ПАМЯТИ В.М. ХАМЕТОВА: ПУТЬ В ПРОФЕССИИ, ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ И ВОСПОМИНАНИЯ КОЛЛЕГ

Богомолов Р.О., Зверев О.В., Шелемех Е.А.

Богомолов Р.О., ЦЭМИ РАН, rostik@cemi.rssi.ru
Зверев О.В., ЦЭМИ РАН, zv-oleg@yandex.ru
Шелемех Е.А., ЦЭМИ РАН, letis@mail.ru

Поступила 23.03.2024

Статья посвящена памяти д.ф.-м.н., профессора В.М. Хаметова (18.11.1946 – 02.09.2023): приведены основные вехи его пути как ученого и преподавателя, кратко описан круг его научных интересов и полученных результатов. Одним из основных направлений его исследований в последние двадцать лет стало моделирование эволюции стоимости финансовых инструментов. Дан обзор основных результатов по этой теме, основная роль в получении которых принадлежит В.М. Хаметову. В заключении приведены воспоминания его коллег и учеников.

Ключевые слова: В.М. Хаметов, минимаксная модель расчета опциона, неполный рынок, стохастическая игра, квантильное хеджирование, байесовская модель облигации.

DOI: 10/31145/2224-8412-2024-23-2-5-28
УДК: 519.863

Владимир Минирович Хаметов родился 18 ноября 1946 года в г. Нойштрелиц (ГДР). В 1968 году он окончил Уральский политехнический институт им. С. М. Кирова по специальности “Радиоэлектронные устройства”.

К моменту окончания учебы в институте круг интересов Владимира Минировича стал шире того, что предлагала инженерная специальность. Одним из направлений исследований, привлекших его внимание, была теория случайных процессов. После окончания института он поступает в аспирантуру Московского государственного института электронного машиностроения (МИЭМ) на кафедру Прикладной математики по специальности “Теория вероятностей и математическая статистика”. В это время он занимается проблемами нелинейной фильтрации случайных процессов [1], [2] и интерполяции по наблюдениям за ними [3], а в 1979 году защищает диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук [4]. Тогда же он знакомится с Виктором Павловичем Масловым, которого всегда с гордостью называл своим учителем. После защиты кандидатской диссертации он продолжает заниматься проблемами восстановления случайных процессов [5], [6], [7], [8] и одновременно с этим начинает работать над задачами оптимального управления случайными процессами [9], [10], [11], [12], [13], [14]. В 2001 году защищает диссертацию на соискание степени доктора физико-математических наук на тему “Оптимальные стратегии управляемых в слабом смысле стохастических систем с полной информацией” по специальности “Системный анализ, управление и обработка информации” [15].

В связи с кардинальными изменениями, происходившими в стране в девяностые годы прошлого века, Владимир Минирович был вынужден значительную часть времени в этот период посвятить работе, не связанной с наукой и преподаванием. В новой для себя финансовой сфере он проработал несколько лет. В результате Владимир Минирович заинтересовался вопросами моделирования эволюции цен финансовых инструментов в близкой ему стохастической постановке. В конце девяностых годов, вернувшись в науку, он начал активно заниматься проблемами финансовой математики, условиями существования и свойствами экстремальных вероятностных мер, задачей оптимальной остановки случайных последовательностей. Данные исследования нашли отражение в его публикациях, посвященных проблемам расчета опционов. Этими задачами он занимался до последнего времени. Идеям, результатам и публикациям В. М. Хаметова на эту тему посвящен следующий раздел статьи. Еще одним направлением исследований, которым он также занимался последние двадцать лет, стала теория оптимального восстановления функций по наблюдениям с ошибками [16], [17], [18], [19], [20].

Владимиру Минировичу были присущи широта научных интересов, умение быстро погружаться в ранее не рассматривавшиеся задачи и предлагать новые подходы к их решению. Всего опубликовано более 100 его научных работ. Публикации Владимира Минировича удостаивались включения в список лучших научных работ ЦЭМИ РАН: за 2011 год (цикл статей в соавторстве со Зверевым О. В. [21], [22]) и за 2017 год (цикл статей в соавторстве с Шелемех Е. А. [23], [24], [25]). Его ученица Шелемех Е. А. была удостоена второй премии им. проф. Б. Л. Овсиевича (присуждается молодым ученым за фундаментальные экономико-математические исследования, выполненные в России) 2015 года за цикл работ, написанных в соавторстве с В. М. Хаметовым и на основе его идей.

С момента поступления в аспирантуру и до последнего времени жизнь Владимира Минировича как ученого и преподавателя была наиболее тесно связана с МИЭМ. Кроме того, с 2005 года он работал также в лаборатории теории риска ЦЭМИ РАН, а в 2018–2019 годах еще и в Московском Авиационном Институте (МАИ). В 1985 году в МИЭМ он получил ученое звание доцента, а в 2006 году — профессора. Разнообразие научных интересов Владимира Минировича проявилось и в широком круге дисциплин, которые он преподавал: финансовая математика, введение в теорию опционов, математические методы финансового анализа, математические методы экономики, теория вероятностей, случайные процессы, случайные процессы и теория массового обслуживания, точечные процессы, функциональный анализ, управление рисками и страхование, управление рисками и актуарные методы, теория игр, квантовые вычисления, теория функции комплексного переменного. Он также является соавтором 4 учебно-методических пособий [6], [9], [5], [26]. Заслуги Владимира Минировича в области преподавательской деятельности отмечены наградами: в 2009 году он был награжден нагрудным знаком "Почетный работник высшего профессионального образования России", в 2017 году отмечен благодарностью НИУ ВШЭ, в 2021 году награжден Почетной грамотой НИУ ВШЭ.

Особое значение Владимир Минирович придавал наставничеству. Он брал на себя научное руководство аспирантами в МИЭМ, с 2005 года, работая в лаборатории теории риска ЦЭМИ РАН, руководил исследованиями своих учеников в области построения и анализа новых моделей ценообразования активов на финансовых рынках. Под его руководством защищены пять диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук [27], [28], [29], [30], [31].

Как эксперт по оценке риска Владимир Минирович консультировал МЧС России. За свой вклад он был награжден медалью "За пропаганду спасательного дела" МЧС

России (2010 год) и памятной медалью МЧС России "Маршал Василий Чуйков" (2014 год).

Владимир Минирович ушел из жизни 2 сентября 2023 года.

Далее в статье представлен обзор результатов, полученных Владимиром Минировичем и его учениками в области ценообразования финансовых инструментов. Этими задачами он заинтересовался, столкнувшись с проблемами практического применения существовавшей на тот момент весьма обширной теории. Его вклад состоит в предложении новаторских подходов к уже достаточно изученным проблемам, которые позволили по-новому доказать известные теоретические положения и наметить способы их практического применения.

1 Минимаксный подход к расчету опционов на неполных рынках

В. М. Хаметов начал работать над проблемой расчета опционов на неполных рынках в начале 2000-х годов. На тот момент было известно (см., например, [32, гл. 5, 7]), что на неполном рынке с дискретным временем для интегрируемого платежного обязательства: 1) существует континуум безарбитражных цен, при этом само платежное обязательство не достижимо, 2) существует самофинансируемый портфель с минимальным начальным капиталом, почти наверное покрывающим в момент исполнения опциона все обязательства продавца по этому контракту (суперхеджирующий портфель). Существование суперхеджирующего портфеля в случае модели неполного рынка с дискретным временем впервые было доказано Фельмером и Кабановым [33] с помощью равномерного разложения Дуба. В этом подходе компоненты суперхеджирующего портфеля существуют как множители Лагранжа в некоторой стохастической оптимизационной задаче. Капитал такого портфеля равен верхней грани по множеству эквивалентных вероятностных мер от ожидаемого значения платежного обязательства. Трудности, связанные с вычислением существенной верхней грани по множеству вероятностных мер и нахождением соответствующих множителей Лагранжа, привели к тому, что даже для сравнительно простых примеров неполных рынков задача построения суперхеджирующего портфеля оставалась нерешенной.

В. М. Хаметов предложил способ построения равномерного разложения Дуба на основе решения стохастической оптимизационной задачи [34], [35], [36], а затем сформулировал задачу расчета опциона на неполном рыке как антагонистическую игру [37]. Суть предложенного им игрового подхода состоит в следующем: рассматривается игра продавца опциона (эмитента), рынка (а, в случае американского опциона, еще и покупателя контракта). В момент продажи опциона продавец получает от покупателя стоимость опциона (премию), за счет которой формирует портфель первичных финансовых активов. Он управляет этим портфелем вплоть до момента предъявления опциона к исполнению покупателем (если такой наступит) с тем, чтобы за счет стоимости портфеля исполнить все обязательства по контракту. Предполагается, что внешние поступления и изъятия капитала из портфеля отсутствуют (самофинансируемый портфель). Стратегиями рынка являются распределения вероятностей цен первичных рисковых активов из числа эквивалентных базовому. Покупатель американского опциона вправе выбрать момент предъявления опциона к исполнению. (В случае европейского опциона этот момент не выбирается, он закреплен в контракте.) Игра рассматривается с точки зрения продавца опциона: в наихудшей для себя ситуации, когда рынок и покупатель действуют на максимизацию величины ожидаемого экспоненциального риска продавца, он стремится минимизировать ее. Оказывается, что в этой минимаксной задаче на безарбитражном рынке всегда существует суперхеджирующий портфель, доставляющий минимальное значение верхней грани ожидаемого риска продавца опциона, и он является суперхеджирующим с минимальным первоначальным капиталом, т.е. с капиталом, равным верхней цене хеджирования. Исследование свойств решения минимаксной задачи в части свойств вероятностной меры, доставляющей верхнюю грань ожидаемого риска продавца (если она существует), позволило предложить алгоритм построения решения этой задачи и, соответственно, суперхеджирующего портфеля с минимальным капиталом.

Основные результаты были получены В. М. Хаметовым и его учениками сначала для европейского опциона, а затем распространены на случай американского опциона. Далее все результаты сформулированы в наиболее общем виде.

