q, \mu)$. Определив из (2.6) функции $\lambda(\mu, \sigma)$, мы сможем записать систему уравнений

$$\hbar n + \mu\lambda(\mu, \sigma) = \nu, \qquad \mu = \varepsilon\nu^2, \qquad \sigma = \delta\nu^2 \tag{2.7}$$

относительно ν, μ, σ. Ее решение обозначим через $\nu = \nu(\varepsilon, \delta)$, $\mu = \mu(\varepsilon, \delta)$, $\sigma = \sigma(\varepsilon, \delta)$.

Предложение 2.1. *Задача* (2.3) *на подпространстве в* $L^2_-(\mathbb{R}^3)$, *отвечающем отрицательному спектру* $\mathcal{E} < 0$, *эквивалентна спектральной задаче* (2.6) *в* $L^2_-(\mathbb{R}^3)$. *Собственные числа и собственные функции этих задач связаны между собой следующими формулами*:

$$\mathcal{E} = -\frac{1}{4\nu(\varepsilon, \delta)^2}, \qquad \Psi(x) = \widetilde{\Psi}\bigg(\frac{x}{\nu(\varepsilon, \delta)}, \mu(\varepsilon, \delta), \sigma(\varepsilon, \delta)\bigg). \tag{2.8}$$

3. Операторное усреднение спектральной задачи

Стандартная теория возмущений для системы (2.6) "не работает" поскольку энергетические уровни оператора $\mathbf{S}_0$ вырождены (уровень $\hbar n$ имеет кратность n^2, где $n = 1, 2, \dots$). Применим к системе (2.6) операторное усреднение.

3.1. Схема операторного усреднения

Схема операторного усреднения описана в работах [4], [3]. Здесь приведены только необходимые технические формулы. Для каждого оператора $\mathbf{F}$ определим

$$\underline{\mathbf{F}} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\tau\mathbf{S}_0/\hbar}\mathbf{F}e^{i\tau\mathbf{S}_0/\hbar}\,d\tau, \qquad \mathbf{F}^{\#} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-\tau)e^{-i\tau\mathbf{S}_0/\hbar}\mathbf{F}e^{i\tau\mathbf{S}_0/\hbar}\,d\tau.$$

По заданному оператору $\mathbf{S}_1$ (2.5) построим операторы

$$\mathbf{S}_2 = \frac{i}{2\hbar}[\mathbf{S}_1^{\#}, \mathbf{S}_1 + \underline{\mathbf{S}_1}], \qquad \mathbf{U} = \exp\Big\{-\frac{i\mu}{\hbar}\big(\S_1^{\#} + \mu\mathbf{S}_2^{\#} + O(\mu^2)\big)\Big\}. \tag{3.1}$$

Тогда имеют место тождества

$$\mathbf{U}^{-1}(\mathbf{S}_0 + \mu\mathbf{S}_1)\mathbf{U} = \mathbf{S}_0 + \mu\underline{\mathbf{S}_1} + \mu^2\underline{\mathbf{S}_2} + O(\mu^3), \qquad [\,\underline{\mathbf{S}_1}, \mathbf{S}_0] = [\,\underline{\mathbf{S}_2}, \mathbf{S}_0] = 0.$$

Поскольку операторы $\underline{\mathbf{S}_1}$, $\underline{\mathbf{S}_2}$ коммутируют со старшей частью $\mathbf{S}_0$, то спектральная задача для $\mathbf{S}_0+\mu\mathbf{S}_1$ сводится (с точностью $O(\mu^3)$) к спектральной задаче для $\underline{\mathbf{S}_1}+\mu\underline{\mathbf{S}_2}$ на собственных подпространствах оператора $\mathbf{S}_0$.

3.2. Применение операторного усреднения к спектральной задаче

Мы предполагаем, что $\mu \lesssim \sigma \ll 1$, $\nu \sim 1$. Тогда после применения к задаче (2.6) метода операторного усреднения для собственных значений ν и собственных функций $\widetilde{\Psi}$ оператора $\mathbf{S}_0 + \mu\mathbf{S}_1$ получим следующие формулы:

$$\nu = \hbar n + \mu\underline{\lambda}(\mu,\sigma) + O(\mu^3), \qquad \widetilde{\Psi}(q,\mu,\sigma) = \mathbf{U}\psi(q,\mu,\sigma) + O(\mu^2). \tag{3.2}$$

Здесь числа $\underline{\lambda}(\mu,\sigma)$ – собственные значения усредненного гамильтониана $\underline{\mathbf{S}_1} + \mu\underline{\mathbf{S}_2} + O(\mu^2)$, а $\psi(q,\mu,\sigma)$ – его собственные функции, одновременно являющиеся собственными функциями оператора $\mathbf{S}_0$, т.е. $\mathbf{S}_0\psi = \psi$, $(\,\underline{\mathbf{S}_1} + \mu\underline{\mathbf{S}_2})\psi = \underline{\lambda}(\mu,\sigma)\psi$.

Оператор $\mathbf{S}_1$ (2.5) с учетом формулы $\nu = \hbar n + \mu\underline{\lambda}(0,\sigma) + O(\mu^2) = \hbar n + \mu\underline{\lambda}(0,0) + O(\mu\sigma)$ имеет вид $\mathbf{S}_1 = \big(\mathbf{X}_1 + \hbar n\mathbf{Z}_1\big) + \sigma\big(\mathbf{R}_1 + \hbar n\mathbf{Q}_1\big) + \mu\big(\mathbf{Y}_1 + \underline{\lambda}(0,0)\mathbf{Z}_1\big) + O(\mu\sigma)$. Поэтому после усреднения задача (2.6) сводится к следующей:

$$\begin{cases} \mathbf{S}_0\psi = \hbar n\psi, \\ \big(\,\underline{\mathbf{P}_1} + \sigma\big(\underline{\mathbf{R}_1} + \hbar n\underline{\mathbf{Q}_1}\big) + \mu\big(\,\underline{\mathbf{P}_2} + \underline{\mathbf{Y}_1} + \underline{\lambda}(0,0)\underline{\mathbf{Z}_1}\big) + O(\mu\sigma)\big)\psi = \underline{\lambda}(\mu,\sigma)\psi, \end{cases} \tag{3.3}$$

где $\mathbf{P}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{X}_1 + \hbar n\mathbf{Z}_1$, а оператор $\mathbf{P}_2$ строится по $\mathbf{P}_1$ по той же формуле (3.1), по которой $\mathbf{S}_2$ строится по $\mathbf{S}_1$. Прежде чем решать задачу (3.3), необходимо определить значения $\underline{\lambda}(0,0)$, от которых зависит оператор из левой части второго из уравнений (3.3). Для этого достаточно решить задачу (3.3) при $\mu = \sigma = 0$:

$$\begin{cases} \mathbf{S}_0\psi = \hbar n\psi, \\ \underline{\mathbf{P}_1}\psi = \underline{\lambda}(0,0)\psi. \end{cases} \tag{3.4}$$

В силу формул (3.1), (3.2) переход от собственных функций задачи (3.4) к собственным функциям задачи (2.6) производится с помощью оператора

$$\mathbf{U} = \exp\Big\{-\frac{i\mu}{\hbar}\Big(\mathbf{P}_1^{\#} + \sigma\big(\mathbf{R}_1^{\#} + \hbar n\mathbf{Q}_1^{\#}\big) + \mu\big(\mathbf{P}_2^{\#} + \mathbf{Y}_1^{\#} + \underline{\lambda}(0,0)\mathbf{Z}_1^{\#}\big) + O(\mu\sigma)\Big)\Big\}.$$

При дополнительном предположении $\mu\sigma/\hbar \ll 1$ или, что то же самое, при $\varepsilon\delta \ll \hbar$, имеем более простую формулу:

$$\mathbf{U} = \exp\{-i\varepsilon n^2 \hbar \mathbf{P}_1^{\#}\} + O\Big(\frac{\varepsilon\delta}{\hbar}\Big). \tag{3.5}$$

Ниже мы ограничимся этим приближением для $\mathbf{U}$ и для собственных функций.

3.3. Гамильтониан усредненной задачи

Обозначим $\widetilde{e}_j \stackrel{\mathrm{def}}{=} n\hbar e_j$ $(j = 1, 2)$.

Предложение 3.1. *Слагаемые в усредненном гамильтониане задачи* (3.3) *задаются следующими формулами*:

$$\begin{aligned}
\underline{\mathbf{P}_1} &= 2\mathbf{S}_0\big(3\widetilde{e}_1\mathbf{J}_1 + (1+3\widetilde{e}_3)\mathbf{J}_3 - 3\widetilde{e}_1\mathbf{K}_1 + (1-3\widetilde{e}_3)\mathbf{K}_3\big), \qquad (3.6)\\
\underline{\mathbf{R}_1} &= \mathbf{S}_0\Big(\operatorname{tr}\beta\,\mathbf{S}_0^2 + 8(\beta\mathbf{J},\mathbf{J}) + 4\operatorname{tr}\beta\,(\mathbf{J},\mathbf{K}) - 24(\beta\mathbf{J},\mathbf{K}) + 8(\beta\mathbf{K},\mathbf{K}) + 3\operatorname{tr}\beta\,\hbar^2\Big),\\
\underline{\mathbf{Q}_1} &= 20\gamma\mathbf{S}_0\Big(2\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2^2 - 2\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2^2 - 7\mathbf{J}_1\mathbf{J}_2\mathbf{K}_2 + 7\mathbf{J}_2\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2 - 5\mathbf{J}_2^2\mathbf{K}_1 + 5\mathbf{J}_1\mathbf{K}_2^2 -\\
&\qquad - \mathbf{J}_3^2\mathbf{K}_1 + \mathbf{J}_1\mathbf{K}_3^2 + \mathbf{J}_3\mathbf{J}_1\mathbf{K}_3 - \mathbf{J}_3\mathbf{K}_3\mathbf{K}_1 + \frac{4}{3}\hbar^2(\mathbf{J}_1 - \mathbf{K}_1)\Big),\\
\underline{\mathbf{P}_2} &= \mathbf{S}_0\big(-17(\widetilde{e}_1^2 + \widetilde{e}_3^2)\mathbf{S}_0^2 - 42\widetilde{e}_1^2\mathbf{J}_1^2 - 12\widetilde{e}_1(2+7\widetilde{e}_3)\mathbf{J}_1\mathbf{J}_3 - 2(1+12\widetilde{e}_3+21\widetilde{e}_3^2)\mathbf{J}_3^2 +\\
&\qquad + 120\widetilde{e}_1^2\mathbf{J}_1\mathbf{K}_1 + 8\widetilde{e}_1(4+15\widetilde{e}_3)\mathbf{J}_3\mathbf{K}_1 - 8\widetilde{e}_1(4-15\widetilde{e}_3)\mathbf{J}_1\mathbf{K}_3 -\\
&\qquad - 4(1-30\widetilde{e}_3^2)\mathbf{J}_3\mathbf{K}_3 - 42\widetilde{e}_1^2\mathbf{K}_1^2 + 12\widetilde{e}_1(2-7\widetilde{e}_3)\mathbf{K}_1\mathbf{K}_3 -\\
&\qquad - 2(1-12\widetilde{e}_3+21\widetilde{e}_3^2)\mathbf{K}_3^2 - 19(\widetilde{e}_1^2+\widetilde{e}_3^2)\hbar^2\big),\\
\underline{\mathbf{Y}_1} &= \mathbf{S}_0\big(3\mathbf{S}_0^2 + 4(\mathbf{J}_3\mathbf{K}_3 - \mathbf{J}_3^2 - \mathbf{K}_3^2) - 8(\mathbf{J}_1\mathbf{K}_1 + \mathbf{J}_2\mathbf{K}_2) + \hbar^2\big),\\
\underline{\mathbf{Z}_1} &= 6\mathbf{S}_0\big(e_1(\mathbf{J}_1 - \mathbf{K}_1) + e_3(\mathbf{J}_3 - \mathbf{K}_3)\big).
\end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{J} = (\mathbf{J}_1, \mathbf{J}_2, \mathbf{J}_3)$ *и* $\mathbf{K} = (\mathbf{K}_1, \mathbf{K}_2, \mathbf{K}_3)$ *порождают алгебру* $so(4)$ *операторов, коммутирующих с* $\mathbf{S}_0$. *Генераторы* $\mathbf{J}$ *и* $\mathbf{K}$ *определены формулами*

$$\mathbf{J} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}(\mathbf{M} + \mathbf{R}), \qquad \mathbf{K} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2}(\mathbf{M} - \mathbf{R}),$$

где

$$\mathbf{M} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{q} \times \mathbf{p}, \qquad \mathbf{R} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \mathbf{q}\Big(\frac{1}{4} - |\mathbf{p}|^2\Big) + 2(\mathbf{q}, \mathbf{p})\mathbf{p} - 2i\hbar\mathbf{p}.$$

Вектор $\mathbf{M}$ *– момент количества движения, а* $\mathbf{R}$ *– модифицированный вектор Лапласа–Рунге–Ленца.*

В формулах для усредненного гамильтониана все операторы $\mathbf{J}_j$ *и* $\mathbf{K}_l$ *симметризуются по Вейлю.*

4. Явление резонанса

4.1. Решение спектральной задачи (3.4)

Прежде всего необходимо проанализировать оператор $\underline{\mathbf{P}_1}$ в задаче (3.4). В силу (3.6) он записывается через сумму двух коммутирующих операторов $3\widetilde{e}_1\mathbf{J}_1 + (1+3\widetilde{e}_3)\mathbf{J}_3$ и

$-3\widetilde{e}_1\mathbf{K}_1+(1-3\widetilde{e}_3)\mathbf{K}_3$. Этим элементам алгебры Ли $so(4)=su(2)\times su(2)$ соответствуют два вектора из $su(2)$:

$$\begin{pmatrix} 3\widetilde{e}_1 \\ 0 \\ 1+3\widetilde{e}_3 \end{pmatrix} = \frac{B-3n\hbar E}{\varepsilon}, \qquad \begin{pmatrix} -3\widetilde{e}_1 \\ 0 \\ 1-3\widetilde{e}_3 \end{pmatrix} = \frac{B+3n\hbar E}{\varepsilon}. \tag{4.1}$$

Здесь E и B – исходные напряженности электрического и магнитного полей.