1.1 Описание игры

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, где $\Omega = (\mathbb{R}^+)^{d(N+1)}$, N — натуральное число (горизонт), $\mathcal{F} := \mathcal{B}(\Omega)$, $N_0 := \{0, 1, 2, ..., N\}$, а $N_1 = N_0 \setminus \{0\}$. На нем определены d-мерные случайные величины $\{S_t\}_{t\in N_0}$. Зададим $\mathcal{F}_0 := \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathcal{F}_t := \sigma(S_s, s \le t)$, $t \in N_1$. Для удобства записи примем, что $\mathcal{F}_{-1} := \mathcal{F}_0$. Без ограничения общности будем полагать, что фильтрация $(\mathcal{F}_t)_{t\in N_0}$ универсально полна.

Введенные объекты задают многошаговую стохастическую модель финансового рынка с дискретным временем и конечным горизонтом N, состоящего из d рисковых активов, эволюция стоимости которых описывается случайными величинами $\{S_t\}_{t\in N_0}$, и одного безрискового актива с постоянной стоимостью, равной 1 [32, разд. 5.1]. Торги на рынке осуществляются в моменты времени $t \in N_0$.

Через $\mathfrak{M}$ обозначим множество всех мартингальных вероятностных мер Q, заданных на $(\Omega, \mathcal{F})$, т.е. мер, относительно которых $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[S_{t+s}|\mathcal{F}_t] = S_t$, $0 \le t \le t+s \le N$ [32], а через $\mathfrak{R}$ — совокупность мер, состоящую из меры P и всех вероятностных мер на $(\Omega, \mathcal{F})$, эквивалентных P. Известно, что построенная модель рынка является безарбитражной, если $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R} \neq \varnothing$ [32, теор. 5.17], и неполной, если $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}$ состоит из более, чем одной меры.

Пусть на рынке также имеется динамическое платежное обязательство $f := \{f_t\}_{t\in N_0}$. Последнее означает [32, разд. 5.1], что заданы интегрируемые п.н. неотрицательные $\mathcal{F}_t$-измеримые случайные величины f_t, $t \in N_0$. Всюду далее будем предполагать, что все f_t, $t \in N_0$, п.н. ограничены. В общем случае f представляет собой чистые совокупные обязательства продавца американского опциона, обусловленные этим контрактом. Частный случай $f_t \equiv 0$, $t \in N_0 \setminus \{N\}$, и $\mathsf{P}(f_N > 0) > 0$ соответствует платежному обязательству европейского опциона.

Имеются три игрока: рынок, покупатель и продавец опциона. *Множеством стратегий рынка* назовем совокупность $\mathfrak{R}$. *Покупатель* опциона выбирает момент остановки τ из множества $\mathcal{T}$ моментов остановки со значениями из $N_0 \cup \{N+1\}$. Здесь $N+1$ — вспомогательный момент времени, отвечающий случаю отсутствия запроса покупателя на исполнение опциона до момента времени N включительно. Таким образом, мы считаем, что $\mathsf{P}(\tau = N+1|\tau > N) = 1$. Для определенности зададим $\mathcal{F}_{N+1} := \mathcal{F}_N$ и $f_{N+1} \equiv 0$.

Продавец опциона управляет самофинансируемым портфелем [32, разд. 5.1], сформированным в момент $t = 0$ за счет премии от продажи контракта и состоящим из одного безрискового и d рисковых активов. Предполагается, что транзакционные издержки и торговые ограничения отсутствуют. Количество активов каждого вида в портфеле в момент $t \in N_0$ моделируется $\mathcal{F}_{t-1}$-измеримыми случайными величинами: для безрискового актива — одномерной β_t, а для рисковых активов — d-мерной γ_t. Портфель — это набор пар $\pi = \{\beta_t, \gamma_t\}_{t \in N_0}$. Через U обозначим множество всех наборов γ, состоящих из d-мерных п.н. конечных $\mathcal{F}_{t-1}$-измеримых случайных величин γ_t, $t \in N_1$, а через U_t — его сужение на $\{t\}$, состоящее из всех γ_t, $t \in N_1$. Известно [32, разд. 5.1], что самофинансируемый портфель полностью определен, если задано количество всех входящих в него активов в момент $t = 0$, а также количество рисковых активов в каждый момент времени $t \in N_1$. Совокупная стоимость активов в портфеле в начальный момент времени определяется величиной премии опциона. Распределить эту стоимость между активами можно произвольным образом. Значит, в качестве *стратегий продавца опциона* достаточно рассматривать наборы γ. Капитал самофинансируемого портфеля π в момент времени t, обозначаемый X_t^π, $t \in N_1$, можно вычислить по формуле $X_t^\pi = X_0^\pi + \sum\limits_{i=1}^{t} \gamma_i \cdot \triangle S_i$ [32, разд. 5.1], где $\triangle S_i := S_i - S_{i-1}$, $\cdot$ — знак скалярного произведения. Портфелем с потреблением назовем пару (π, C), где π — самофинансируемый портфель, а C — набор п.н. неотрицательных $\mathcal{F}_t$-измеримых случайных величин C_t, $t \in N_0$, называемых потреблением. Капитал портфеля с потреблением определяют формулой $X_t^{(\pi,C)} := X_t^\pi - C_t$, $t \in N_0$.

Будем также предполагать, что: 1) в каждый момент времени $t \in N_0$ обоим игрокам доступна вся информация $\mathcal{F}_t$, 2) игроки действуют независимо друг от друга.

Пусть игроки выбрали стратегии $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}$, $\tau \in \mathcal{T}$ и $\gamma \in U$. Тогда ожидаемое значение *риска продавца* опциона определено формулой

$$I_0^{\mathsf{Q},\tau,\gamma} := I_0^{\mathsf{Q},\tau,\gamma}(S_0) := \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \exp\left\{ f_\tau - \sum_{i=1}^{\tau} \gamma_i \cdot \triangle S_i \right\}. \tag{1}$$

Рассмотрим задачу расчета опциона с точки зрения продавца. Предположим, что он стремится минимизировать свой ожидаемый риск в наихудшей для себя ситуации: покупатель опциона и рынок выбирают стратегии, максимизирующие ожидаемый риск продавца. Пришли к минимаксной задаче:

$$\inf_{\gamma \in U} \sup_{(\mathsf{Q},\tau) \in \mathfrak{R} \times \mathcal{T}} I_0^{\mathsf{Q},\tau,\gamma}. \tag{2}$$

Определение 1. *Решением минимаксной задачи* (2) *назовем четверку* $(\mathsf{Q}^*, \tau^*, \gamma^*, V_0)$ *такую, что* $V_0 = \inf\limits_{\gamma \in U} \sup\limits_{(\mathsf{Q},\tau) \in \mathfrak{R} \times \mathcal{T}} I_0^{\mathsf{Q},\tau,\gamma} = I_0^{\mathsf{Q}^*,\tau^*,\gamma^*}$, *где* Q^* *— вероятностная мера,* $\tau^* \in \mathcal{T}$, *а* $\gamma^* \in U$. *Величину* V_0 *назовем верхним гарантированным значением в задаче* (2), *меру* Q^* *— наихудшей, момент остановки* $\tau^* \in \mathcal{T}$ *— "оптимальным", а* γ^* *— минимаксной стратегией.*

Заметим, что в силу п.н. ограниченности динамического платежного обязательства f и допустимости стратегии "не вкладывать в рисковые активы" (т.е. $\gamma = (0, ..., 0) \in U$) верхнее гарантированное значение V_0 в (2) п.н. ограничено.

Замечание (о выборе экспоненциальной функции риска). Функция риска в (1) $\rho(x) = e^{-x}$ соответствует функции полезности с постоянным абсолютным неприятием риска (CARA — constant absolute risk aversion, [32, пример 2.46]). Экспоненциальная функция риска была выбрана из-за мультипликативного и ряда других свойств, позволяющих выписать уравнение Беллмана для задачи (2) в сравнительно простом виде (см. теорему 1). Этот выбор оправдался свойствами построенного для нее портфеля продавца опциона: он оказался суперхеджирующим с минимальным капиталом среди всех суперхеджирующих портфелей (теорема 2). Использование любой другой функции риска не может "улучшить" этот результат в смысле снижения капитала суперхеджрующего портфеля.

1.2 Основные результаты

Будем искать решение минимаксной задачи (2) с помощью стохастического варианта метода динамического программирования. Сначала обоснуем применимость этого метода, получив рекуррентные соотношения Беллмановского типа для верхнего гарантированного значения. Нам понадобятся следующие объекты и обозначения, $t \in N_1$: 1) $I_t^{\mathsf{Q},\tau,\gamma} := 1_{\{\tau \geq t\}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\exp\left\{ f_\tau - \sum_{i=t+1}^{\tau} \gamma_i \cdot \triangle S_i \right\} | \mathcal{F}_t \right]$; 2) верхнее гарантированное значение в момент времени: $V_t := \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in U_{t+1,N}} \operatorname*{ess\,sup}_{(\mathsf{Q},\tau) \in \mathfrak{R} \times \mathcal{T}} I_t^{\mathsf{Q},\tau,\gamma}$, где $U_{t+1,N}$ есть сужение множества U на $\{t+1, ..., N\}$. Ограниченность величин V_t, $t \in N_1$, следует из тех же соображений, что и ограниченность верхнего гарантированного значения V_0 задачи (2).

Рекуррентные соотношения для верхних гарантированных значений в задаче расчета европейского опциона были получены в [21], для американского опциона — в [23]. См. также [38].

Теорема 1. *Величины $\{V_t\}_{t \in N_0}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям п.н.*

$$\begin{cases} V_{t-1} = \max\left\{ \exp\{f_{t-1}\}, \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in U_t} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[V_t e^{-\gamma \cdot \triangle S_t} | \mathcal{F}_{t-1} \right] \right\}, \quad t \in N_1, \\ V_N = \exp\{f_N\}. \end{cases} \tag{3}$$

Будем искать стратегии игроков, доставляющие верхнюю и нижнюю грани в правой части равенств (3). Начнем поиск решения с внешней существенной нижней грани по множеству U_t, $t \in N_1$. Обозначим $\tilde{\tau} := \min\{t \in N_0 : V_t = \exp\{f_t\}\}$.