Пусть оба вектора $B-3n\hbar E$ и $B+3n\hbar E$ ненулевые. Тогда введем *углы* θ_1 *между лучом* (Ox_1) *и вектором* $B-3n\hbar E$ и θ_2 *между лучом* (Ox_2) *и вектором* $B+3n\hbar E$. Обозначим через $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ длины векторов:

$$\mathcal{L}=\sqrt{9\widetilde{e}_1^2+(1+3\widetilde{e}_3)^2}, \qquad \mathcal{R}=\sqrt{9\widetilde{e}_1^2+(1-3\widetilde{e}_3)^2}. \tag{4.2}$$

Если же один из векторов $B\mp 3n\hbar E$ нулевой, то соответствующее число $\mathcal{L}$ или $\mathcal{R}$ в (4.2) равно нулю, тогда положим $\theta_1=\theta_2=\pi/2$.

Определим следующие линейные комбинации образующих $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$:

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}_1=\cos\theta_1\cdot\mathbf{J}_1+\sin\theta_1\cdot\mathbf{J}_3, && \mathbf{A}_2=\cos\theta_2\cdot\mathbf{K}_1+\sin\theta_2\cdot\mathbf{K}_3,\\ &\mathbf{B}_1=-\sin\theta_1\cdot\mathbf{J}_1+\cos\theta_1\cdot\mathbf{J}_3+i\mathbf{J}_2, && \mathbf{B}_2=-\sin\theta_2\cdot\mathbf{K}_1+\cos\theta_2\cdot\mathbf{K}_3-i\mathbf{K}_2,\\ &\mathbf{C}_1=-\sin\theta_1\cdot\mathbf{J}_1+\cos\theta_1\cdot\mathbf{J}_3-i\mathbf{J}_2, && \mathbf{C}_2=-\sin\theta_2\cdot\mathbf{K}_1+\cos\theta_2\cdot\mathbf{K}_3+i\mathbf{K}_2. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Оператор $\underline{\mathbf{P}_1}$ (3.6) может быть представлен через линейную комбинацию коммутирующих операторов $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$ (4.3):

$$\underline{\mathbf{P}_1}=2\mathbf{S}_0(\mathcal{L}\mathbf{A}_1+\mathcal{R}\mathbf{A}_2). \tag{4.4}$$

Другие слагаемые в гамильтониане задачи (3.3) также легко выражаются через образующие $\mathbf{A}_j$, $\mathbf{B}_j$, $\mathbf{C}_j$ (4.3); см. [1].

На собственном подпространстве оператора $\mathbf{S}_0$

$$\mathcal{L}[N]\overset{\text{def}}{=}\big\{\psi\in L^2_-(\mathbb{R}^3)\mid \mathbf{S}_0\psi=\hbar N\psi\big\}, \tag{4.5}$$

которое отвечает собственному значению $\hbar n$, спектральная задача (3.4) имеет вид

$$2n\hbar(\mathcal{L}\mathbf{A}_1+\mathcal{R}\mathbf{A}_2)\psi=\underline{\lambda}(0,0)\psi, \qquad \psi\in\mathcal{L}[n], \tag{4.6}$$

где $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ – генераторы (4.3). Зная собственный базис генераторов $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$, можно выписать решение задачи (4.6).

Теорема 4.1. *В собственном подпространстве* (4.5) *оператора* $\mathbf{S}_0$ *следующие функции образуют ортонормированный базис*:

$$\psi^N_{j_1,j_2}=c^N_{j_1,j_2}(-\mathbf{B}_1)^{j_1}\mathbf{B}_2^{j_2}(\mathbf{V}^*_\theta)^{N-1}\psi^1_{0,0}, \qquad 0\le j_1,j_2\le N-1. \tag{4.7}$$

Здесь $\psi^1_{0,0}$ *– нижняя собственная функция оператора* $\mathbf{S}_0$ *(т.е.* $\mathbf{S}_0\psi^1_{0,0}=\hbar\psi^1_{0,0}$*); операторы* $\mathbf{V}^*_\theta=\big((\mathbf{V}^*_\theta)_1,(\mathbf{V}^*_\theta)_2,(\mathbf{V}^*_\theta)_3\big)$ *задаются формулой*

$$\mathbf{V}^*_\theta\overset{\text{def}}{=}\cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\mathbf{V}^*_1+i\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\mathbf{V}^*_2+\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}\mathbf{V}^*_3+\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\mathbf{v}^*,$$

где

$$\mathbf{V}^* = \frac{1}{4}\mathbf{q} - 2(\mathbf{q},\mathbf{p})\mathbf{p} + \mathbf{q}|\mathbf{p}|^2 - i|\mathbf{q}|\mathbf{p} + 2i\hbar\mathbf{p}, \qquad \mathbf{v}^* = \frac{1}{4}|\mathbf{q}| - |\mathbf{q}|\,|\mathbf{p}|^2 - i(\mathbf{q},\mathbf{p}) - \hbar;$$

$c^N_{j_1,j_2}$ – *нормировочная константа*:

$$c^N_{j_1,j_2} = \frac{1}{\big((N-1)!\big)^2 2^{N-1}\hbar^{n-1+j_1+j_2}}\sqrt{\frac{(N-1-j_1)!\,(N-1-j_2)!}{j_1!\,j_2!}}.$$

Явный вид формулы для функций (4.7) приведен в приложении B. По отношению к генераторам (4.3) собственные функции $\psi^N_{j_1,j_2}$ “действия” обладают следующими свойствами. Они образуют собственный базис для генераторов $\mathbf{A}_j$:

$$\mathbf{A}_1\psi^N_{j_1,j_2} = \frac{\hbar}{2}(N-1-2j_1)\psi^N_{j_1,j_2}, \qquad \mathbf{A}_2\psi^N_{j_1,j_2} = -\frac{\hbar}{2}(N-1-2j_2)\psi^N_{j_1,j_2}, \tag{4.8}$$

а операторы $\mathbf{B}_j$ и $\mathbf{C}_j$ являются для них повышающими и понижающими.

В частности, из формул (4.8) видно, что спектр задачи (4.6) состоит из чисел $n\hbar^2\big(\mathcal{L}(n-1-2j_1) - \mathcal{R}(n-1-2j_2)\big)$, где $1 \le j_1, j_2 \le n-1$. Если константы $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ несоизмеримы, то все эти числа различны (спектр простой). В этом случае вырождение спектра оператора $\mathbf{S}_0$ в исходной задаче (2.6) (или в задаче (2.3)) снимается уже в первом члене теории возмущений по внешнему полю, т.е. по ε. Нас, однако, будет интересовать случай соизмеримых $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$. В этом случае возникает нетривиальная динамическая алгебра, контролирующая снятие вырождения спектра в следующем приближении по ε. Ниже мы предъявим и исследуем эту алгебру.

4.2. Резонансное соотношение между электрическим и магнитным полями

В силу формул (4.1), (4.2) соизмеримость $\mathcal{L}$ и $\mathcal{R}$ означает соизмеримость длин векторов $B-3n\hbar E$ и $B+3n\hbar E$. Мы будем говорить, что поля E и B *находятся в резонансе*, если выполнено одно из следующих **условий резонанса**:

— либо

$$\frac{|B-3n\hbar E|}{|B+3n\hbar E|} = \frac{l}{r},$$

l, r – взаимно простые натуральные числа;

— либо E ортогонально B (и тогда выбираем $l = r = 1$);

– либо E параллельно B, причем $B = \pm 3n\hbar E$ (тогда выбираем l или r равным нулю).

В [1] исследуются случаи резонанса при всех значениях l и r. Здесь мы подробно остановимся на одном случае резонанса, когда

$$\frac{|B-3n\hbar E|}{|B+3n\hbar E|} = \frac{2}{1}, \tag{4.9}$$

т.е.

$$l = 2, \qquad r = 1. \tag{4.10}$$

Такой резонанс между полями E и B возникает, если параметры e_1 и e_3 подчинены условиям

$$\frac{1}{9} < n\hbar e_3 < 1, \qquad n\hbar e_1 = \sqrt{(1 - n\hbar e_3)(n\hbar e_3 - \frac{1}{9})}. \tag{4.11}$$

В случае (4.9)

$$\mathcal{L} = 2d, \qquad \mathcal{R} = d, \tag{4.12}$$

где $d = 2\sqrt{n\hbar e_3}$. Собственные значения оператора $2(\mathcal{L}\mathbf{A}_1 + \mathcal{R}\mathbf{A}_2)$ имеют вид $\underline{\lambda}(0,0) = dn\hbar^2(n - 1 + 2m)$, где

$$m = m(j_1, j_2) = j_2 - 2j_1, \qquad j_1, j_2 \in \{0, 1, \dots, n-1\}. \tag{4.13}$$

Очевидно, разным парам чисел j_1, j_2 может соответствовать одно и то же значение m. Поэтому, прежде всего, введем обозначения для однозначной записи чисел m. Для этого разделим m на 2 с остатком. Тогда получим, что существует единственная пара целых чисел $(m_2^0, \Delta m)$ такая, что

$$m = m_2^0 + 2\Delta m, \qquad m_2^0 \in \{0, 1\}, \qquad -(n-1) \le \Delta m \le -\Big[\frac{n - 1 - m_2^0}{2}\Big]. \tag{4.14}$$

Здесь квадратные скобки обозначают целую часть числа.

Верно и обратное: если некоторая пара целых чисел $(m_2^0, \Delta m)$ удовлетворяет условиям (4.14), то найдутся числа j_1 и j_2 такие, что выполнены условия (4.13). А именно, общее решение уравнения (4.13) имеет вид $j_1 = m_1 + rj$, $j_2 = m_2 + lj$, $j = 0, 1, \dots, D$, где

$$\begin{gathered} m_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|\Delta m|}{2} - \frac{\Delta m}{2}, \qquad m_2 \stackrel{\text{def}}{=} m_2^\circ + |\Delta m| + \Delta m, \\ D \stackrel{\text{def}}{=} \min\Big\{n - 1 - m_1, \Big[\frac{n - 1 - m_2}{2}\Big]\Big\}. \end{gathered} \tag{4.15}$$

Обозначим через $\mathcal{M}_{2,1}$ множество целых чисел m, для которых задача (4.13) имеет хотя бы одно решение (j_1, j_2),

$$\mathcal{M}_{2,1} = \big\{-2n + 2, -2n + 3, \dots, n - 1\big\}. \tag{4.16}$$

Отметим, что числам m_1, m_2, D (4.15) можно дать эквивалентное определение: для любого $m \in \mathcal{M}_{2,1}$ числа m_1, m_2 (4.15) – наименьшие значения (соответственно) переменных j_1, j_2, подчиненных условиям (4.13), а число $D + 1$ – количество пар (j_1, j_2), удовлетворяющих условиям (4.13).