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны.*

1. $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{M} \neq \varnothing$.

2. *Найдется $\gamma^* \in U$ такая, что при любом $t \in N_1$ для γ_t^* п.н. выполняется равенство*

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in U_t} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[V_t e^{-\gamma \cdot \triangle S_t} | \mathcal{F}_{t-1} \right] = \left(\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[V_t e^{-\gamma \cdot \triangle S_t} | \mathcal{F}_{t-1} \right] \right) \Big|_{\gamma = \gamma_t^*}. \tag{4}$$

3. *Найдутся $\gamma^* \in U$ и неубывающий набор п.н. неотрицательных $\mathcal{F}_t$-измеримых случайных величин $C^* := \{C_t^*\}_{t \in N_0}$, $C_0^* = 0$, такие, что п.н. для любого $t \in N_1$*

$$\ln V_{t \wedge \tilde{\tau}} = \ln V_0 + \sum_{i=1}^{t \wedge \tilde{\tau}} \gamma_i^* \cdot \triangle S_i - C_{t \wedge \tilde{\tau}}^*. \tag{5}$$

4. *Найдутся $\gamma^* \in U$ и неубывающий набор п.н. неотрицательных $\mathcal{F}_t$-измеримых случайных величин $C^* := \{C_t^*\}_{t\in N_0}$, $C_0^* = 0$, такие, что самофинансируемый портфель с потреблением (π^*, C^*), где $\pi^* = \{\beta_t^*, \gamma_t^*\}_{t\in N_0}$ и $X_t^* := X_t^{(\pi^*,C^*)} = \ln V_t$, $t \in N_0$, имеет следующие свойства:*

   - *$f_\tau \leq X_\tau^*$, $\tau \in \mathcal{T}$, п.н. и*
   - *для любого другого портфеля с потреблением (π, C): $f_\tau \leq X_\tau^{(\pi,C)}$, $\tau \in \mathcal{T}$, п.н. справедливо неравенство $X_t^* \leq X_t^{(\pi,C)}$, $t \in N_0$.*

Условие $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{M} \neq \varnothing$ в теореме 2 означает безарбитражность рынка [32, теор. 5.17].

Представление вида (5) называют опциональным разложением или равномерным разложением Дуба для $\{\ln V_t\}_{t\in N_0}$. В классической статье [33] равномерное разложение Дуба — это основа доказательства утверждения о существовании суперхеджирующего портфеля опциона на неполном рынке. Известно, что случайные величины $\{Y_t\}_{t\in N_0}$ допускают равномерное разложение Дуба, если и только если $\{Y_t\}_{t\in N_0}$ — супермартингал [32]. Коэффициенты γ^* разложения есть коэффициенты Лагранжа некоторой оптимизационной задачи [33]. Их существование также обосновывают методами функционального анализа [32].

Работа над получением новых условий существования равномерного разложения Дуба велась В. М. Хаметовым и его учениками с начала 2000-х годов. Первые опубликованные результаты относятся к 2002 году ([27], [28], [34], [36], [37], [39]). Они представляют собой труднопроверяемые достаточные условия существования разложения (5) и, соответственно, суперхеджирующего портфеля. Первые утверждения, содержащие условия, приведенные в теореме 2, были опубликованы для опционов европейского типа и относятся к 2009 году [40]. В [21] и [40] обоснована достаточность безарбитражности рынка (пункт 1 теоремы 2) для выполнения пунктов 2–4 теоремы 2. Для американского опциона аналогичные утверждения были опубликованы в [23]. Там же доказана эквивалентность пунктов 2–4 теоремы 2. Доказательство эквивалентности пунктов 1 и 2 теоремы 2 содержится в [31].

Из доказательства теоремы 2 следует, что γ^* в пунктах 2–4 теоремы есть один и тот же объект. Утверждение теоремы 2 отличается от известных тем, что: 1) не предполагается супермартингальность $\{\ln V_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in N_0}$, это свойство следует из теоремы 2 и известных результатов [32]; 2) оно дает альтернативный метод построения равномерного разложения Дуба и суперхеджирующего портфеля опциона с минимальным начальным капиталом. Предложенный метод вместе с приведенными ниже результатами относительно свойств "наихудшей" вероятностной меры (если она существует) позволил построить новые примеры суперхеджирования опционов на неполных рынках с конечным или компактным носителем [22], [24], [25], [38], [41].

Достаточные условия единственности разложения (5) и, соответственно, суперхеджирующего портфеля были впервые опубликованы в 2016 году [24], [42]. В более привычных терминах неизбыточности рынка — в 2018 году [43]. Напомним, что рынок называют неизбыточным, если для любого $t \in N_1$ из равенства $\gamma_t \cdot \triangle S_t = 0$ п.н., $\gamma_t \in U_t$, следует, что $\gamma_t = (0, ..., 0)$ п.н. [32, опр. 1.13].

Теорема 3. *Пусть рынок неизбыточен и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R} \neq \varnothing$. Тогда $\{\ln V_t\}_{t\in N_0}$ допускает п.н. единственное равномерное разложение Дуба (5).*

Равномерное разложение Дуба (5) позволило также выписать вид момента остановки, доставляющего верхнюю грань в задаче (2) [23], [44], [45].

Теорема 4. *Пусть* $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{M} \neq \varnothing$ *и* $\gamma^* \in U$ *удовлетворяет* (4). *Тогда для момента остановки* $\tau^* := \min\{t \in N_0 : V_t = \exp\{f_t\}\}$ *имеет место равенство* $V_0 = \sup\limits_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}} I_0^{\mathsf{Q},\tau^*,\gamma^*}$.

Были получены примеры явного построения оптимального правила остановки для процессов специального вида [46], [47]; предложен алгоритм решения задачи об оптимальной остановке с конечным горизонтом в случае рынка с конечным носителем [48].

Перейдем теперь к проблеме существования вероятностной меры, доставляющей внутреннюю существенную верхнюю грань в рекуррентных соотношениях (3). В наиболее общем виде они были опубликованы в работах [49], [50].

Теорема 5. *Для произвольной* $\mathcal{F}$*–измеримой п.н. ограниченной случайной величины* ξ *справедливы утверждения:*

1) существуют

— заданная на $(\Omega, \mathcal{F})$ *вероятностная мера* λ *такая, что* $\lambda \gg \mathsf{Q}$ *для любой* $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}$, *и*

— последовательность неотрицательных $\mathcal{F}$*-измеримых случайных величин* $\{X_k\}_{k \geq 1}$, *для которых* $\mathsf{E}^\lambda X_k = 1$, $k \geq 1$, *и* $\sup\limits_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \xi = \lim\limits_{k \to \infty} \mathsf{E}^\lambda X_k \xi$;

2) если $\{X_k\}_{k \geq 1}$ *относительно слабо компактно в* $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$, *то найдется вероятностная мера* Q^*, *заданная на* $(\Omega, \mathcal{F})$, *такая, что* $\sup\limits_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \xi = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*} \xi$.

Условие теоремы 5 об относительной слабой компактности последовательности $\{X_k\}_{k \geq 1}$ сложно проверить. Тем не менее, теорема 5 существенна для наших построений: она дает достаточные условия того, что верхняя грань в правой части рекуррентных соотношений (3) достигается именно на вероятностной мере. Известно [51], [52], что, как правило, верхняя грань достигается на конечно-аддитивной мере. В таком случае математическое ожидание не определено, что, в свою очередь, затрудняет практическое построение решения задачи расчета опциона в минимаксной постановке и его интерпретацию.

Теперь мы готовы сформулировать условия существования решения задачи (2) (см. [24], [50]).

Теорема 6. *Пусть* $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{M} \neq \varnothing$ *и при любых* $t \in N_0$ *и* $\gamma \in U$ *для случайной величины* $\exp\left\{ f_t - \sum\limits_{i=1}^{t} \gamma_i \cdot \triangle S_i \right\}$ *выполнены условия теоремы* 5. *Тогда существует решение минимаксной задачи* (2), *т.е. четверка* $(\mathsf{Q}^*, \tau^*, \gamma^*, V_0)$, *где* Q^* *— вероятностная мера, а* V_0 *является решением рекуррентных уравнений* Q^**-п.н.*

$$\begin{cases} V_{t-1} = \max\{f_{t-1}, \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[V_t e^{-\gamma_t^* \cdot \triangle S_t} | \mathcal{F}_{t-1}\right]\}, & t \in N_1, \\ V_N = \exp\{f_N\}. \end{cases}$$

В ходе исследований были выявлены важные свойства "наихудшей" вероятностной меры в составе решения задачи (2). В наиболее общей постановке для вероятностных мер, доставляющих экстремум интегралу Лебега произвольной ограниченной случайной величины, эти свойства были установлены в [49], [53]. Для минимаксной задачи расчета европейского опциона — в [21] и [50], а для американского опциона — в [24].

Теорема 7. *Пусть модель рынка является неполной и* $(\mathsf{Q}^*, \tau^*, \gamma^*, V_0)$ *— решение задачи* (2)*. Тогда: 1)* $\mathsf{Q}^* \notin \mathfrak{R}$*; 2)* $\mathsf{Q}^* \in \mathfrak{M}$*; 3) относительно нее справедливо равномерное разложение Дуба* (5) *с* $C_t^* \equiv 0$ Q^**-п.н. Кроме того, найдется мартингальная дискретная вероятностная мера, сосредоточенная не более чем на* $N(d+1)$ *элементе из* $\operatorname{supp}\mathsf{P}$*, относительно которой для любого* $t \in N_1$*:*

$$\ln V_{t\wedge\tau^*} = \ln V_0 + \sum_{i=1}^{t\wedge\tau^*} \gamma_i^* \cdot \triangle S_i. \tag{6}$$

Таким образом, из утверждения теоремы 7 следует, что задача расчета опциона на исходном неполном рынке сводится к задаче расчета этого опциона на "наихудшем" полном рынке, заданном мартингальной мерой с конечным носителем.

Утверждения теорем 2 и 7 позволили предложить алгоритм построения решения задачи (2), разделив задачи поиска конечного носителя дискретной меры, о которой сказано в теореме 7, и суперхеджирующего портфеля (подробнее см. в [24], [31]): 1) известные равенства $\ln V_{t-1} = \max\{f_{t-1}, \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}\cap\mathfrak{M}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[\ln V_t|\mathcal{F}_{t-1}]\}$, $t \in N_1$, $\ln V_N = f_N$ и результаты теоремы 7 о мере с конечным носителем позволяют найти эту меру и $\ln V_{t-1}$; 2) из равенств (6) и условия самофинансируемости можно найти $\pi^* = \{\beta_t^*, \gamma_t^*\}_{t\in N_0}$; 3) момент остановки определяется из утверждения теоремы 4.

Описанный алгоритм позволил построить "наихудшие" меры и рынки, а также суперхеджирующие портфели для ряда примеров [22], [24], [25], [38], [41], [54].

Как отмечалось выше, выполнение условий теоремы 5 и, соответственно, теоремы 6 трудно проверить. Одновременно, предложен алгоритм построения решения задачи (2), если оно существует. Тогда можно подойти к решению задачи (2) следующим образом: построить "кандидата" в соответствии с предложенным алгоритмом, а затем проверить, является ли он решением задачи. Следующая теорема, сформулированная для европейского опциона в [21] и [50], помогает осуществить такую проверку. В утверждении используется понятие верхней S-оценивающей последовательности. Обратим внимание, что в определении и теореме ниже $\tau^* = N$ на любой траектории, что соответствует задаче (2) для европейского опциона.

Определение 2. *Верхней* S*-оценивающей последовательностью для европейского опциона будем называть набор* $\mu := \{\mu_t\}_{t\in N_0}$*, элементы которого определены равенством* $\mu_t := V_t \exp\left\{-\sum_{i=1}^{t} \gamma_i^* \cdot \triangle S_i\right\}$*, где* $\{V_t\}_{t\in N_0}$ *удовлетворяет* (3)*, а* γ^* *— равенствам* (4)*.*

Теорема 8. *Пусть* $\mathfrak{R}\cap\mathfrak{M} \neq \varnothing$ *и* γ^* *удовлетворяет равенствам* (4)*. Следующие утверждения эквивалентны:*

- Q^* *— наихудшая;*
- $\mathsf{Q}^* \in \mathfrak{M}$ *и справедливы равенства* Q^**-п.н.*

$$\begin{cases} V_{t-1} = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[V_t e^{-\gamma_t^*\cdot\triangle S_t}|\mathcal{F}_{t-1}\right], & t \in N_1, \\ V_N = \exp\{f_N\}; \end{cases}$$

- μ *— мартингал относительно меры* $\mathsf{Q}^* \in \mathfrak{M}$*.*

2 Квантильное хеджирование европейского опциона на неполном рынке

Суперхеджирование позволяет гарантировать исполнение продавцом опциона обязательств по контракту с вероятностью 1. Однако, минимальная необходимая для этого стоимость контракта (верхняя цена хеджирования), как правило, слишком высока с практической точки зрения (подробнее см. [32, гл. 8]). Одной из альтернатив суперхеджированию является квантильное хеджирование, когда требуется исполнение продавцом обязательств по контракту с заданной вероятностью $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Такой подход позволяет снизить стоимость опциона. Известно, что на неполном рынке существует соответствующая стратегия продавца опциона [32, § 8.1]. Оказалось, что результаты, полученные для минимаксной задачи (2) для случая европейского опциона, позволяют построить эту стратегию и вычислить соответствующую премию для европейского опциона следующим образом. Необходимо построить решения двух минимаксных задач: с исходным платежным обязательством f_N и с платежным обязательством вида $1_{\{A\}}$, где A — событие, которое будет определено ниже. Комбинация построенных решений (как она определена теоремой 9 ниже) дает решение задачи квантильного хеджирования. Всюду ниже обозначения, совпадающие с обозначениями предыдущего раздела, относятся к минимаксной задаче для исходного платежного обязательства, аналогичные обозначения с верхним индексом A — к задаче с платежным обязательством $1_{\{A\}}$, а с индексом α — к решению задачи квантильного хеджирования.

Результаты, приведенные в этом разделе, впервые были опубликованы в [55], [56].

Сначала формально определим, что мы будем понимать под решением задачи квантильного хеждирования. Пусть π — самофинансируемый портфель, а $\chi := \{\chi_t\}_{t\in N_1}$ — набор $\mathcal{F}_t$-измеримых случайных величин (не обязательно положительных). В этом случае пара (π,χ) представляет собой портфель, допускающий в каждый момент времени $t \in N_1$ как поступления, так и выбытия средств. Капитал такого портфеля определим равенствами $X_t^{(\pi,\chi)} := X_t^\pi - \chi_t$, $t \in N_1$, $X_0^{(\pi,\chi)} := X_0^\pi$.

Определение 3. *Решением задачи расчета европейского опциона с платежным обязательством f_N на неполном рынке без торговых издержек и ограничений с квантильным критерием уровня $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, назовем портфель (π^α,χ^α) и его начальный капитал $X_0^\alpha := X_0^{(\pi^\alpha,\chi^\alpha)}$ такие, что в момент времени N для любой меры $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}$ имеет место равенство $\mathsf{Q}\left(X_N^\alpha \geq f_N\right) \geq 1-\alpha$. Портфель (π^α,χ^α) назовем квантильным хеджирующим уровня $1-\alpha$, а множество $\{\omega\in\Omega : X_N^\alpha \geq f_N\}$ — множеством успешного хеджирования этого портфеля.*

Обозначим $\bar{A} := \left\{\omega \in \Omega : \bigcap\limits_{i=1}^{N}\bigcap\limits_{j=1}^{d}\left(S_i^{(j)} \geq \lambda_i^{(j)}\right)\right\}$, где $\lambda_i^{(j)}$ — некоторые константы, $A := \Omega \setminus \bar{A}$.

Теорема 9. *Пусть $\mathfrak{R}\cap\mathfrak{M} \neq \varnothing$ и для заданного $\alpha \in (0,1)$ найдутся $\lambda_i^{(j)} \in \mathbb{R}^+$, $j = \overline{1,d}$, $i \in N_1$, такие, что относительно любой меры $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}$ выполняются неравенства $\mathsf{Q}(\bar{A}) \geq 1-\alpha$. Тогда существует квантильный хеджирующий портфель уровня $1-\alpha$, который имеет вид $\gamma_t^\alpha = \gamma_t^* - \gamma_t^A \ln V_0$, $\beta_t^\alpha = \beta_t^* - \beta_t^A \ln V_0$ и $\chi_t^\alpha = C_t^* - C_t^A \ln V_0$, $t \in N_1$, а его начальный капитал $X_0^\alpha = \ln V_0\left(1 - \ln V_0^A\right) > 0$.*

3 Байесовская модель облигации

В.М. Хаметов интересовался задачами не только теоретического, но и прикладного характера. Одна из таких задач — построение модели облигации, отвечающей одновременно следующим требованиям: 1) простота (для анализа и с вычислительной точки зрения), 2) высокая точность, 3) неотрицательность и убывание доходности по времени, 4) заданное значение цены в момент погашения, 5) простая калибровка.

Для решения этой проблемы им был предложен новый подход, суть которого состоит в построении случайного процесса, зависящего всего от одного параметра, с п.н. закрепленным правым концом. Для этого выбирается базовая случайная последовательность $\{S_t\}_{t\in N_0}$, $N_0 := \{0,...,N\}$, где N — заданное натуральное число. Для этой последовательности вводится новое распределение вероятностей, соответствующее условному распределению исходной последовательности относительно сигма-алгебры $\sigma\{S_t, S_N\}$. Предложенный подход можно интерпретировать следующим образом: в каждый момент времени $t \in N_0$ наблюдателю доступна информация как о текущей стоимости облигации, так и о ее номинале. Условное распределение может быть вычислено с помощью формулы Байеса. Отсюда название "байесовская модель облигации".

Эта идея была воплощена в работах [57], [58] для расчета бескупонной облигации.

В качестве базы было выбрано несимметричное геометрическое случайное блуждание $S_t = S_{t-1}\lambda^{\delta_t}$, $S_0 > 0$, где $t \in \{1,...,N\}$, $\lambda > 0$, $\{\delta_t\}_{1\le t\le N}$ — последовательность независимых в совокупности бернуллиевских случайных величин, принимающих значения 0 и 1. С помощью формулы Байеса было установлено следующее утверждение.

Теорема 10. *Для любых $t \in N_0$ и $t \le \tau \le N$ справедливо равенство $\mathsf{P}(S_\tau = x|S_0,...,S_t,S_N) = \mathsf{P}(S_\tau = x|S_t,S_N)$ и имеет место представление*

$$\mathsf{P}(S_\tau = x|S_{\tau-1},S_N) = \begin{cases} 0, \quad \textit{если} \quad |\log_\lambda x - \log_\lambda S_{\tau-1}| > 1, \\ 1 - (\log_\lambda S_N - \log_\lambda S_{\tau-1})/(N-\tau+1), \ \textit{если}\ x = S_{\tau-1}, \\ (\log_\lambda S_N - \log_\lambda S_{\tau-1})/(N-\tau+1), \ \textit{если}\ x = \lambda S_{\tau-1}, \end{cases}$$

причем $\mathsf{P}(S_N = x|S_{N-1},S_N) = 1_{\{S_N=x\}}$.