Предложение 4.1. *Предположим, что поля E и B удовлетворяют условию резонанса (4.9) и соотношениям (4.12). Тогда собственные значения задачи (3.4) задаются формулой*

$$\underline{\lambda}(0,0) = \underline{\lambda_m^n}(0,0) = dn\hbar^2(n - 1 + 2m), \tag{4.17}$$

где $m \in \mathcal{M}_{2,1}$. Соответствующими ортонормированными собственными функциями служат $\psi = \psi^n_{m_1+j,\, m_2+2j}$ (4.7), где $j = 0, 1, \dots, D$; числа m_1, m_2 и D определены формулами (4.15).

5. Вторичное операторное усреднение

Рассмотрим теперь усредненную задачу (3.3) в случае, когда поля E и B находятся в резонансе (4.9). Усредненный оператор $\underline{\mathbf{P}_1}$ можно рассматривать как новый оператор "действие": его спектр с точностью до мультипликативной константы состоит из целых чисел. Поэтому к гамильтониану задачи (3.3) можно еще раз применить операторное усреднение.

5.1. Перенормировка усредненной спектральной задачи

Пусть число d определяется соотношениями (4.12).

Умножим второе из уравнений (3.3) на $1/(2dn\hbar)$ и введем обозначения

$$\begin{gathered}\mathbf{G}_0 \stackrel{\text{def}}{=} 2\mathbf{A}_1+\mathbf{A}_2, \qquad \mathbf{G}_1 \stackrel{\text{def}}{=} \sigma(\underline{\mathbf{R}_1}+\underline{\mathbf{Q}_1})+\mu(\underline{\mathbf{P}_2}+\underline{\mathbf{Y}_1}+\underline{\lambda}(0,0)\underline{\mathbf{Z}_1}),\\ \zeta \stackrel{\text{def}}{=} \underline{\lambda}(\mu,\sigma)-\underline{\lambda}(0,0).\end{gathered} \tag{5.1}$$

Здесь $\underline{\lambda}(\mu,\sigma)$ – искомые собственные значения усредненной задачи (3.3), а $\underline{\lambda}(0,0)$ определены в предложении 3.2.

Тогда вместо (3.3) получим эквивалентную ей задачу

$$\begin{cases}\mathbf{S}_0\psi=\psi,\\ \big(\mathbf{G}_0+\frac{1}{2dn\hbar}\mathbf{G}_1\big)\psi=\frac{\lambda(0,0)+\zeta}{2dn\hbar}\psi.\end{cases} \tag{5.2}$$

5.2. Спектральная задача после двукратного усреднения

Введем операторы

$$\begin{gathered}\overline{\mathbf{G}_1} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\tau\mathbf{G}_0/\hbar}\mathbf{G}_1 e^{i\tau\mathbf{G}_0/\hbar}\,d\tau,\\ {}^{\#}\mathbf{G}_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi-\tau)e^{-i\tau\mathbf{G}_0/\hbar}\mathbf{G}_1 e^{i\tau\mathbf{G}_0/\hbar}\,d\tau,\end{gathered} \tag{5.3}$$

обеспечивающие выполнение тождеств

$$e^{i\,{}^{\#}\mathbf{G}_1/(2dn\hbar^2)}\Big(\mathbf{G}_0+\frac{\mu}{2dn\hbar}\mathbf{G}_1\Big)e^{-i\,{}^{\#}\mathbf{G}_1/(2dn\hbar^2)}=\mathbf{G}_0+\frac{1}{2dn\hbar}\overline{\mathbf{G}_1}+O(\sigma^2), \qquad \big[\overline{\mathbf{G}_1},\mathbf{G}_0\big]=0.$$

С помощью этих тождеств спектральная задача (5.2) сводится к спектральной задаче для дважды усредненного гамильтониана $\overline{\mathbf{G}_1}$:

$$\begin{cases}\mathbf{S}_0\varphi=\hbar n\varphi,\\ \mathbf{G}_0\varphi=\frac{\hbar(n-1+2m)}{2}\varphi,\\ \overline{\mathbf{G}_1}\varphi=\zeta\varphi,\end{cases} \tag{5.4}$$

где m пробегает множество $\mathcal{M}_{2,1}$ (4.16).

Собственные функции ψ и φ задач (3.3) и (5.4) связаны так: $\psi=e^{-\frac{i}{2n\hbar^2 d}({}^{\#}\mathbf{G}_1+O(\mu\sigma))}\varphi$. При дополнительном предположении $\varepsilon\delta\ll\hbar$ получаем

$$\psi=\exp\Big\{-\frac{i}{2n\hbar^2 d}{}^{\#}\mathbf{G}_1\Big\}\varphi+O(\frac{\varepsilon\delta}{\hbar}).$$

5.3. Алгебра совместных симметрий операторов $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{G}_0$

В результате двукратного усреднения исходная система (2.6) сводится к квантовой интегрируемой системе с гамильтонианом $\overline{\mathbf{G}_1}$. Этот гамильтониан обладает двумя независимыми коммутирующими между собой квантовыми симметриями $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{G}_0$.

Обозначим через $\mathcal{F}_{quant}$ *алгебру всех операторов, коммутирующих с* $\mathbf{S}_0$ *и с* $\mathbf{G}_0$.

Теорема 5.1. 1. *Алгебра* $\mathcal{F}_{quant}$ *операторов, коммутирующих с* $\mathbf{S}_0$ *и* $\mathbf{G}_0 = 2\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2$, *порождается образующими*

$$\mathbf{A}_1, \quad \mathbf{A}_2, \quad \mathbf{A}_3 = \mathbf{B}_1\mathbf{C}_1 + \hbar\mathbf{A}_1, \quad \mathbf{A}_4 = \mathbf{B}_2\mathbf{C}_2 - \hbar\mathbf{A}_2, \quad \mathbf{A}_+ = \mathbf{B}_1\mathbf{B}_2^2, \quad \mathbf{A}_- = \mathbf{C}_1\mathbf{C}_2^2; \tag{5.5}$$

здесь $\mathbf{A}_j$, $\mathbf{B}_j$, $\mathbf{C}_j$ *– операторы* (4.3). *В гильбертовом пространстве* $L^2_-(\mathbb{R}^3)$ *операторы* $\mathbf{A}_j$ *эрмитовы*: $\mathbf{A}_j = \mathbf{A}_j^*$, *а* $\mathbf{A}_+$ *и* $\mathbf{A}_-$ *взаимно сопряжены*: $\mathbf{A}_+ = \mathbf{A}_-^*$.

2. *Образующие* $\mathbf{A}_j$, $\mathbf{A}_+$, $\mathbf{A}_-$ *алгебры* $\mathcal{F}_{quant}$ *подчинены следующим полиномиальным перестановочным соотношениям*:

$$\begin{aligned}
&[\mathbf{A}_i, \mathbf{A}_j] = 0, && [\mathbf{A}_-, \mathbf{A}_+] = \hbar f(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4),\\
&\mathbf{A}_1\mathbf{A}_+ = \mathbf{A}_+(\mathbf{A}_1 - \hbar), && \mathbf{A}_-\mathbf{A}_1 = (\mathbf{A}_1 - \hbar)\mathbf{A}_-,\\
&\mathbf{A}_2\mathbf{A}_+ = \mathbf{A}_+(\mathbf{A}_2 + 2\hbar), && \mathbf{A}_-\mathbf{A}_2 = (\mathbf{A}_2 + 2\hbar)\mathbf{A}_-,\\
&\mathbf{A}_3\mathbf{A}_+ = \mathbf{A}_+(\mathbf{A}_3 + 2\hbar\mathbf{A}_1 - \hbar^2), && \mathbf{A}_-\mathbf{A}_3 = (\mathbf{A}_3 + 2\hbar\mathbf{A}_1 - \hbar^2)\mathbf{A}_-,\\
&\mathbf{A}_4\mathbf{A}_+ = \mathbf{A}_+(\mathbf{A}_4 - 4\hbar\mathbf{A}_2 - 4\hbar^2), && \mathbf{A}_-\mathbf{A}_4 = (\mathbf{A}_4 - 4\hbar\mathbf{A}_2 - 4\hbar^2)\mathbf{A}_-.
\end{aligned} \tag{5.6}$$

Здесь полином f *от четырех переменных задан как*

$$f(A_1, A_2, A_3, A_4) \stackrel{\text{def}}{=} 2\big(A_1A_4^2 - 4A_2A_3A_4 - 2\hbar^2A_1A_4 + 2\hbar^2A_2A_3 + 3\hbar^2A_1A_2^2\big).$$

Алгебра с соотношениями (5.6) *имеет четыре элемента Казимира*:

$$\mathbf{A}_+\mathbf{A}_- - \rho(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4), \qquad 2\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2, \qquad \mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_3, \qquad \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_4,$$

где

$$\rho(A_1, A_2, A_3, A_4) \stackrel{\text{def}}{=} (A_3 - \hbar A_1)(A_4 + \hbar A_2)(A_4 + 3\hbar A_2 - 2\hbar^2).$$

3. *В представлении* (5.5) *элементы Казимира выражаются через* $\mathbf{S}_0$, $\mathbf{G}_0$ *с помощью формул*

$$\begin{aligned}
&\mathbf{A}_+\mathbf{A}_- - \rho(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3, \mathbf{A}_4) = 0, && 2\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 = \mathbf{G}_0,\\
&\mathbf{A}_1^2 + \mathbf{A}_3 = \frac{1}{4}(\mathbf{S}_0^2 - \hbar^2), && \mathbf{A}_2^2 + \mathbf{A}_4 = \frac{1}{4}(\mathbf{S}_0^2 - \hbar^2).
\end{aligned}$$

Замечание 5.1. Перестановочные соотношения (5.6), конечно, можно переписать как *коммутационные* соотношения между *эрмитовыми* образующими $\mathbf{A}_j$, $(\mathbf{A}_+ + \mathbf{A}_-)/2$, $(\mathbf{A}_+ - \mathbf{A}_-)/(2i)$. Мы выбрали в (5.5), (5.6) неэрмитовы образующие типа рождение–уничтожение $\mathbf{A}_j$, $\mathbf{A}_+$, $\mathbf{A}_-$ с целью дальнейшего их использования в конструкции когерентных состояний, следуя приложению Б из работы [4] (или общей схеме из работы [2]). Алгебра (5.6) попадает в класс алгебр, исследованный в работе [2].

5.4. Гамильтониан дважды усредненной задачи как элемент алгебры $\mathcal{F}_{quant}$

Теперь мы приведем выражение для дважды усредненного гамильтониана через образующие (5.5).

Предложение 5.1. *Предположим, что поля E и B находятся в резонансе* (4.9). *Пусть углы θ_1, θ_2 и длины $\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$ определены как в п.* 3.3, *т.е.*

$$\mathcal{L} = 4\sqrt{\widetilde{e}_3}, \qquad \cos\theta_1 = \frac{\sqrt{(1-\widetilde{e}_3)(9\widetilde{e}_3-1)}}{4\sqrt{\widetilde{e}_3}}, \qquad \sin\theta_1 = \frac{1+3\widetilde{e}_3}{4\sqrt{\widetilde{e}_3}},$$
$$\mathcal{R} = 2\sqrt{\widetilde{e}_3}, \qquad \cos\theta_2 = -\frac{\sqrt{(1-\widetilde{e}_3)(9\widetilde{e}_3-1)}}{2\sqrt{\widetilde{e}_3}}, \qquad \sin\theta_2 = \frac{1-3\widetilde{e}_3}{4\sqrt{\widetilde{e}_3}},$$

Усредненный гамильтониан $\overline{\mathbf{G}_1}$ (5.1), (5.3) *является элементом алгебры $\mathcal{F}_{quant}$. Он задается через образующие* (5.5) *формулой*

$$\overline{\mathbf{G}_1} = \mathbf{S}_0\Big(T_{\mu,\sigma}\big(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{S}_0, \underline{\lambda}(0,0)\big) + 5\sigma\gamma\mathcal{Q}(\mathbf{A}_+ + \mathbf{A}_-)\Big). \tag{5.7}$$

Здесь все операторы симметризованы по Вейлю, а полином $T_{\mu,\sigma}$ определен как

$$\begin{aligned} T_{\mu,\sigma}(a_1,a_2,s,\lambda) \overset{\text{def}}{=} {}& 5\sigma\gamma(\mathcal{Q}_1a_1^3 + \mathcal{Q}_2a_1^2a_2 + \mathcal{Q}_3a_1a_2^2 + \mathcal{Q}_4a_2^3) + (\sigma\mathcal{R}_3 + \mu\mathcal{P}_3 + \mu\mathcal{Y}_3)a_1^2 + \\ &+ (\sigma\mathcal{R}_4 + \mu\mathcal{P}_4 + \mu\mathcal{Y}_4)a_1a_2 + (\sigma\mathcal{R}_5 + \mu\mathcal{P}_5 + \mu\mathcal{Y}_5)a_2^2 + \\ &+ \big(5\sigma\gamma(\mathcal{Q}_5s^2 + \hbar^2\mathcal{Q}_6) + \mu\lambda\mathcal{Z}_1\big)a_1 + \big(5\sigma\gamma(\mathcal{Q}_7s^2 + \hbar^2\mathcal{Q}_8) + \mu\lambda\mathcal{Z}_2\big)a_2 + \\ &+ (\sigma\mathcal{R}_1 + \mu\mathcal{P}_1 + \mu\mathcal{Y}_1)s^2 + (\sigma\mathcal{R}_2 + \mu\mathcal{P}_2 + \mu\mathcal{Y}_2)\hbar^2; \end{aligned} \tag{5.8}$$

числа $\mathcal{R}_j$, $\mathcal{Q}_j$, $\mathcal{P}_j$, $\mathcal{Y}_j$, $\mathcal{R}_j$ выписаны в приложении A.