Этот результат позволил предложить следующую *модель эволюции стоимости бескупонной облигации с номиналом* $A > 0$: стоимость в момент времени t задается случайной величиной

$$S_t = S_{t-1}\lambda^{\delta_t}, t \in \{1,...,N-1\}, \quad S_0 > 0, \quad S_N = A, \tag{7}$$

где $\{\delta_t\}_{1\le t\le N}$ независимы в совокупности и принимают значения 0 и 1 с вероятностями

$$\mathsf{P}(\delta_{t+1} = 1|S_t, S_N = A) := (\log_\lambda A - \log_\lambda S_t)/(N-t) = 1 - \mathsf{P}(\delta_{t+1} = 0|S_t, S_N = A). \tag{8}$$

Установлено, что для набора $\{B_t\}_{t\in N_0}$, заданного соотношениями $B_0 = 1$, $B_{t+1} := B_t\left[1 + (\lambda-1)(\log_\lambda S_N - \log_\lambda S_t)/(N-t)\right]$, имеют место равенства $\mathsf{E}(S_{t+1}B_{t+1}^{-1}|S_0,...,S_t,S_N) = S_tB_t^{-1} = S_{t-1}B_{t-1}^{-1}\lambda^{\delta_t}/\left[1 + (\lambda-1)(\log_\lambda S_N - \log_\lambda S_t)/(N-t)\right]$, где $t \in \{1,...,N-1\}$, что дает основание назвать набор $\{B_t\}_{t\in N_0}$ дисконтирующим для модели бескупонной облигации (7)–(8).

Для байесовской модели облигации (7)–(8) предложено следующее определение отсутствия арбитража: у неотрицательных случайных величин $\{g_t\}_{t\in N_0}$, где g_t есть функция от S_t и S_N, а $g_0 = 0$, имеется арбитражная возможность при наблюдениях S_t, S_N, если $\mathsf{P}(g_{t'} > 0 | S_t, S_N) > 0$ п.н. для некоторого $t' \in N_0$. Установлено, что для дисконтированного набора $\{S_t B_t^{-1}\}_{t\in N_0}$ арбитражная возможность отсутствует.

В работе [57] вычислена волатильность последовательности $\{\ln S_t\}_{t\in N_0}$. Она равна $\ln\lambda$. Приведены формулы для доходности бескупонной облигации к погашению в момент времени t, форвардной и мгновенной форвардной процентной ставки.

Калибровка модели (7)–(8) сводится к выбору значения единственного параметра λ. Наблюдению доступен двухкомпонентный набор $\{(\hat S_t, \hat S_N)\}_{t\in N_0}$, а $\delta_t = 1_{\{\ln \hat S_t > \ln \hat S_{t-1}\}}$. Пусть $\hat p_N := \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^N \delta_i$. Легко проверить, что в построенной модели $\ln(\hat S_N/\hat S_0) = (\ln\lambda)\sum\limits_{i=1}^N \delta_i = N\hat p_N(\ln\lambda)$. Отсюда получаем простую формулу для оценки параметра модели $\hat\lambda := (\hat S_N/\hat S_0)^{1/(N\hat p_N)}$.

В статье [57] подробно описаны и обоснованы алгоритмы имитационного моделирования и прогноза стоимости бескупонной облигации, а также приведен пример применения описанных алгоритмов к реальным данным, демонстрирующий хорошую точность прогноза. Эти результаты позволяют использовать байесовскую модель бескупонной облигации на практике. Приведем краткое описание этих алгоритмов.

Алгоритм имитационного моделирования стоимости бескупонной облигации. Пусть: 1) на основе наблюдений вычислено $\hat\lambda$ по приведенной выше формуле; 2) для любого $t \in \{1, ..., N\}$ по наблюдениям $\{(\hat S_t, \hat S_N)\}_{t\in N_0}$ вычислена условная вероятность $\mathsf{P}(\delta_{t+1} = 1 | \hat S_t, \hat S_N) = [\ln \hat S_N - \ln \hat S_t]/[(N-t)\ln\hat\lambda]$; 3) $\hat S_0 = a$, $\hat S_N = A$, $0 < a < A$. Тогда процедура имитационного моделирования для модели бескупонной облигации (7)–(8) состоит в следующем:

Шаг 0. Генерируем равномерно распределенную на отрезке $[0,1]$ случайную величину ξ_1.

Шаг 1. Вычисляем $\ln S_1 = \ln a + (\ln\hat\lambda)1_{\{\xi_1 \le [\ln A - \ln a]/[N\ln\hat\lambda]\}}$.

Шаг i ($i > 1$). Генерируем равномерно распределенную на отрезке $[0,1]$ случайную величину ξ_i, не зависящую от $\{\xi_j\}_{1\le j\le i-1}$, и вычисляем $\ln S_i = \ln S_{i-1} + (\ln\hat\lambda)1_{\{\xi_i \le [\ln A - \ln \hat S_{i-1}]/[(N-i+1)\ln\hat\lambda]\}}$. Последнее рекуррентное соотношение является другой формой описания модели бескупонной облигации, удобной для применения метода Монте-Карло.

Оптимальный в среднеквадратичном смысле прогноз стоимости бескупонной облигации $S_{t|t_0}$ для модели (7)–(8) задается равенствами $\ln S_{t+1|t_0} := \ln S_{t|t_0} + (\ln\hat\lambda)1_{\{\xi_{t+1} \le [\ln A - \ln \hat S_{t|t_0}]/[N-t]\}}$, $\ln S_{t_0|t_0} = \ln \hat S_{t_0}$, где $0 \le t_0 \le t \le N$, $\hat S_{t_0}$ — заданная начальная рыночная стоимость облигации в момент времени t_0.

Заключение

Преподавание и наука занимали для Владимира Минировича одно из важнейших мест в жизни. Его отличал живой интерес ко многим областям математики и ее приложений. Одно из таких направлений, которому он посвятил много времени в последние двадцать лет, — финансовая математика в части проблем ценообразования различных финансовых инструментов. Его вклад в эту область знаний мы постарались осветить в этой статье. У Владимира Минировича всегда было много идей и планов работы на будущее, он смотрел на каждый полученный результат с точки зрения дальнейших перспектив его развития и синтеза с другими результатами. Уверены, что его идеи и результаты послужат хорошей основой для дальнейших исследований в этой области.

Владимир Минирович навсегда останется в памяти его коллег и учеников.

Воспоминания о В. М. Хаметове коллег и учеников

Белкина Татьяна Андреевна (к.ф.-м.н., доцент; руководитель лаборатории, ведущий научный сотрудник ЦЭМИ РАН). Образ Владимира Минировича Хаметова для меня неразрывно связан с именем моего родного вуза — МИЭМ. Того МИЭМ, каким он был на Большом Вузовском, и в котором мне посчастливилось учиться на факультете прикладной математики, потом в аспирантуре, а по окончании ее — работать на экономико-математическом факультете в течение почти 20 лет. И, несмотря на то, что Владимир Минирович никогда не был ни моим преподавателем, ни научным руководителем, он оказался тем человеком, общение с которым стало очень ценным для меня. И происходило оно на протяжении всех этих долгих лет — сначала в МИЭМ, а потом и в нашей лаборатории стохастической оптимизации и теории риска в ЦЭМИ, куда со временем он пришел работать, возглавив новое для нас направление финансовой математики и приведя с собой своих учеников. Собственно, он был первым человеком, кто заговорил однажды со мной как с коллегой, хотя я училась еще тогда на старших курсах, но уже начала писать свои первые научные работы. Широта научных интересов Владимира Минировача была известна всем, при этом он не обходил вниманием и работы начинающих исследователей — таких, каким была и я.

Имя Владимира Минировича Хаметова я впервые услышала, наверное, в конце третьего курса от Владимира Ильича Ротаря, который произвел тогда на нас сильное впечатление своими лекциями по теории вероятностей и позже стал моим научным руководителем. Мнение Ротаря для меня было очень важным, а тогда он сказал, что на кафедре исследования операций есть такой преподаватель, Владимир Минирович Хаметов, очень способный и умный человек, отличный специалист по случайным процессам, и что он будет очень хорошим научным руководителем (в частности, для моей подруги — ей сначала почему-то отказывали в распределении на кафедру теории вероятностей). Впоследствии я полностью убедилась в словах своего учителя — научная эрудиция Владимира Минировича, и не только в области случайных процессов, всегда меня удивляла, с ним можно было обсуждать задачи из разных областей, даже, на первый взгляд, далеких от его научных интересов, потому что и там он обладал широкими познаниями. И при этом всегда в его образе для меня оставалась какая-то загадка ...

Теперь, когда не стало ни того МИЭМ, каким он был во времена моей учебы и работы там, ни Владимира Минировича Хаметова, в памяти как наиболее ценное вспоминаются неповторимая вдохновляющая атмосфера МИЭМ, ее прекрасные преподаватели и влюбленные в свой институт студенты. А лично для меня — это и неизменное доброе участие и дружеская поддержка Владимира Минировича на протяжении долгих лет, его постоянная готовность с радостью помочь при решении разнообразных вопросов и проблем. И все это навсегда останется со мной.

Богомолов Ростислав Олегович (младший научный сотрудник ЦЭМИ РАН). Мое знакомство с Владимиром Минировичем Хаметовым состоялось в период моего обучения в МИЭМ, когда он преподавал у нас на старших курсах финансовую математику. Данный предмет сильно отличался от других, как и сама манера преподавания Владимира Минировича, что сразу было отмечено студентами. Его образ мышления и широкие познания в области математики производили сильное впечатление и вызывали глубокое уважение. Он был целеустремленным и всегда ставил амбициозные задачи, решения которых виделись ему заранее. Когда я был его аспирантом, он постоянно удивлял широтой своих знаний, кругозором, способностью видеть суть задачи. Владимир Минирович всегда видел перспективы развития любой задачи и всегда четко и продуманно следовал заранее сформированному им плану. Он понимал, каким должен быть результат и всегда знал способы его достижения. Арсенал накопленных знаний и опыта позволял ему делать неожиданные, но эффективные ходы, которые в итоге приводили к успеху. Как научный руководитель он всегда поддерживал своих учеников, делился своими знаниями и очень хотел, чтобы они послужили его ученикам. В то же время он был готов поддержать и дать совет в любой жизненной ситуации. В этом он также обладал обширными знаниями. Владимир Минирович имел широкий круг общения и всегда вызывал уважение у коллег и друзей.