6. Алгебра $\mathcal{F}_{quant}$: неприводимые представления и когерентные состояния

6.1. Пуассонова алгебра $\mathcal{F}$

Символ оператора $\mathbf{S}_0$ – функция $S_0 = |q|\big(1/4 + |p|^2\big)$ на $\mathbb{R}^6$. Она находится в инволюции с вектор-функциями

$$J = \frac{1}{2}(M+R), \qquad K = \frac{1}{2}(M-R), \qquad M = q\times p, \qquad R = q\Big(\frac{1}{4} - |p|^2\Big) + 2(q,p)p.$$

Компоненты J и K порождают алгебру Ли $so(4)$ относительно скобки Пуассона:

$$\{J_j, J_k\} = -\varepsilon_{jkl}J_l, \qquad \{J_j, K_k\} = 0, \qquad \{K_j, K_k\} = -\varepsilon_{jkl}K_l.$$

Вместо J_j и K_k введем новые образующие

$$\begin{aligned} A_1 &= \cos\theta_1\cdot J_1 + \sin\theta_1\cdot J_3, & A_2 &= \cos\theta_2\cdot K_1 + \sin\theta_2\cdot K_3, \\ B_1 &= -\sin\theta_1\cdot J_1 + \cos\theta_1\cdot J_3 + iJ_2, & B_2 &= -\sin\theta_2\cdot K_1 + \cos\theta_2\cdot K_3 - iK_2, \\ C_1 &= -\sin\theta_1\cdot J_1 + \cos\theta_1\cdot J_3 - iJ_2, & C_2 &= -\sin\theta_2\cdot K_1 + \cos\theta_2\cdot K_3 + iK_2. \end{aligned}$$

Теорема 6.1. 1. *Алгебра $\mathcal{F}$ функций на $T^*\mathbb{R}^3$, находящихся в инволюции с S_0 и $G_0 = 2A_1 + A_2$, порождается следующими образующими:*

$$A_1, \qquad A_2, \qquad A_3 = B_1C_1, \qquad A_4 = B_2C_2, \qquad A_+ = B_1B_2^2, \qquad A_- = C_1C_2^2. \quad (6.1)$$

2. *Образующие пуассоновой алгебры $\mathcal{F}$ подчинены полиномиальным соотношениям со структурными константами l и r:*

$$\begin{aligned}
&\{A_j, A_k\} = 0, && \{A_-, A_+\} = 2iA_4(A_1A_4 - 4A_2A_3),\\
&\{A_1, A_+\} = -iA_+, && \{A_1, A_-\} = iA_-,\\
&\{A_2, A_+\} = 2iA_+, && \{A_2, A_-\} = -2iA_-,\\
&\{A_3, A_+\} = 2iA_1A_+, && \{A_3, A_-\} = -2iA_1A_-,\\
&\{A_4, A_+\} = -4iA_2A_+, && \{A_4, A_-\} = 4iA_2A_-.
\end{aligned} \qquad (6.2)$$

3. *Соотношения (6.2) задают пуассонову алгебру функций на $\mathbb{R}^6$. Ее симплектические листы $\Omega \subset \mathbb{R}^6$ задаются четырьмя функциями Казимира:*

$$\varkappa_1 = a_+a_- - a_3a_4^2, \qquad \varkappa_2 = 2a_1 + a_2, \qquad \varkappa_3 = a_1^2 + a_3, \qquad \varkappa_4 = a_2^2 + a_4$$

(здесь $a_1, a_2, a_3, a_4, (a_+ + a_-)/2, (a_+ - a_-)/(2i)$ – декартовы координаты на $\mathbb{R}^6$). Реализации $a_j = A_j$, $a_+ = A_+$, $a_- = A_-$ (6.1) соответствует область, где

$$\varkappa_1 = 0, \qquad \varkappa_3 = \varkappa_4, \qquad a_3 \geq 0, \qquad a_4 \geq 0. \qquad (6.3)$$

В этой области симплектические листы параметризуются двумя константами s и t, причем $|t| \leq 2s$; замыкание листа задается уравнениями

$$\overline{\Omega} = \Big\{a_+a_- - a_3a_4^2 = 0, \quad 2a_1 + a_2 = t, \quad a_1^2 + a_3 = s^2, \quad a_2^2 + a_4 = s^2\Big\}. \qquad (6.4)$$

В реализации (6.1)

$$\sqrt{B_1C_1 + A_1^2}\,\Big|_\Omega = \sqrt{B_2C_2 + A_2^2}\,\Big|_\Omega = \frac{S_0}{2}\Big|_\Omega = s, \qquad (2A_1 + A_2)\big|_\Omega = t.$$

Если $|t| = 2s$, то листы Ω нульмерны и состоят из одной точки

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_+, a_-) = \Big(\frac{t}{4}, \frac{t}{2}, s^2 - \frac{t^2}{16}, s^2 - \frac{t^2}{4}, 0, 0\Big).$$

Если $0 < |t| < 2s$, то листы диффеоморфны плоскости и получаются из замыкания $\overline{\Omega}$ выкидыванием точки

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_+, a_-) = \Big(\frac{\operatorname{sgn}(t)(|t| - s)}{2}, \operatorname{sgn}(t)s, \frac{4s^2 - (|t| - s)^2}{4}, 0, 0, 0\Big),$$

Если $t = 0$, то листы Ω диффеоморфны цилиндру и получаются из замыкания (6.4) выкидыванием двух точек

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_+, a_-) = \Big(\pm\frac{s}{2}, \mp s, \frac{3s^2}{4}, 0, 0, 0\Big).$$

Во всех случаях выброшенные точки сами являются нульмерными симплектическими листами.

4. *Кэлерова структура на листах* Ω *вводится с помощью комплексной координаты*

$$z = \frac{a_-}{(s+a_1)^r(s-a_2)^2}. \tag{6.5}$$

Образующие $a_j|_\Omega$, $a_+|_\Omega$, $a_-|_\Omega$ *выражаются через* z *из соотношений* (6.4), (6.5).

Симплектическая структура на листах Ω, *соответствующая скобкам* (6.2), *имеет вид*

$$\omega = -\frac{i}{\bar z}\frac{\partial a_1}{\partial z}\, d\bar z \wedge dz. \tag{6.6}$$

6.2. Неприводимые представления алгебры $\mathcal{F}_{quant}$

Определим положительные числа

$$\kappa_0 = 1, \qquad \kappa_j = (-1)^j \frac{(1+m_1-n)_j(1+m_2-n)_{2j}}{(1+m_1)_j(1+m_2)_{2j}}$$

при $1 \le j \le D$. Здесь операция $(x)_j$, как обычно, определяется формулой

$$(x)_j \equiv x(x+1)\dots(x+j-1), \qquad (x)_0 \equiv 1. \tag{6.7}$$

Введем гильбертово пространство $\mathcal{P}[n,m]$ полиномов степени не выше D. Для полиномов вида $f(\bar z) = \sum_{j=0}^D f_j \bar z^j$ скалярное произведение определим формулой

$$\langle f, f'\rangle_{\mathcal{P}[n,m]} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sum_{j=0}^{D} \frac{1}{\kappa_j} f_j \overline{f'_j}. \tag{6.8}$$

Теорема 6.2. *Пусть* $n \in \mathbb{N}$, $m \in \mathcal{M}_{2,1}$ (4.16), *а числа* m_1, m_2, D *заданы формулами* (4.15). *Тогда для любого* $\hbar > 0$ *дифференциальные операторы*

$$\begin{gathered}
\mathring{A}_1 = \hbar\Big(\frac{n-1}{2} - m_1 - \bar z\frac{\partial}{\partial \bar z}\Big), \qquad \mathring{A}_2 = -\hbar\Big(\frac{n-1}{2} - m_2 - 2\bar z\frac{\partial}{\partial \bar z}\Big),\\
\mathring{A}_3 = \frac{\hbar^2(n^2-1)}{4} - \mathring{A}_1^2, \qquad \mathring{A}_4 = \frac{\hbar^2(n^2-1)}{4} - \mathring{A}_2^2,\\
\mathring{A}_+ = \hbar^3\Big(n - m_1 - \bar z\frac{\partial}{\partial \bar z}\Big)\Big(n - m_2 - 2\bar z\frac{\partial}{\partial \bar z}\Big)\Big(n - m_2 + 1 - 2\bar z\frac{\partial}{\partial \bar z}\Big)\bar z,\\
\mathring{A}_- = \frac{\hbar^3}{\bar z}\Big(m_1 + \bar z\frac{\partial}{\partial \bar z}\Big)\Big(m_2 + 2\bar z\frac{\partial}{\partial \bar z}\Big)\Big(m_2 - 1 + 2\bar z\frac{\partial}{\partial \bar z}\Big)
\end{gathered} \tag{6.9}$$

задают неприводимое представление алгебры (5.6) *в пространстве* $\mathcal{P}[n,m]$, *соответствующее симплектическому листу* Ω (6.4) *с параметрами* $s = \hbar n/2$, $t = \hbar(n-1+2m)/2$. *В этом представлении операторы* $\mathring{A}_j$ *эрмитовы:* $\mathring{A}_j = \mathring{A}_j^*$, *а* $\mathring{A}_+$ *и* $\mathring{A}_-$ *взаимно сопряжены:* $\mathring{A}_+ = \mathring{A}_-^*$.

Это представление алгебры $\mathcal{F}_{quant}$ мы назовем *гипергеометрическим.*

Общий алгоритм построения неприводимых представлений алгебр типа (5.6) (в том числе и представления (6.9)) описан в работах [2, 5]; см. также приложение Б к работе [4].

6.3. Когерентные состояния алгебры $\mathcal{F}_{quant}$

Предположим, что выполнены условия теоремы 6.2. Пусть задано произвольное представление соотношений (5.6) в некотором гильбертовом пространстве $\mathbb{L}$. Генераторы этого представления обозначим через $\mathbb{A}_j$, $\mathbb{A}_+$, $\mathbb{A}_-$. Предположим, что в этом представлении операторы $\mathbb{A}_j$ эрмитовы, а операторы $\mathbb{A}_+$ и $\mathbb{A}_-$ взаимно сопряжены.

Пусть $\chi_0 \in \mathbb{L}$ – нормированный "вакуумный" вектор, подчиненный уравнениям

$$\begin{aligned} &\mathbb{A}_-\chi_0 = 0, \\ &\mathbb{A}_1\chi_0 = \hbar\Big(\frac{n-1}{2} - m_1\Big)\chi_0, && \mathbb{A}_3\chi_0 = \hbar^2\Big(\frac{n^2-1}{4} - \Big(\frac{n-1}{2} - m_1\Big)^2\Big)\chi_0, \\ &\mathbb{A}_2\chi_0 = -\hbar\Big(\frac{n-1}{2} - m_2\Big)\chi_0, && \mathbb{A}_4\chi_0 = \hbar^2\Big(\frac{n^2-1}{4} - \Big(\frac{n-1}{2} - m_2\Big)^2\Big)\chi_0. \end{aligned}$$

Положим

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}_z \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j=0}^{D} \frac{1}{(1+m_1)_j(1+m_2)_{2j}} \Big(\frac{z\mathbb{A}_+}{\hbar^3}\Big)^j \chi_0 = \\ {}_0F_2\Big(\Big(1+m_1, \frac{1+m_2}{2}, \frac{2+m_2}{2}, \Big)'; \frac{z\mathbb{A}_+}{4\hbar^3}\Big)\chi_0. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Здесь ${}_sF_t(\alpha_1,\ldots,\alpha_s;\beta_1,\ldots,\beta_t;y)$ – гипергеометрический ряд [6]:

$${}_sF_t(\alpha_1,\ldots,\alpha_s;\beta_1,\ldots,\beta_t;y) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{j\geq 0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_j\ldots(\alpha_s)_j}{j!\,(\beta_1)_j\ldots(\beta_t)_j} y^j, \tag{6.11}$$

штрих в выражении ${}_sF_{t-1}\big(\alpha_1,\ldots,\alpha_s;(\beta_1,\ldots,\beta_t)';y\big)$ означает, что по меньшей мере один из параметров $\beta_1,\ldots,\beta_t$ гипергеометрического ряда равен единице и один из таких единичных параметров опускается; операция $(x)_j$ определена формулой (6.7).

Введем ортонормированные векторы

$$\chi_j = \frac{\mathbb{A}_+^j\chi_0}{\|\mathbb{A}_+^j\chi_0\|_{\mathbb{L}}}, \qquad 0 \leq j \leq D. \tag{6.12}$$

Их линейная оболочка $\mathbb{L}[n,m]$ образует подпространство в $\mathbb{L}$, на котором реализуется неприводимое представление алгебры $\mathcal{F}_{quant}$. Гипергеометрические когерентные состояния $\mathfrak{H}_z$ (6.10) могут быть разложены по базису (6.12): $\mathfrak{H}_z = \sum_{j=0}^{D} g_j(z)\chi_j$. Здесь $\{g_j\}$, $0 \leq j \leq D$, – ортонормированный базис в $\mathcal{P}[n,m]$, состоящий из мономов

$$g_j(\bar z) = \sqrt{\kappa_j}\,\bar z^j. \tag{6.13}$$

В частности, если представление $\mathbb{A}_j = \mathbf{A}_j$, $\mathbb{A}_+ = \mathbf{A}_+$, $\mathbb{A}_- = \mathbf{A}_-$ (4.6) реализовано в гильбертовом пространстве $L^2_-(\mathbb{R}^3)$, то векторы χ_j (6.12) имеют вид

$$\chi_j \stackrel{\text{def}}{=} \psi^n_{m_1+j,m_2+2j}(q), \qquad 0 \leq j \leq D \tag{6.14}$$

(функции $\psi^n_{j_1,j_2}$ заданы в (4.7), (B.1)) и образуют ортонормированный базис в подпространстве $\mathcal{L}[n,m] \in L^2_-(\mathbb{R}^3)$, где реализуется неприводимая компонента представления (5.6). Это совместное собственное подпространство операторов $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{G}_0$:

$$\mathcal{L}[n,m] \stackrel{\text{def}}{=} \Big\{\chi \in L^2_-(\mathbb{R}^3) \mid \mathbf{S}_0\chi = \hbar n\chi, \quad \mathbf{G}_0\chi = \frac{\hbar}{2}(n-1+2m)\chi\Big\}. \tag{6.15}$$

Скалярное произведение когерентных состояний (6.10) задается формулой

$$\langle \mathfrak{H}_{z'}, \mathfrak{H}_{z''} \rangle_{\mathbb{L}} = \mathfrak{K}(z'\overline{z''}), \qquad \mathfrak{K}(x) \overset{\mathrm{def}}{=} \sum_{j=0}^{D} \kappa_j x^j. \tag{6.16}$$

Полином $\mathfrak{K}(x)$ является единственным решением следующей краевой задачи для *гипергеометрического уравнения*:

$$x\Big(n-1-m_1-x\frac{d}{dx}\Big)\Big(n-2-m_2-2x\frac{d}{dx}\Big)\Big(n-1-m_2-2x\frac{d}{dx}\Big)\mathfrak{K}- \\ -\Big(m_1+x\frac{d}{dx}\Big)\Big(m_2+2x\frac{d}{dx}\Big)\Big(m_2-1+2x\frac{d}{dx}\Big)\mathfrak{K}=0, \qquad \mathfrak{K}(0)=1.$$

Отсюда следует, что

$$\mathfrak{K}(x) = {}_3F_2\Big(1+m_1-n, \frac{1+m_2-n}{2}, \frac{2+m_2-n}{2}; \\ \Big(1+m_1, \frac{1+m_2}{2}, \frac{2+m_2}{2}, \Big)'; -x\Big), \tag{6.17}$$

где ${}_sF_t$ – гипергеометрический ряд (6.11).

Предложение 6.1. *Полиномы $\mathfrak{K}(x)$ обладают воспроизводящим свойством*:

$$\Big\langle \mathfrak{K}(z'\bar{z}), \mathfrak{K}(z''\bar{z}) \Big\rangle_{\mathcal{P}[n,m]} = \mathfrak{K}(z'\overline{z''}).$$

Здесь $\mathfrak{K}(z'\bar{z})$ и $\mathfrak{K}(z''\bar{z})$ рассматриваются как элементы гильбертова пространства $\mathcal{P}[n,m]$ полиномов от $\bar{z}$ со скалярным произведением (6.8).

Теперь мы укажем явный вид преобразования, сплетающего представления алгебры $\mathcal{F}_{quant}$ с неприводимыми представлениями. Эта конструкция основана на следующем свойстве когерентных состояний $\mathfrak{H}_z$:

$$\mathbb{A}_j \mathfrak{H}_z = \overline{\mathring{A}_j} \mathfrak{H}_z, \quad j=1,2,3,4; \qquad \mathbb{A}_+ \mathfrak{H}_z = \overline{\mathring{A}_-} \mathfrak{H}_z; \qquad \mathbb{A}_- \mathfrak{H}_z = \overline{\mathring{A}_+} \mathfrak{H}_z.$$

В этих формулах операторы $\overline{\mathring{A}_j}$, $\overline{\mathring{A}_+}$, $\overline{\mathring{A}_-}$ действуют по переменной z и получаются комплексным сопряжением из операторов $\mathring{A}_j$, $\mathring{A}_+$, $\mathring{A}_-$, заданных формулами (6.9).

Обозначим через $\mathfrak{h}$ мономорфизм $\mathfrak{h}\colon \mathcal{P}[n,m] \to \mathbb{L}$

$$\mathfrak{h}\colon \qquad f(\bar{z}) = \sum_{j=0}^{D} f^j g_j(\bar{z}) \qquad \mapsto \qquad \chi = \sum_{j=0}^{D} f^j \chi_j. \tag{6.18}$$

Здесь g_j – базис мономов (6.13) в $\mathcal{P}[n,m]$, а χ_j – базис (6.12) в $\mathbb{L}$.

Теорема 6.3. 1. *Когерентное преобразование $\mathfrak{h}\colon \mathcal{P}[n,m] \to \mathbb{L}[n,m]$, заданное формулой* (6.18)*, унитарно. Обратное преобразование задается формулой*

$$(\mathfrak{h}^{-1}\chi)(\bar{z}) = \langle \chi, \mathfrak{H}_z \rangle_{\mathbb{L}}$$

для всех $\chi \in \mathbb{L}[n,m]$.

Для любого фиксированного $w \in \mathbb{C}$ преобразование $\mathfrak{h}$ переводит гипергеометрический полином $\mathfrak{K}(w\bar{z})$ в гипергеометрическое когерентное состояние $\mathfrak{H}_w$.

Кроме того, выполнены формулы коммутации

$$\mathbb{A}_j \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \circ \mathring{A}_j, \qquad j = 1, 2, 3, 4; \qquad \mathbb{A}_+ \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \circ \mathring{A}_+; \qquad \mathbb{A}_- \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \circ \mathring{A}_-,$$

т.е. $\mathfrak{h}$ сплетает абстрактное представление $\mathbb{A}_j$, $\mathbb{A}_+$, $\mathbb{A}_-$ алгебры (5.6) в гильбертовом пространстве $\mathbb{L}$ с гипергеометрическим (неприводимым) представлением $\mathring{A}_j$, $\mathring{A}_+$, $\mathring{A}_-$ этой алгебры в гильбертовом пространстве $\mathcal{P}[n,m]$.

2. *Семейство векторов $\{\mathfrak{H}_z \mid z \in \mathbb{C}\}$ (6.10) является семейством когерентных состояний в $\mathbb{L}[n,m]$, т.е. $\mathfrak{H}_z$ является "ядром" когерентного преобразования $\mathfrak{h}$ (6.18):*

$$\big\langle \chi, \mathfrak{h}\big(f(\bar{z})\big)\big\rangle_{\mathbb{L}} = \big\langle \langle \chi, \mathfrak{H}_z\rangle_{\mathbb{L}}, f(\bar{z})\big\rangle_{\mathcal{P}[n,m]}$$

для всех $f \in \mathcal{P}[n,m]$, $\chi \in \mathbb{L}$.

Алгоритм построения когерентных состояний (6.10) приведен в работе [2] (см. также приложение Б к работе [4]).

7. Собственные значения и собственные функции в резонансном эффекте Зеемана–Штарка

7.1. Применение когерентного преобразования к усредненной спектральной задаче

Рассмотрим усредненную спектральную задачу (5.4) в пространстве $L^2_-(\mathbb{R}^3)$. В силу теоремы 6.3 (1) с помощью когерентного преобразования (6.18) $\mathfrak{h}\colon \mathcal{P}[n,m] \to \mathcal{L}[n,m]$ (6.15) она может быть переформулирована в терминах дифференциального уравнения в пространстве полиномов $\mathcal{P}[n,m]$. Действительно, представления вида $\varphi = \mathfrak{h}(\Phi)$ автоматически дают точные решения первых двух уравнений (5.4) при любых амплитудах Φ.

Далее, третье из уравнений (5.4) в силу формулы (5.7) и теоремы 6.3 (1) записывается в следующем виде:

$$n\hbar\Big[T_{\mu,\sigma}\big(\mathring{A}_1, \mathring{A}_2, n\hbar, \underline{\lambda^n_m}(0,0)\big) + 5\sigma\gamma\mathcal{Q}_{10}\big(\mathring{A}_+ + \mathring{A}_-\big)\Big]\Phi = \zeta\Phi. \tag{7.1}$$

Здесь полином $T_{\mu,\sigma}$ задается формулой (5.8), в которой $s = n\hbar$ и $\lambda = \underline{\lambda^n_m}(0,0)$ – числа (4.17), а операторы $\mathring{A}$, $\mathring{A}_+$, $\mathring{A}_-$ заданы формулами (6.9).

Уравнение (7.1) – это дифференциальное уравнение 3-го порядка:

$$\begin{aligned}(\varkappa_{3,4}\bar{z}^4 + \varkappa_{3,3}\bar{z}^3 + \varkappa_{3,2}\bar{z}^2)\frac{d^3\Phi}{d\bar{z}^3} + (\varkappa_{2,3}\bar{z}^3 + \varkappa_{2,2}\bar{z}^2 + \varkappa_{2,1}\bar{z})\frac{d^2\Phi}{d\bar{z}^2}\\ + (\varkappa_{1,2}\bar{z}^2 + \varkappa_{1,1}\bar{z} + \varkappa_{1,0})\frac{d\Phi}{d\bar{z}} + (\varkappa_{0,1}\bar{z} + \varkappa_{0,0})\Phi = \zeta\Phi.\end{aligned} \tag{7.2}$$

(Формулы для коэффициентов $\varkappa_{j,k}$ приведены в приложении C.) Априори известно, что оно имеет $D+1$ независимых решений (полиномов степени не выше D). Обозначим эти полиномы через $\Phi_k,\ \ k=0,1,\dots,D$, и разложим их по базису (6.13):

$$\Phi_k(\bar z)=\sum_{i=0}^{D}\Phi_k^i g_j(\bar z). \tag{7.3}$$

Тогда собственные функции $\varphi=\varphi_k$ задачи (5.4) можно представить в виде линейной комбинации $\varphi_k=\sum_{j=0}^{D}\Phi_k^j\chi_j$ функций (6.14).

7.2. Решение исходной спектральной задачи

В силу (2.7), (5.1) при условии $\varepsilon\lesssim\delta\ll 1$ получаем для параметра ν асимптотику

$$\nu_{m,j}^n(\varepsilon)=n\hbar\Big(1+\varepsilon n\hbar\underline{\lambda_m^n}(0,0)+\varepsilon n\hbar\zeta+2\varepsilon^2n^2\hbar^2\big(\underline{\lambda_m^n}(0,0)^2\big)+O(\varepsilon^2\delta)\Big), \tag{7.4}$$

где $\underline{\lambda}_m(0,0)$ – числа (4.17).