Гущин Александр Александрович (д.ф.-м.н.; ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова; профессор МГУ; профессор НИУ ВШЭ).

... память моя однобока (В. С. Высоцкий, "Баллада о детстве")

Для меня Володя всегда будет ассоциироваться с семинаром под руководством Н. В. Крылова и А. Н. Ширяева в Стекловке. Память моя не удержала его выступления на этом семинаре. Я даже не помню, кто выступал, когда я пришел на него в первый раз. Это было 3 ноября 1976 года. Накануне Альберт Николаевич Ширяев согласился быть моим научным руководителем, так же как и у двоих моих однокурсников. У меня сохранилась рукописная запись доклада на том первом для меня семинаре, но по ней можно установить только, что доклад делал, скорее всего, Ю. М. Кабанов, или, может быть, Р. Ш. Липцер. Я не понял из доклада ничего, но слова "мартингал" и "компенсатор" так очаровали меня, что стали моими спутниками на протяжении 47 лет и останутся до конца. Думаю, что такой же шок испытали многие, впервые попав на семинар, где царили атмосфера высокой науки и демократический стиль общения.

Состав участников семинара со временем, конечно, менялся. Но Володя Хаметов был одним из постоянных участников. Мы с ним были какое-то время на "Вы", потом перешли на "ты", всегда обращались друг к другу по имени. Его отчество я узнал только, когда, годы спустя, я был секретарем этого семинара и составлял списки участников для прохода в здание МИАН. Несмотря на то, что Володя был меня заметно старше, он проявлял ко мне очень уважительное отношение. Вспоминаю, как на конференции в Бакуриани в 1985 году Володя выразил восхищение по поводу того, что я успеваю, серьезно занимаясь наукой, еще и участвовать в развлечениях.

В январе 2001 года мы встретились в курилке в МИЭМе, где я делал доклад на семинаре В. Б. Колмановского и А. Д. Мышкиса. В тот момент я занимался стохастическими дифференциальными уравнениями с запаздыванием совместно с Уве Кюхлером.

Думаю, что моя вовлеченность в эту тематику послужила причиной для приглашения меня в качестве оппонента на докторскую диссертацию Хаметова. Должен сказать, что читать диссертацию было нелегко. То же можно сказать и о многих его работах. В любом случае, его работы отличала сильная математическая составляющая и оригинальный стиль мышления. Наградой за мой труд по изучению диссертации была случайно услышанная мной фраза Володи о моем выступлении на его защите о том, что я объяснил суть его работы, так что он, наконец, понял, чем он занимается.

Позднее мы неоднократно встречались на семинарах в ЦЭМИ, а также в НИУ ВШЭ на факультете экономических наук. Нас объединяло общее поле деятельности, а именно, финансовая математика. Нас даже интересовали общие задачи, но мы подходили к их постановке и решению с разных сторон. Последний раз мы с ним виделись онлайн на защите докторской диссертации С. Н. Смирнова летом 2023 года, где мы оба были оппонентами. Володино выступление было достаточно коротким, но в нем были четко сформулированы причины, по которым диссертацию следовало поддержать. Я слышал о его болезни до этого, но не мог представить, что вижу его в последний раз ...

Зверев Олег Владимирович (к.ф.-м.н.; старший научный сотрудник ЦЭМИ РАН). Мое знакомство с Владимиром Минировичем произошло в МИЭМе, когда нам, студентам пятого курса, он читал лекции по оптимальному стохастическому управлению. Уже позже, в аспирантуре я начал работать под его руководством, что открыло передо мной поистине бескрайние просторы математики, о которых я, будучи студентом, и не подозревал. Только спустя время можешь оценить, сколько сил он терпеливо вкладывал в каждого из нас, тогда еще зеленых аспирантов. Не уставал восхищаться его кругозором и уровнем компетенции в области проводимых им исследований. Хочу отметить одно из многих достоинств Владимира Минировича — его отзывчивость и готовность всегда помочь, несмотря на загруженность работой. Часто от него приходилось слышать фразу: "Все решим!", что рождало уверенность в преодолении любых препятствий. Мне повезло найти в лице научного руководителя наставника, который помог сформироваться мне как личности и эксперту. Благодарен судьбе за возможность работать бок о бок с таким человеком как Владимир Минирович.

Каштанов Виктор Алексеевич (д.ф.-м.н., профессор; профессор–исследователь МИЭМ НИУ ВШЭ; декан факультета прикладной математики МИЭМ (1979–2011) и заведующий кафедрой "Исследование операций" МИЭМ (1981–2012)). С Владимиром Минировичем Хаметовым я познакомился в конце семидесятых годов, когда он был принят на работу на кафедру Прикладной математики в должности научного сотрудника. В 1981 году, когда была организована кафедра "Исследование операций" и были выделены преподавательские ставки, я предложил Владимиру Минировичу перейти на новую кафедру на должность старшего преподавателя. К этому моменту Владимир Минирович уже имел степень кандидата физико-математических наук и продемонстрировал свою высокую квалификацию математика. Я рад, что не ошибся в этой оценке. Владимир Минирович за короткое время очень хорошо проявил себя как преподаватель, подготовил и прочитал ряд основных и специальных курсов, в частности, потоковый годовой курс "Теория случайных процессов и теория массового обслуживания". По его инициативе было написано в 1990 году учебное пособие "Исследование операций", подбор материала, редактирование, оформление и другие "проблемы" — все это выполнено и преодолено В. М. Хаметовым и целиком является его заслугой.

Должен сказать, что Владимир Минирович во многом сделал себя сам. Его целе-

Должен сказать, что Владимир Минирович во многом сделал себя сам. Его целеустремленность, колоссальный труд, направленный на решение поставленных задач, заслуживают большого уважения. Я был несколько неожиданно удивлен, узнав, что он готовит докторскую диссертацию. Он не просил творческий отпуск для подготовки диссертации, кафедра не выделяла ему научного консультанта (сейчас не помню, возможно, научным консультантом был Виктор Павлович Маслов). Кафедра пошла навстречу, частично освободив его от преподавательской нагрузки. Остальное все — подготовка и успешная защита докторской диссертации — несомненно жизненный успех В. М. Хаметова. Этот успех разделил и коллектив кафедры, именно по кафедре "Исследование операций" Владимиру Минировичу было присвоено ученое звание доцента, а чуть позже — ученое звание профессора.

Хочу обратить внимание на смелое решение Владимира Минировича заняться математическими проблемами финансовой математики. Здесь ему пришлось доказывать свою квалификацию и компетенции ученикам Альберта Николаевича Ширяева, школа которого хорошо известна. На этом поприще Владимиру Минировичу также сопутствовал успех, о чем свидетельствует перечень научных работ и армия молодых учеников, которых он воспитывал как родных детей и которые, я надеюсь, с успехом продолжат дело своего Учителя.

Лось Алексей Борисович (к.т.н., доцент; заведующий кафедрой, доцент МИЭМ НИУ ВШЭ). Владимир Минирович с 2010 года работал в должности профессора на кафедре Компьютерной безопасности МИЭМ. Кафедра имеет специализацию "Математические методы защиты информации", и он нашел там для себя много интересных задач. С его приходом на кафедру уровень научных работ существенно возрос. Но Владимир Минирович был не только ученым, но и талантливым педагогом. Он руководил аспирантами и дипломными работами, с успехом читал студентам курсы по функциональному анализу и теории случайных процессов, посвящал много времени дополнительным занятиям со студентами, испытывавшими трудности с освоением математических дисциплин. Владимира Минировича до последних дней отличала высокая степень ответственности за свой участок работы. Даже тяжело больным он принимал участие в заседаниях кафедры, научном семинаре, работе экзаменационных комиссий и защите дипломных работ.

Паламарчук Екатерина Сергеевна (к.ф.-м.н.; ведущий научный сотрудник ЦЭМИ РАН; старший научный сотрудник НИУ ВШЭ). Я была наслышана о В. М. Хаметове как о специалисте с кафедры "Исследование операций" еще во время моей учебы на экономико-математическом факультете МИЭМ, но непосредственное знакомство с ним произошло на научном семинаре "Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании" в ЦЭМИ РАН. Этот семинар известен обширной тематикой представляемых докладов, и В.М. Хаметов был его активным участником. Вспоминаю, как при одном из первых посещений сразу обратил на себя внимание человек, задающий четкие вопросы по ходу заседания. Это был Владимир Минирович, который также имел обыкновение присутствовать и на последующей дискуссии в комнате 801. Стремление к четкости, ясность изложения, нацеленность на результат и внимание к ученикам, на мой взгляд, в достаточно полной мере характеризуют В.М. Хаметова как исследователя и профессионала высочайшего уровня. В общении он был исключительно галантным человеком, а также большим ценителем хорошего кофе. Светлая память В. М. Хаметову!

Пиуновский Алексей Борисович (д.ф.-м.н.; reader in University of Liverpool). В 1976–77 годах, только что окончив МИЭМ по специальности "Автоматика и телемеханика" и учась на вечернем отделении ФПМ МИЭМа, я заинтересовался теорией оптимального управления, динамическим программированием, случайными процессами и пр. Но поскольку я работал инженером на кафедре автоматики и телемеханики, то хороших специалистов в этих областях рядом не было, и я стал искать каких-то единомышленников на других кафедрах. Так я и познакомился с Владимиром Минировичем. Он с готовностью откликнулся, проводил много времени в беседах, указал книги и статьи, которые нужно изучить (Юшкевича, Варайи, Дермана, Блекуэлла и др.). Потом, в 1970–80 годы мы совместно опубликовали ряд статей по марковским процессам принятия решений и учебное пособие. Формально в аспирантуре МИЭМ у меня были другие руководители, но Владимир Минирович был, по существу, моим основным руководителем. Благодаря ему я стал участником научных семинаров в Математическом институте им. В. А. Стеклова (руководители — А. Н. Ширяев, Н. В. Крылов), в ЦЭМИ (руководитель — В. И. Аркин), выступал на конференциях, лично познакомился с Е. А. Файнбергом, А. А. Юшкевичем, И. М. Сониным, Э. Л. Пресманом и другими известными специалистами. Такая помощь в начале карьеры совершенно неоценима, и я очень благодарен за это В. М. Хаметову.