Подставляя эти выражения в формулы (2.8), (3.2), (3.5), получаем асимптотику решения исходной задачи (2.3).

Теорема 7.1. *Пусть $\varepsilon\lesssim\delta n^4\ll 1$. Пусть $n\in\mathbb{N}$, $n\hbar\sim 1$. Предположим, что электрическое и магнитное поля удовлетворяют условию резонанса* (4.9)*. Тогда асимптотика по величине поля ε собственных значений гамильтониана* (2.1) *в n-м кластере задается формулой*

$$\varepsilon=-\frac{1}{4n^2\hbar^2}+\frac{\varepsilon\hbar d}{2}(n-1+2m)+\frac{\varepsilon\zeta_j}{2n\hbar}+\frac{\varepsilon^2n^2\hbar^4d^2}{4}(n-1+2m)^2+O(\varepsilon^2\delta). \tag{7.5}$$

Здесь m пробегает множество $\mathcal{M}_{2,1}$ (4.16)*, $0\le j\le D$, где D определено в* (4.15)*; числа ζ_j – собственные значения спектральной задачи* (7.1) *(см. также* (7.2)*).*

При дополнительном условии $\varepsilon\delta n\ll 1$ асимптотика собственных функций задачи (2.3) *задается формулой*

$$\Psi_k(x)=e^{-i\varepsilon n^2\hbar\mathbf{P}_1^{\#}}e^{-\frac{i}{2n\hbar^2d}{}^{\#}\mathbf{G}_1}\sum_{i=0}^{D}\Phi_j^i\psi_{m_1+i,m_2+2i}^n(q)\Big|_{q=x/\nu_{m,j}^n(\varepsilon)}+O(\varepsilon\delta n). \tag{7.6}$$

Здесь ψ_{j_1,j_2}^n – функции (B.1)*, в которых θ_1 и θ_2 определены в п.* 4.1*; числа Φ_j^i – коэффициенты разложения* (7.3) *полиномиальных решений Φ_j уравнения* (7.1), (7.2)*; асимптотика для $\nu_{m,j}^n(\varepsilon)$ приведена в* (7.4)*; операторы $\mathbf{P}_1^{\#}$ и ${}^{\#}\mathbf{G}_1$ определены в разделах* 3 *и* 5 *соответственно.*

8. Квазиклассическое приближение

8.1. Неприводимое представление алгебры $\mathcal{F}_{quant}$ над кривой в симплектическом листе

Пусть $\Omega[m,n]$ – симплектический лист (6.4) алгебры $\mathcal{F}$ (6.2) с параметрами $s=\hbar n/2$, $t=\hbar(n-1+2m)/2$; ω – симплектическая форма (6.6) на $\Omega[m,n]$. Пусть Λ –

одномерная кривая на $\Omega[m,n]$. Предположим, что на Λ выполнено следующее условие квантования:

$$\Big(\frac{1}{2\pi\hbar}\int_\Sigma \omega - \frac{1}{4}\mathfrak{m}(\Sigma)\Big) \in \mathbb{Z}, \tag{8.1}$$

для любой двумерной пленки $\Sigma \subset \Omega[m,n]$ с границей $\partial\Sigma = \Lambda$. Через $\mathfrak{m}(\Sigma)$ обозначен индекс пленки (см. [7, 8, 9]).

Определим Λ-*когерентные состояния*:

$$\mathfrak{h}_\alpha \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{z'(\alpha)}\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\int_{\alpha^0}^{\alpha}\theta\Big\}\mathfrak{H}_{z(\alpha)}(q). \tag{8.2}$$

Здесь $\mathfrak{H}_z(q)$ голоморфные гипергеометрические когерентные состояния (6.10) в гильбертовом пространстве $L^2_-(\mathbb{R}^3)$; $z(\alpha)$ - это сужение на Λ комплексной координаты (6.5), т.е. $\Lambda = \{z = z(\alpha)\}$, $z'(\alpha) \equiv dz(\alpha)/d\alpha$; θ - это первообразная симплектической формы (6.6):

$$\theta = i\Big(a(|z|^2) + \frac{\hbar}{8}(n + |n-1+2m| - 4m_1 - 2m_2 - 3)\Big)\frac{dz}{z}; \tag{8.3}$$

форма (8.3) интегрируется вдоль кривой Λ. Отметим, что семейство Λ-когерентных состояний (8.2) задано глобально над Λ и является гладкой функцией от $\alpha \in \Lambda$.

Определим *амплитуду перехода* на Λ:

$$a_\Lambda(\beta|\alpha) = \langle \mathfrak{h}_\alpha, \mathfrak{h}_\beta\rangle_-.$$

Из (6.16) следует, что для амплитуды перехода справедлива формула

$$a_\Lambda(\beta|\alpha) = \sqrt{z'(\alpha)\bar{z}'(\beta)}\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\int_{\alpha^0}^{\alpha}\theta - \frac{i}{\hbar}\int_{\alpha^0}^{\beta}\bar{\theta}\Big\}\mathfrak{K}(z(\alpha)\bar{z}(\beta)),$$

где $\mathfrak{K}$ - гипергеометрический полином (6.17).

Следуя [10], мы используем амплитуду a_Λ для определения скалярного произведения в пространстве функций над кривой $\Lambda \subset \Omega[m,n]$. Для $\phi, \phi' \in C^\infty(\Lambda)$ положим

$$\langle \phi, \phi'\rangle_\Lambda = \int_\Lambda\int_\Lambda a_\Lambda(\beta|\alpha)\phi(\alpha)\overline{\phi'(\beta)}\,d\alpha\,d\beta. \tag{8.4}$$

Обозначим через $\mathcal{L}_\Lambda$ ортогональное дополнение к ядру $\{\phi | \langle\phi,\phi'\rangle_\Lambda = 0\}$ этой билинейной формы. Тогда $\mathcal{L}_\Lambda$ – гильбертово пространство со скалярным произведением (8.4).

Рассмотрим отображение $\tau_\Lambda\colon C^\infty(\Lambda) \to \mathcal{P}[m,n]$, заданное формулой

$$\tau_\Lambda(\phi)(\bar{z}) \stackrel{\text{def}}{=} \int_\Lambda \phi(\alpha)\sqrt{z'(\alpha)}\exp\Big\{\frac{i}{\hbar}\int_{\alpha^0}^{\alpha}\theta\Big\}\mathfrak{K}(z(\alpha)\bar{z})\,d\alpha. \tag{8.5}$$

Из предложения 6.1 следует

Предложение 8.1. *Пусть $\Lambda \subset \Omega[m,n]$ удовлетворяет условию квантования* (8.1). *Тогда отображение $\tau_\Lambda\colon \mathcal{L}_\Lambda \to \mathcal{P}[m,n]$ является унитарным изоморфизмом.*

С помощью изоморфизма τ_Λ неприводимое представление алгебры (5.6), заданное формулами (6.9), можно переместить в пространство $\mathcal{L}_\Lambda$ функций над кривой Λ. Приведем явные формулы для этого нового представления.

Теорема 8.1. *Пусть кривая $\Lambda \subset \Omega[m,n]$ удовлетворяет условию квантования* (8.1). *Тогда*

A. *Операторы третьего порядка*

$$
\begin{aligned}
\breve{A}_1 &= \frac{\hbar}{8}(3n-1+2m-|n-1+2m|) + \hbar\left(\frac{z(\alpha)}{z'(\alpha)}\frac{d}{d\alpha} + \frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{z(\alpha)}{z'(\alpha)}\right)\right),\\
\breve{A}_2 &= \frac{\hbar}{8}(|n-1+2m|-n-1+2m) - 2\hbar\left(\frac{z(\alpha)}{z'(\alpha)}\frac{d}{d\alpha} + \frac{1}{2}\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{z(\alpha)}{z'(\alpha)}\right)\right),\\
\breve{A}_3 &= \frac{\hbar^2(n^2-1)}{4} - \breve{A}_1^2,\\
\breve{A}_4 &= \frac{\hbar^2(n^2-1)}{4} - \breve{A}_2^2,\\
\breve{A}_+ &= \left(\frac{\hbar(n-1)}{2} - \breve{A}_1\right)\left(\frac{\hbar(n-1)}{2} + \breve{A}_2\right)\left(\frac{\hbar(n-3)}{2} + \breve{A}_2\right)\frac{1}{z},\\
\breve{A}_- &= z\left(\frac{\hbar(n+1)}{2} + \breve{A}_1\right)\left(\frac{\hbar(n+1)}{2} - \breve{A}_2\right)\left(\frac{\hbar(n+3)}{2} - \breve{A}_2\right)
\end{aligned}
\tag{8.6}
$$

задают эрмитово неприводимое представление алгебры $\mathcal{F}_{quant}$ (5.6) *в пространстве* $\mathcal{L}_\Lambda$.

B. *Гипергеометрические* Λ*-когерентные состояния* $\mathfrak{h}_\alpha$ (8.2) *сплетают представление* (5.5) *алгебры* $\mathcal{F}_{quant}$ *с неприводимым представлением* (8.6) *в пространстве* $\mathcal{L}_\Lambda$. *Точнее, интегральное преобразование*

$$
\mathfrak{h}\colon \mathcal{L}_\Lambda \to L^2_-(\mathbb{R}^3), \qquad \mathfrak{h}(\phi) \overset{\text{def}}{=} \int_\Lambda \phi(\alpha)\mathfrak{h}_\alpha\, d\alpha \tag{8.7}
$$

обеспечивает формулы коммутации

$$
\mathbf{A}_j \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \circ \breve{A}_j \qquad (j=1,2,3,4), \qquad \mathbf{A}_+ \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \circ \breve{A}_+, \qquad \mathbf{A}_- \circ \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \circ \breve{A}_-.
$$

Преобразование $\mathfrak{h}$ *- унитарный изоморфизм* $\mathcal{L}_\Lambda \to L[m,n]$, *где* $L[m,n]$ *– это подпространство в* $L^2_-(\mathbb{R}^3)$, *на котором реализуется неприводимая компонента представления алгебры* $\mathcal{F}_{quant}$.

8.2. Когерентное преобразование спектральной задачи

В силу теоремы 8.1, спектральная задача в представлении (5.5) алгебры $\mathcal{F}_{quant}$, заданном в пространстве $L^2_-(\mathbb{R}^3)$, может быть переформулирована в терминах дифференциального уравнения на кривой $\Lambda \subset \Omega[m,n]$.

Рассмотрим спектральную задачу (5.4) для усредненного гамильтониана $\overline{G}_1$ (5.7):

$$
\overline{G}_1\varphi = \zeta\varphi.
$$

Интегральное преобразование (8.7) сводит (5.4) к задаче над кривой Λ:

$$
n\hbar\Big[T_{\mu,\sigma}(\breve{A}_1, \breve{A}_2, n\hbar, \underline{\lambda^n_m}(0,0)) + 5\sigma\gamma\mathcal{Q}_{10}(\breve{A}_+ + \breve{A}_-)\Big]\phi = \zeta\varphi, \qquad \phi \in \mathcal{L}_\Lambda. \tag{8.8}
$$

При этом $\|\varphi\|_- = \|\phi\|_\Lambda$.

8.3. Квазиклассическое приближение

Предложение 8.2. A. *Для операторов* (8.6) *имеют место следующие асимптотики при* $\hbar \to 0$:

$$\begin{aligned} \breve{A}_j &= a_j\big|_\Lambda - i\hbar\Big(\breve{w}_{a_j} + \frac{1}{2}\operatorname{div}\breve{w}_{a_j}\Big) + O(\hbar^2), \qquad j = 1,2,3,4, \\ \breve{A}_+ &= a_+\big|_\Lambda - i\hbar\Big(\breve{w}_{a_+} + \frac{1}{2}\operatorname{div}\breve{w}_{a_+}\Big) + O(\hbar^2), \\ \breve{A}_- &= a_-\big|_\Lambda - i\hbar\Big(\breve{w}_{a_-} + \frac{1}{2}\operatorname{div}\breve{w}_{a_-}\Big) + O(\hbar^2). \end{aligned}$$

Здесь a_j, a_+, a_- *– координатные функции на* $\mathbb{R}^6 \supset \Omega[m,n]$, $\breve{w}_{a_j}$, $\breve{w}_{a_+}$, $\breve{w}_{a_-}$ *– проекции гамильтоновых полей* $\mathrm{ad}(a_j)$, $\mathrm{ad}(a_+)$, $\mathrm{ad}(a_-)$ *на кривую* $\Lambda \subset \Omega[m,n]$ *вдоль поляризации* $\partial/\partial\bar{z}$, *а* $\operatorname{div}\breve{w}$ *– дивергенция комплексного векторного поля* $\breve{w}$ *на* Λ *относительно меры* $d\alpha$.

B. *Для вейлевской функции от набора операторов* $\breve{A}_j$ ($j = 1,2,3,4$), $\breve{A}_+$, $\breve{A}_-$ *имеется асимптотика*

$$g(\breve{A}_1, \breve{A}_2, \breve{A}_3, \breve{A}_4, \breve{A}_+, \breve{A}_-) = g(a_1, a_2, a_3, a_4, a_+, a_-)\Big|_\Lambda - i\hbar\Big(\breve{w} + \frac{1}{2}\breve{w}\Big) + O(\hbar^2),$$

где $\breve{w}$ *– проекция поля* $\mathrm{ad}\big(g(a_1, a_2, a_3, a_4, a_+, a_-)\big)$ *на* Λ *вдоль* $\partial/\partial\bar{z}$.

C. *Если кривая* Λ *выбрана так, что* $g(a_1, a_2, a_3, a_4, a_+, a_-)|_\Lambda = \mathrm{const}$, *т.е.* Λ *– это траектория поля* $\mathrm{ad}(g(a_1, a_2, a_3, a_4, a_+, a_-))$, *и если в качестве координаты* α *на* Λ *выбрать гамильтоново время* t *на траектории, то справедлива следующая асимптотика:*

$$g(\breve{A}_1, \breve{A}_2, \breve{A}_3, \breve{A}_4, \breve{A}_+, \breve{A}_-) = \mathrm{const} - i\hbar\frac{d}{dt} + O(\hbar^2).$$

Используем эту последнюю формулу для получения квазиклассической асимптотики собственных функций спектральной задачи (8.8).

Прежде всего выберем кривые $\Lambda \subset \Omega[m,n]$. Напомним, что в силу теоремы 6.1 двумерные поверхности $\Omega[m,n]$ задаются как поверхности уровня четырех функций Казимира в $\mathbb{R}^6$. Гамильтониан

$$r(a_1, a_2, a_3, a_4, a_+, a_-) \overset{\mathrm{def}}{=} T_{\mu,\sigma}\big(a_1, a_2, n\hbar, \underline{\lambda_m^n}(0,0)\big) + 5\sigma\gamma\mathcal{Q}_{10}(a_+ + a_-)$$

— это функция на $\mathbb{R}^6$. Будем брать в качестве Λ линии уровня

$$\Lambda(e) = \{r(a_1, a_2, a_3, a_4, a_+, a_-) = e\}$$

на $\Omega[m,n]$.

Далее, кривая $\Lambda(e)$ должна быть подчинена условию квантования (8.1), которое выглядит так:

$$\frac{1}{2\pi\hbar}\int_{\Sigma_{\Lambda(e)}} \omega = k + \frac{1}{2}, \qquad k \in \mathbb{Z}_+, \tag{8.9}$$

причем предполагается, что $k \sim 1/\hbar$ и кривая $\Lambda(e)$ имеет размер порядка 1 (не стягивается в точку).

Площадь пленки $\mathcal{S}^0(e) = \int_{\Sigma_{\Lambda(e)}} \omega$ зависит от энергии e. Решая (8.9) как уравнение относительно e, можно получить квантованные уровни энергии

$$e = e_k \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}^{-1}((2k+1)\pi\hbar). \tag{8.10}$$

Из предложения 8.2 следует, что гамильтониан $r(\breve{A}_1, \breve{A}_2, \breve{A}_3, \breve{A}_4, \breve{A}_+, \breve{A}_-)$ над кривой $\Lambda(e_k)$ будет иметь следующий вид:

$$e_k - i\hbar\frac{d}{dt} + O(\delta\hbar^2). \tag{8.11}$$

Очевидно, он допускает приближенную собственную функцию

$$\phi_k(t) = 1 \qquad (\operatorname{mod} O(\hbar)),$$

отвечающую собственному значению

$$\zeta_k = e_k + O(\delta\hbar^2).$$

Таким образом, попутно мы вычислили квазиклассическую асимптотику решений уравнения (7.2).

Предложение 8.3. *Полиномы Φ_k (7.3) и отвечающие им собственные значения ζ_k имеют следующую асимптотику:*

$$\zeta_k = e_k + O(\delta\hbar^2),$$

$$\Phi_k(\bar{z}) = \sum_{j=0}^{D} \Phi_k^j g_j(\bar{z}), \qquad \Phi_k^j = \varphi_k^j + O(\hbar),$$

где

$$\varphi_k^j = \sqrt{\frac{n}{2\pi T_k}} \int_0^{T_k} \sqrt{\frac{dz(t)}{dt}} \exp\Big\{ in \int_{t^0}^{t} \theta \Big\} g_j(z(t))\, dt. \tag{8.12}$$

Здесь θ – форма (8.3), g_j – мономы (6.13), $z(t)$ - траектория гамильтонова поля функции r на $\Omega[m,n]$.

Подставляя формулы из Предложения 8.3. в общие формулы теоремы 7.1, получаем следующий результат о квазиклассической асимптотике собственных значений и собственных функций гамильтониана (2.1).

Теорема 8.2. *Пусть $\varepsilon \lesssim \delta \ll 1$, $n \gg 1$, $n\hbar \sim 1$, $\varepsilon\delta n \ll 1$. Определим числа e_k по формуле (8.10). Пусть k принимает значения, описанные в условии квантования (8.9). Тогда асимптотика собственных функций (7.6) гамильтониана (2.1) имеет вид*

$$\Psi_k(x) = \sum_{j=0}^{D} \varphi_k^j e^{-i\varepsilon n^2\hbar \mathbf{P}_1^\#} e^{-\frac{i}{2n\hbar^2 d}{}^\#\mathbf{G}_1} \psi_{m_1+j, m_2+2j}(q)\big|_{q=x/\nu^n_{m,k}(\varepsilon,\delta)} + O(\hbar).$$

Здесь $\psi^n_{j_1,j_2}$ – функции (B.1), в которых θ_1 и θ_2 определены в разделе 3.3; числа φ_k^j определены в (8.12); асимптотика для $\nu^n_{m,k}(\varepsilon,\delta)$ задается формулой

$$\nu^n_{m,k}(\varepsilon,\delta) \approx \hbar n\big(1 + \varepsilon n^2\hbar^3 d(n-1+2m) + \varepsilon\hbar n e_k + 2\varepsilon^2 n^4\hbar^6 d^2(n-1+2m)^2\big).$$

Соответствующие собственные значения (7.5) гамильтониана (2.1) имеют следующую асимптотику:

$$\mathcal{E}_k = -\frac{1}{4n^2\hbar^2} + \frac{\varepsilon\hbar d}{2}(n-1+2m) + \frac{\varepsilon e_k}{2n\hbar} + \frac{\varepsilon^2 n^2\hbar^4 d^2}{4}(n-1+2m)^2 + O(\varepsilon\delta\hbar^2).$$

Приложение А:

Коэффициенты усредненного гамильтониана

$$\mathcal{R}_1 = \frac{1}{2}\Big(4\beta^{11} + 6\beta^{22} + 4\beta^{33} + (\beta^{33} - \beta^{11})(\cos(2\theta_1) + \cos(2\theta_2)) - \\ - 2\beta^{31}(\sin(2\theta_1) + \sin(2\theta_2))\Big),$$

$$\mathcal{R}_2 = \frac{1}{2}\Big(4\beta^{11} + 2\beta^{22} + 4\beta^{33} + (\beta^{11} - \beta^{33})(\cos(2\theta_1) + \cos(2\theta_2)) + \\ + 2\beta^{31}(\sin(2\theta_1) + \sin(2\theta_2))\Big),$$

$$\mathcal{R}_3 = 2\Big(\beta^{11} - 2\beta^{22} + \beta^{33} + 3(\beta^{11} - \beta^{33})\cos(2\theta_1) + 6\beta^{31}\sin(2\theta_1)\Big),$$

$$\mathcal{R}_4 = 4\Big(3(\beta^{33} - \beta^{11})\cos(\theta_1 + \theta_2) + (\beta^{22} - 2\beta^{11} - 2\beta^{33})\cos(\theta_1 - \theta_2) - 6\beta^{31}\sin(\theta_1 + \theta_2)\Big),$$

$$\mathcal{R}_5 = 2\Big(\beta^{11} - 2\beta^{22} + \beta^{33} + 3(\beta^{11} - \beta^{33})\cos(2\theta_2) + 6\beta^{31}\sin(2\theta_2)\Big),$$

$$\mathcal{Q}_1 = -4\cos\theta_1,$$

$$\mathcal{Q}_2 = 3\big(\cos(2\theta_1 - \theta_2) + 3\cos\theta_2\big),$$

$$\mathcal{Q}_3 = -3\big(3\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 - 2\theta_2)\big),$$

$$\mathcal{Q}_4 = 4\cos\theta_2,$$

$$\mathcal{Q}_7 = -\frac{1}{4}\big(\cos(2\theta_1 - \theta_2) + 15\cos\theta_2\big),$$

$$\mathcal{Q}_8 = \frac{1}{4}\big(\cos(2\theta_1 - \theta_2) - \cos\theta_2\big),$$

$$\mathcal{Q}_9 = \frac{1}{4}\big(14\sin\theta_1 - \sin(2\theta_1 - \theta_2) - 9\sin\theta_2\big),$$

$$\mathcal{Q}_{10} = \frac{1}{4}\big(9\sin\theta_1 - \sin(\theta_1 - 2\theta_2) - 14\sin\theta_2\big),$$

$$\mathcal{P}_1 = -\frac{1}{144\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}\big(396 + 269\cos(2\theta_1) + 3\cos(2\theta_1 - 4\theta_2) + 3\cos(4\theta_1 - 2\theta_2) + \\ + 148\cos(2\theta_1 - 2\theta_2) + 269\cos(2\theta_2)\big),$$

$$\mathcal{P}_2 = -\frac{1}{144\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}\big(468 + 307\cos(2\theta_1) - 3\cos(2\theta_1 - 4\theta_2) - 3\cos(4\theta_1 - 2\theta_2) + \\ + 140\cos(2\theta_1 - 2\theta_2) + 307\cos(2\theta_2)\big),$$

$$\mathcal{P}_3 = -\frac{1}{12\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}\big(102 + 14\cos(2\theta_1) - 3\cos(4\theta_1 - 2\theta_2) + \\ + 10\cos(2\theta_1 - 2\theta_2) + 101\cos(2\theta_2)\big),$$

$$\mathcal{P}_4 = \frac{1}{6\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}\big(11\cos(\theta_1 - 3\theta_2) + 163\cos(\theta_1 - \theta_2) - 3\cos(3\theta_1 - 3\theta_2) + \\ + 11\cos(3\theta_1 - \theta_2) + 138\cos(\theta_1 + \theta_2)\big),$$

$$\mathcal{P}_5 = -\frac{1}{12\sin^2(\theta_1 - \theta_2)}\big(102 + 101\cos(2\theta_1) - 3\cos(2\theta_1 - 4\theta_2) + \\ + 10\cos(2\theta_1 - 2\theta_2) + 14\cos(2\theta_2)\big),$$

$$\mathcal{P}_6 = \frac{1}{2}\big(\cos(\theta_1 - \theta_2) + \cos(\theta_1 + \theta_2)\big),$$

$$\mathcal{Q}_5 = \frac{1}{4}\big(15\cos\theta_1 + \cos(\theta_1 - 2\theta_2)\big), \qquad \mathcal{Q}_{11} = -7\cos\theta_1 + \cos(2\theta_1 - \theta_2),$$
$$\mathcal{Q}_6 = \frac{1}{4}\big(\cos\theta_1 - \cos(\theta_1 - 2\theta_2)\big), \qquad \mathcal{Q}_{12} = -\cos(\theta_1 - 2\theta_2) + 7\cos\theta_2,$$
$$\mathcal{Y}_1 = \frac{1}{4}\big(10 - \cos(2\theta_1) - \cos(2\theta_2)\big), \qquad \mathcal{Y}_4 = -2\big(\cos(\theta_1 - \theta_2) + 3\cos(\theta_1 + \theta_2)\big),$$
$$\mathcal{Y}_2 = \frac{1}{4}\big(6 + \cos(2\theta_1) + \cos(2\theta_2)\big), \qquad \mathcal{Y}_5 = -1 + 3\cos(2\theta_2),$$
$$\mathcal{Y}_3 = -1 + 3\cos(2\theta_1), \qquad \mathcal{Y}_6 = -\frac{1}{2}\big(4 + \cos(\theta_1 - \theta_2) - 3\cos(\theta_1 + \theta_2)\big),$$
$$\mathcal{Z}_1 = \frac{\cos(2\theta_1 - \theta_2) + 3\cos\theta_2}{n\hbar\sin(\theta_1 - \theta_2)}, \qquad \mathcal{Z}_2 = -\frac{3\cos(\theta_1) + \cos(\theta_1 - 2\theta_2)}{n\hbar\sin(\theta_1 - \theta_2)}.$$