Ротарь Владимир Ильич (д.ф.-м.н., профессор; professor in University of California at San Diego; главный научный сотрудник ЦЭМИ РАН). Мы дружили с Владимиром Минировичем, много говорили о разных вещах. Он был очень открыт и дружествен. Я помню, как в один из моих приездов мне надо было поехать на дачу с одним неприятным делом, и он сам предложил поехать со мной "на всякий случай". Я был тронут. Он был отличный специалист и очень хороший человек.

Сластников Александр Дмитриевич (к.ф.-м.н.; ведущий научный сотрудник ЦЭМИ РАН). С Владимиром Минировичем мы были знакомы достаточно давно, но более тесное общение у нас началось в начале 2000-х годов. Мой сын Сергей тогда оканчивал школу, и возник естественный вопрос: куда идти дальше? У него были склонности к математическим наукам, но не настолько ярко выраженные, чтобы поступать, например, на мехмат МГУ. И Владимир Минирович обратил наше внимание на МИЭМ, тогда еще живший своей, самостоятельной жизнью. При этом он посоветовал сначала поступить в вечернюю физико-математическую школу при МИЭМ. И не только посоветовал, ведь в эту школу надо было еще сдавать экзамен, но и раздобыл варианты заданий прошлых лет, на которых Сергей и тренировался целый месяц. А когда сын уже оканчивал МИЭМ, Владимир Минирович звал Сергея к себе в аспирантуру, но он выбрал несколько другое направление и другого руководителя. Учеба сына в аспирантуре пришлась на время, когда МИЭМ вошел в состав ВШЭ и существовавшие в нем диссертационные советы, на которые все ориентировались, поступая в аспирантуру, были закрыты на переформирование. Когда диссертация была готова, и надо было с ней определяться, Владимир Минирович участвовал в поисках места возможной защиты и оппонентов, хотя Сергей совсем не был его учеником. Несколько раз он устраивал Сергею "генеральные репетиции" защиты, стремясь довести его доклад до совершенства; сам выступал на его защите. Пересекаясь потом с Сергеем в ВШЭ, Владимир Минирович непременно интересовался его успехами и делами. Характерным для Владимира Минировича было желание помочь человеку в его работе, при этом он не просто помогал, но и чувствовал свою внутреннюю ответственность перед ним. Он был требовательным к научной деятельности себя самого и своих учеников, стремился максимально совершенствовать ее и в публикациях, и в выступлениях. Возможно, не будь этого, Владимир Минирович оставил бы после себя намного больше учеников и работ, но жизнь, к сожалению, распорядилась иначе. Светлая ему память.

Шелемех Елена Александровна (к.ф.-м.н.; научный сотрудник ЦЭМИ РАН). Впервые я увидела Владимира Минировича на его лекциях в МИЭМ, будучи студенткой экономико-математического факультета. Тогда студенты шутили, что одна его лекция вмещает целый курс, настолько насыщенными они были. Позже я поступила к Владимиру Минировичу в аспирантуру МИЭМ, факультет прикладной математики, и он рассказал мне о своем новом подходе к решению задачи расчета американского опциона на неполном рынке. Он всегда был в поиске способов решения возникающих задач и возможностей применения и расширения достигнутых результатов. Каждый разговор с ним обязательно содержал обсуждение его новых идей и планов. Так было и в последний наш разговор. Говоря о нерешенной проблеме, Владимир Минирович говорил: "Мы это победим!". Мне кажется, эта фраза во многом характеризовала и его отношение к жизни. Еще одной важной чертой Владимира Минировича была готовность всем помочь, даже отложив собственные дела и планы. Он всегда был очень занят, часто даже перегружен. Но, кажется, иначе и быть не могло. Знакомство с Владимиром Минировичем дало мне очень многое: введение в профессию, новые знания и умения, уверенность в поддержке, заряд бодрости и веры в себя. Когда я думаю о Владимире Минировиче, всегда представляю его деятельным, вдохновленным новыми идеями и планами. Для меня он всегда будет именно таким.

Смирнов Сергей Николаевич (д.ф.-м.н.; доцент ВМК МГУ; с 2004 г. по 2014 г. — заведующий кафедрой управления рисками и страхования факультета экономики ГУ-ВШЭ (с 2010 г. НИУ ВШЭ)) Не могу точно вспомнить, когда мы познакомились с Владимиром Минировичем. Могу только сказать, что до того, как мы впервые встретились, был уже знаком с его работами. У нас было близкое видение задачи хеджирования обусловленного обязательства по проданному опциону. Владимир Минирович — один из первых математиков, кто увидел теоретико-игровую природу этой задачи. Даже название его статьи (вместе с Чаловым) 2004 года "Европейский опцион — это антагонистическая игра" непосредственно об этом свидетельствует.

Более близко довелось общаться с Владимиром Минировичем уже по работе, в Высшей школе экономики. С 2004 года мне пришлось возглавить кафедру управления рисками и страхования, и вместе с Алексеем Геннадьевичем Шоломицким мы создали магистерскую программу "Управление рисками и актуарные методы". Поскольку мы использовали международные стандарты сертификации как финансовых риск-менеджеров, так и актуариев, получилась программа, опередившая лет на десять аналоги зарубежных коллег. Мы использовали то, что у этих сертификаций было большое пересечение — финансовая теория и, разумеется, математика. В результате наши выпускники получали уникальное на тот период времени образование, позволявшее им работать как риск-менеджерами, так и актуариями (и некоторым это пригодилось). Для качественного прочтения задуманных курсов были привлечены лучшие специалисты в нашей стране, и одним из них оказался Владимир Минирович, в это время уже активно работающий в области финансовой математики. Вряд ли можно было найти лучшую кандидатуру. Студентам нравились его лекции, не только благодаря его высокой квалификации, но и поскольку он сумел их расположить к себе чисто человеческими качествами. Он был непоколебимым оптимистом и всех заражал уверенностью в завтрашнем дне и в собственных силах.

На кафедре мы время от времени устраивали чаепития по каким-либо приятным поводам, таким, например, как дни рождения. Владимир Минирович неизменно участвовал в таких мероприятиях, всегда умел и пошутить, и найти доброе слово. Душой кафедры была секретарь — Ольга Борисовна Седова. Она вспоминает о беседах с Владимиром Минировичем — они говорили об истории, в которой он хорошо разбирался, рассказывали друг другу, что знали. Например, о Пушкине, как он танцевал на балах в знаменитом доме на Покровке 22, который называется "Трубецкие-комод", или просто комод (именно там произошла помолвка М. Н. Волконской и Н. И. Толстова, а в их браке родился Лев Николаевич Толстой). С Владимиром Минировичем было интересно — он запомнился как яркая личность, с широким кругом интересов и познаний. Пользуясь тем, что у Ольги Борисовны дар божий слагать стихи, попросил ее что-нибудь написать для этой статьи.

Седова Ольга Борисовна

Беседы о разном.

Начитан, тактичен, а круг интересов
Выходит за рамки финансовых рисков.
Мы с ним обсуждали Паскевич — повеса?
Герой в ратном деле иль в строчке из списков?

Апраксин, Волконский и дом на Покровке,
Сегодня известный как замок–комод.
От ВЫШки всего в одной остановке,
А раньше — балов и интриг хоровод.

Всего не расскажешь, да и не надо.
Меж строчек для лекций и семинаров
Живут разговоры о вечном. Досада,
Так рано настала пора мемуаров ...

Памяти Владимира Минировича Хаметова.

Как хорошо, что в жизни есть начало!
Конца, как такового, в жизни нет.
Есть в ней этапы, пункты, перевалы,
Есть время радости, печали и побед!

Есть все, чем дорожим и что весомо:
Наставничество, Помощь, Доброта,
Улыбка, Понимание и Слово,
Поддержка, что в учении нужна.

Все это Вы! Печалью голос рвется ...
Прощаться трудно, тяжело всегда,
Но счастье то, что с нами остаются
Ваш оптимизм, поступки и дела.

Список литературы

1. *Кульман Н. К., Хаметов В. М.* Оптимальная фильтрация в случае косвенного наблюдения диффузионного процесса с запаздывающим аргументом // Проблемы передачи информации, 1978, **14** (3), 55–64. https://www.mathnet.ru/rus/ppi1546

2. *Кульман Н. К., Хаметов В. М.* Уравнения нелинейной фильтрации семимартингала // Изв. вузов. Матем., 1979, 11, 80–84. https://www.mathnet.ru/rus/ivm5681

3. *Хаметов В. М., Яшин А. И.* Об эффективном решении задачи интерполяции по наблюдениям скачкообразных процессов // Проблемы передачи информации, 1983, **19** (2), 38–51. https://www.mathnet.ru/rus/ppi1175

4. *Хаметов В. М.* Некоторые вопросы нелинейной фильтрации случайных процессов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, МИЭМ, Москва, 1979, 153 стр.

5. *Кульман Н. К., Хаметов В.М.* Нелинейная фильтрация случайных процессов // МИЭМ, Москва, 1982, 80 стр.

6. *Хаметов В.М., Яшин А.И.* Скачкообразные случайные процессы // МИЭМ, Москва, 1984, 80 стр.

7. *Хаметов В. М.* О существовании и единственности решения уравнения нелинейной фильтрации скачкообразных процессов // Изв. вузов. Матем., 1987, 2, 78–82. https://www.mathnet.ru/rus/ivm7691

8. *Хаметов В. М.* Фильтрация, интерполяция, экстраполяция марковских цепей с непрерывным параметром // Автоматика и телемеханика, 1986, 8, 34–46. https://www.mathnet.ru/rus/at6407

9. *Хаметов В.М., Пиуновский А.Б.* Оптимальное управление скачкообразными случайными процессами // МИЭМ, Москва, 1984, 80 стр.

10. *Khametov V. M., Piynovskiy A. B.* New effective solution of optimality's equations // Problems of Control and Information Theory, 1985, **14** (4), 303–318.