Приложение B:

Собственные функции операторов $\mathbf{S}_0$ и $\mathbf{G}_0$

Приведем явную формулу для функций $\psi^N_{j_1,j_2}$ (4.7):

$$\psi^N_{j_1,j_2}(q) = \frac{1}{\pi\hbar}\exp\Big\{-\frac{|q|}{2\hbar}\Big\} \sum_{\substack{\max\{0, j_1+j_2-N+1\}\le l\le j_1 \\ \max\{0, j_1+j_2-N+1\}\le m\le j_2}} \gamma^N_{j_1,j_2}(l,m)\times$$
$$\times\left(\frac{\sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}q_1 - \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}q_3 + \operatorname{sgn}(l-m)\big(\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}|q| - i\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}q_2\big)}{2\hbar}\right)^{|l-m|}\times$$
$$\times L^{|l-m|}_{N-1-j_1-j_2+\min\{l,m\}}\left(\frac{\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}|q| + \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}q_3 + \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}q_1 + i\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}q_2}{2\hbar\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\right)\times$$
$$\times L^{|l-m|}_{\min\{l,m\}}\left(\frac{\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}|q| - \sin\frac{\theta_1+\theta_2}{2}q_3 - \cos\frac{\theta_1+\theta_2}{2}q_1 + i\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}q_2}{2\hbar\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}}\right). \tag{B.1}$$

Здесь $L^s_M(y) = \sum_{j=0}^M \frac{\sqrt{M!\,\Gamma(M+s+1)}}{(M-j)!\,j!\,\Gamma(j+s+1)}(-1)^{M-j}y^j$ – нормированные обобщенные полиномы Лагерра [11], а $\gamma^N_{j_1,j_2}(l,m)$ – коэффициенты

$$\gamma^N_{j_1,j_2}(l,m) = \frac{(-1)^{j_1-l}}{(j_1-l)!\,(j_2-m)!}\sqrt{\frac{j_1!\,j_2!\,(N-1-j_1)!\,(N-1-j_2)!}{l!\,m!\,(N-1-j_1-j_2+l)!\,(N-1-j_1-j_2+m)!}}\times$$
$$\times\left(\cos\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)^{N-1-j_1-j_2+2\min\{l,m\}}\left(\sin\frac{\theta_1-\theta_2}{2}\right)^{j_1+j_2-l-m}.$$

Приложение C:

Коэффициенты уравнения (7.2)

$$\varkappa_{3,4} = -10\sigma n\hbar^4\gamma\mathcal{Q}_{10},$$
$$\varkappa_{3,3} = -5\sigma n\hbar^4\gamma(\mathcal{Q}_1 - 2\mathcal{Q}_2 + 4\mathcal{Q}_3 - 8\mathcal{Q}_4),$$

$$
\begin{aligned}
&\varkappa_{3,2} = 20\sigma n\hbar^4\gamma\mathcal{Q}_{10},\\
&\varkappa_{2,3} = -5\sigma n\hbar^4\gamma\mathcal{Q}_{10}(12+2m_1+3m_2-5n),\\
&\varkappa_{2,2} = \frac{n\hbar^3}{2}\Big\{\sigma\Big[2\mathcal{R}_3-4\mathcal{R}_4+8\mathcal{R}_5-\hbar\gamma\Big(15(3+2m_1-n)\mathcal{Q}_1-\\
&\quad -5(17+8m_1+2m_2-5n)\mathcal{Q}_2+40(4+m_1+m_2-n)\mathcal{Q}_3-60(5+2m_2-n)\mathcal{Q}_4\Big)\Big]+\\
&\quad +2\mu[\mathcal{P}_3-2\mathcal{P}_4+4\mathcal{P}_5+\mathcal{Y}_3-2\mathcal{Y}_4+4\mathcal{Y}_5]\Big\},\\
&\varkappa_{2,1} = 10\sigma n\hbar^4\gamma\mathcal{Q}_{10}(5+2m_1+2m_2),\\
&\varkappa_{1,2} = -5\sigma n\hbar^4\gamma\mathcal{Q}_{10}(7+3m_1+m_2-4n),\\
&\varkappa_{1,1} = \frac{n\hbar^3}{2}\Big\{\sigma\Big[4(2+2m_1-n)\mathcal{R}_3-2(7+4m_1+2m_2-3n)\mathcal{R}_4-\\
&\quad -8(3+2m_2-n)\mathcal{R}_5-5\hbar\gamma\Big((13+24m_1+12m_1^2-12n-12m_1n+3n^2)\mathcal{Q}_1-\\
&\quad -2(11+14m_1+4m_1^2+4m_2+4m_1m_2-9n-6m_1n-2m_2n+2n^2)\mathcal{Q}_2+\\
&\quad +(37+24m_1+28m_2+16m_1m_2+4m_2^2-26n-8m_1n-12m_2n+5n^2)\mathcal{Q}_3-\\
&\quad -2(31+36m_2+12m_2^2-18n-12m_2n+3n^2)\mathcal{Q}_4+\\
&\quad +4(n^2\mathcal{Q}_5+\mathcal{Q}_6-2n^2\mathcal{Q}_7-2\mathcal{Q}_8)\Big)\Big]+\\
&\quad +2\mu\Big[2(2+2m_1-n)(\mathcal{P}_3+\mathcal{Y}_3)-(7+4m_1+2m_2-3n)(\mathcal{P}_4+\mathcal{Y}_4)+\\
&\quad +4(3+2m_2-n)(\mathcal{P}_5+\mathcal{Y}_5)+2dn\hbar(1+4m_1-2m_2-n)(\mathcal{Z}_1-2\mathcal{Z}_2)\Big]\Big\},\\
&\varkappa_{1,0} = 5\sigma n\hbar^4\gamma\mathcal{Q}_{10}(2+2m_1+3m_2+4m_1m_2+m_2^2),\\
&\varkappa_{0,1} = -5\sigma n\hbar^4\gamma\mathcal{Q}_{10}(1+m_1-n)(1+m_2-n)(2+m_2-n),\\
&\varkappa_{0,0} = \frac{n\hbar^3}{8}\Big\{\sigma\Big[8(n^2\mathcal{R}_1+\mathcal{R}_2)+2(1+4m_1+4m_2^2-2n-4m_1n+n^2)\mathcal{R}_3-\\
&\quad -2(1+2m_1+2m_2+4m_1m_2-2n-2m_1n-2m_2n+n^2)\mathcal{R}_4+\\
&\quad +2(1+4m_2+4m_2^2-2n-4m_2n+n^2)\mathcal{R}_5-\\
&\quad -5\hbar\gamma\Big((1+6m_1+12m_1^2+8m_1^3-3n-12m_1n-12m_1^2n+3n^2+6m_1n^2-n^3)\mathcal{Q}_1-\\
&\quad -(1+4m_1+4m_1^2+2m_2+8m_1m_2+8m_1^2m_2-3n-8m_1n-4m_1^2n-4m_2n-\\
&\quad -8m_1m_2n+3n^2+4m_1n^2+2m_2n^2-n^3)\mathcal{Q}_2+\\
&\quad +(1+2m_1+4m_2+8m_1m_2+4m_2^2+8m_1m_2^2-3n-4m_1n-8m_2n-8m_1m_2n-\\
&\quad -4m_2^2n+3n^2+2m_1n^2+4m_2n^2-n^3)\mathcal{Q}_3-\\
&\quad -(1+6m_2+12m_2^2+8m_2^3-3n-12m_2n-12m_2^2n+3n^2+6m_2n^2-n^3)\mathcal{Q}_4+\\
&\quad +4(1+2m_1-n)(n^2\mathcal{Q}_5+\mathcal{Q}_6)-4(1+2m_2-n)(n^2\mathcal{Q}_7+\mathcal{Q}_8)\Big)\Big]+\\
&\quad +2\mu\Big[4n^2(\mathcal{P}_1+\mathcal{Y}_1)+4(\mathcal{P}_2+\mathcal{Y}_2)+(1+4m_1+4m_1^2-2n-4m_1n+n^2)(\mathcal{P}_3+\mathcal{Y}_3)-\\
&\quad -(1+2m_1+2m_2+4m_1m_2-2n-2m_1n-2m_2n+n^2)(\mathcal{P}_4+\mathcal{Y}_4)+\\
&\quad +(1+4m_2+4m_2^2-2n-4m_2n+n^2)(\mathcal{P}_5+\mathcal{Y}_5)+\\
&\quad +2dn\hbar(1+4m_1-2m_2-n)\big((1+2m_1-n)\mathcal{Z}_1-(1+2m_2-n)\mathcal{Z}_2\big)\Big]\Big\}.
\end{aligned}
$$

Список литературы

1. *Karasev M.V., Novikova E.M.,* Algebras with polynomial commutation relations for a quantum particle in electric and magnetic fields// In book: Karasev M.V. (editor), Quantum Algebras and Poisson Geometry in Mathematical Physics, AMS, Providence, RI, 2005, 19-135.
2. *Karasev M.V., Novikova E.M.,* Non-Lie permutation relations, coherent states, and quantum embedding// In book: Karasev M.V. (editor), Coherent Transform, Quantization, and Poisson Geometry, AMS, Providence, RI, 1998, 1-202.
3. *Карасев М.В., Новикова Е.М.,* Представление точных и квазиклассических собственных функций через когерентные состояния. Атом водорода в магнитном поле// Теорет. Мат. Физ., 1996, 108(3), 339-387.
4. *Карасев М.В., Новикова Е.М.,* Алгебра с квадратичными коммутационными соотношениями для аксиально возмущенного поля Кулона-Дирака// Теорет. Мат. Физ., 2004, 141(3), 424-454.
5. *Карасев М.В., Новикова Е.М.,* Когерентные преобразования и неприводимые представления, соответствующие комплексным структурам на цилиндре и торе// Матем. заметки, 2001, 70(6), 854-874.
6. *Бейтмен Г., Эрдейи А.,* Высшие трансцендентные функции// Наука, Москва, 1973, т. 1, 296 стр.
7. *Karasev M.V.,* Quantization by means of two-dimensional surfaces (membranes). Geometrical formulas for wave-functions// Contemp. Math., 1994, 179,83-113.
8. *Карасев М.В.,* Пуассоновские алгебры симметрий и асимптотика спектральных серий// Функц. анализ и его прилож., 1986, 20 (1), 21-32.
9. *Карасев М.В., Маслов В.П.,* Нелинейные скобки Пуассона. Геометрия и квантование (Наука, Москва, 1991), 368 стр.
10. *Karasev M.V.,* Integrals over membranes, transition amplitudes and quantization// Russian J. Math. Phys., 1993, 1 (1), 523-526.
11. *Бейтмен Г., Эрдейи А.,* Высшие трансцендентные функции// Наука, Москва, 1973, т. 2, 296 стр.

COHERENT STATES OF CUBIC NON-LIE ALGEBRA AND SPECTRAL PROBLEM FOR HYDROGEN ATOM IN RESONANCE ZEEMAN-STARK EFFECT

E.M. Novikova

Moscow Institute of Electronics and Mathematics at National Research University HSE

e.m.novikova@gmail.com

Received 29.10.2012

The spectral problem is considered for the hydrogen atom in perturbing magnetic and electric fields. Resonance relations are obtained for the field values and the angle between them at which the quantum average system (in the first order of the perturbation theory) has a non-Lie algebra of symmetries whose commutation relations between the generators are given by polynomials of at most the third degree. The irreducible representations of this algebra correspond to spectral clusters localized near the Zeeman-Stark energy levels. The averaged Hamiltonian in the second order of the perturbation theory is derived from this non-Lie algebra in the form of a linear combination of “creation-annihilation” operators. The asymptotics of the hydrogen atom spectrum (a correction to the Zeeman-Stark effect) is determined by the condition that the integrals of the Kaehlerian form are integer-valued. The asymptotics of the eigenstates are obtained in the form of integrals of coherent states along the level lines of the averaged Hamiltonian on quantum symplectic leaves of this algebra with cubic relations. This study is based on the general theory of algebraic averaging and the quantum geometric theory developed by M.Karasev and on the author’s studies in the field of the theory of coherent states of non-Lie algebras of symmetries.