11. *Aliseenko O. V., Piynovskiy A. B., Khametov V. M.* The optimal Control of stochastic sequences with delay // Problems of Control and Information Theory, 1986, **15** (1).

12. *Хаметов В. М.* Оптимальное управление с запаздыванием скачкообразными случайными процессами // Автоматика и телемеханика, 1990, 2, 75–86. https://www.mathnet.ru/rus/at5302

13. *Пиуновский А. Б., Хаметов В. М.* Новые точно решаемые примеры для управляемых цепей Маркова // Кибернетика, 1991, **3** (3), 82–90.

14. *Пиуновский А. Б., Хаметов В. М.* Оптимальное управление случайными последовательностями при ограничениях // Математические заметки, 1991, **49** (6), 143–145. https://www.mathnet.ru/rus/mzm2994, https://doi.org/10.1007/BF01156595

15. *Хаметов В. М.* Оптимальные стратегии управляемых в слабом смысле стохастических систем с полной информацией. Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н, Москва, 2001.

16. *Сиверцев О. Н., Хаметов В. М.* Задача восстановления функций // ОППМ, 2006, **13** (2), 354–356.

17. *Булгаков С. А., Хаметов В. М.* Восстановление квадратично интегрируемой функции по наблюдениям с Гауссовскими ошибками // Управление большими системами, 2015, **54**, 45–65. https://www.mathnet.ru/rus/ubs798

18. *Булгаков С. А., Хаметов В. М.* Оптимальное восстановление квадратично интегрируемой функции по наблюдениям за ней с гауссовскими ошибками // Автоматика и телемеханика, 2023, 2, 122–149. https://doi.org/10.31857/S0005231023020071

19. *Булгаков С. А., Горшкова В. М., Хаметов В. М.* Стохастическое восстановление квадратично интегрируемых функций // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки, 2020, 6, 4–22. https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-6-4-22

20. *Булгаков С. А., Хаметов В. М.* Моделирование оптимального и ε-оптимального алгоритмов восстановления квадратично интегрируемой функции по наблюдениям с гауссовскими ошибками // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2020, **20** (1), 57–69.

21. *Зверев О. В., Хаметов В. М.* Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (дискретное время) // ОППМ, 2011, **18** (1), 26–54.

22. *Зверев О. В., Хаметов В. М.* Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (дискретное время). II // ОППМ, 2011, **18** (2), 193–204.

23. *Хаметов В. М., Шелемех Е. А.* Суперхеджирование американских опционов на неполном рынке с дискретным временем и конечным горизонтом // Автоматика и телемеханика, 2015, 9, 125–149. https://www.mathnet.ru/rus/at14286, https://doi.org/10.1134/S0005117915090088

24. *Хаметов В. М., Шелемех Е. А.* Экстремальные меры и хеджирование американских опционов // Автоматика и телемеханика, 2016, 6, 121–144. https://www.mathnet.ru/rus/at14489, https://doi.org/10.1134/S0005117916060084

25. *Шелемех Е.А.* Расчет экзотических опционов на неполных рынках // Экономика и математические методы, 2017, **53** (3), 78–92. https://emm.jes.su/s042473880000540-3-1-ru-5/

26. *Каштанов В.А., Хаметов В.М.* Исследование операций // МИЭМ, Москва, 1990, 125 стр.

27. *Бояринцева Н. С.* Представления мартингалов и их применение к расчету опционов европейского типа. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 2005.

28. *Чалов Д. М.* Хеджирование финансовых обязательств на неполных рынках. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 2006.

29. *Сиверцев О. Н.* Алгоритм восстановления функций. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 2007.

30. *Зверев О. В.* Минимаксное хеджирование европейского опциона на неполном рынке. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 2018.

31. *Шелемех Е. А.* Минимаксный метод расчета экзотических и американских опционов на неполном рынке с конечным горизонтом (дискретное время). Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 2021.

32. *Фельмер Г., Шид А.* Введение в стохастические финансы. Дискретное время //МЦНМО, Москва, 2008, 496 стр.

33. *Föllmer H., Kabanov Y.* Optional decomposition and Lagrange multipliers // Finance and Stochastics, 1997, **2** (1), 69–81. https://doi.org/10.1007/s007800050033

34. *Хаметов В. М., Чалов Д. М.* Опциональное разложение локальных полумартингалов // ОППМ, 2002, **9** (3).

35. *Хаметов В. М., Чалов Д. М.* S-опциональное разложение (дискретное время) // Международная конференция "Колмогоров и современная математика", тезисы докладов, Москва, 2003, 660–661.

36. *Бояринцева Н. С., Хаметов В. М.* Новая теорема о представлении мартингалов. (Дискретное время) // Математические заметки, 2004, **75** (1), 40–54. https://doi.org/10.4213/mzm5

37. *Хаметов В. М., Чалов Д. М.* Европейский опцион — это антагонистическая игра // ОППМ, 2004, **11** (2), 264–265.

38. *Зверев О. В., Хаметов В. М., Шелемех Е. А.* Математическая модель ценообразования для европейскго опциона на неполном рынке без транзакционных издержек (дискретное время). Часть II. // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2020, **20** (2), 05–22. https://nano-journal.ru/20_2_Zverev.html

39. *Хаметов В. М., Чалов Д. М.* Критерий мартингальности мер // ОППМ, 2004, **11** (4), 953–955.

40. *Зверев О. В., Хаметов В. М.* Об условиях справедливости опционального разложения // ОППМ, 2009, **16** (6), 1067–1068.

41. *Шелемех Е.А.* Примеры суперхеджирования опционов на максимум цены рискового актива на неполном 1,S-рынке // Материалы научно-практической конференции "Молодая экономика: экономическая наука глазами молодых ученых", 7 декабря 2016 г., ЦЭМИ РАН, Москва, 2016, 40–42.

42. *Хаметов В.М., Шелемех Е.А.* О единственности опционального разложения полумартингалов // Математические заметки, 2019, **105** (3), 476–480. https://doi.org/10.4213/mzm12106

43. *Хаметов В.М., Шелемех Е.А.* О единственности суперхеджирующего портфеля // Вестник ЦЭМИ РАН, 2018, **1** (3). https://cemi.jes.su/s111111110000130-6-1/

44. *Хаметов В.М., Шелемех Е.А.* Верхняя и нижняя границы оптимальной остановки // Вестник ЦЭМИ РАН, 2018, **1** (2). https://cemi.jes.su/s111111110000129-4-1/

45. *Хаметов В. М., Шелемех Е. А.* Верхняя и нижняя границы оптимальной остановки случайной последовательности (конечный горизонт) // Автоматика и телемеханика, 2019, 3, 152–172. https://doi.org/10.1134/S0005231019030103

46. *Зверев О. В., Хаметов В. М., Шелемех Е. А.* Оптимальное правило остановки геометрического случайного блуждания со степенной функцией выигрыша // Автоматика и телемеханика, 2020, 7, 34–55. https://doi.org/10.31857/S000523102007003X

47. *Нестеренко А. А., Хаметов В. М.* Оптимальная остановка случайного блуждания с экспоненциальной функцией полезности // Труды Карельского научного центра Российской академии наук, 2021, 6, 49–58. http://dx.doi.org/10.17076/mat1295

48. *Хаметов В. М., Шелемех Е. А., Ясонов Е. В.* Алгоритм решения задачи об оптимальной остановке с конечным горизонтом // Управление большими системами, 2014, **52**, 6–22. https://www.mathnet.ru/rus/ubs784

49. *Нестеренко А. А., Хаметов В. М., Шелемех Е. А.* Об условиях существования экстремальных вероятностных мер на польских пространствах и некоторые их свойства // Математические заметки, 2021, **109** (3), 470–474. https://doi.org/10.4213/mzm12816

50. *Зверев О. В., Хаметов В. М., Шелемех Е. А.* Математическая модель ценообразования для европейского опциона на неполном рынке без транзакционных издержек (дискретное время). Часть I. // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2020, **20** (1), 5–45. https://nano-journal.ru/20_1_Zverev.html

51. *Biagini S., Frittelli M.* A unified framework for utility maximization problems: an Orlicz space approach // Annals of Applied Probability, 2008, **18** (3), 929–966. https://doi.org/10.1214/07-AAP469

52. *Rokhlin D. B.* Equivalent supermartingale densities and measures in discrete time infinite horizon market models // Theory Probab. Appl., **53** (4), 626–647. https://doi.org/10.1137/S0040585X97983869

53. *Васильев Г. А., Хаметов В. М., Шелемех Е. А.* Об условиях дискретности экстремальных вероятностных мер (конечномерный случай) // Математические заметки, 2013, **94** (6), 944–948. https://doi.org/10.4213/mzm10368

54. *Зверев О. В., Хаметов В. М.* Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на компактном (1,S)-рынке // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2011, **18** (1), 121–122.

55. *Зверев О. В., Хаметов В. М.* Квантильное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках без трения. Ч. 1. Суперхеджирование // Проблемы управления, 2014, 6, 31–44. https://www.mathnet.ru/rus/pu887

56. *Зверев О. В., Хаметов В. М.* Квантильное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках без трения. Ч. II. Минимаксное хеджирование // Проблемы управления, 2015, 1, 47–52. https://www.mathnet.ru/rus/pu898

57. *Богомолов Р. О., Хаметов В. М.* Биномиальная байесовская модель бескупонной облигации // Прикладная эконометрика, 2016, **42**, 100–120. http://pe.cemi.rssi.ru/pe_2016_42_100-120.pdf

58. *Богомолов Р.О.* Об одном методе прогнозирования стоимости бескупонной облигации// Молодая экономика: экономическая наука глазами молодых ученых. Материалы научно-практической конференции, ЦЭМИ РАН, Москва, 2015, 28–30.

IN MEMORIAM OF V. M. KHAMETOV: ON HIS CAREER, KEY RESULTS IN FINANCIAL MATHEMATICS AND MEMORIES OF COLLEAGUES

Bogomolov R.O., Zverev O.V., Shelemekh E.A.

Bogomolov R.O., rostik@cemi.rssi.ru
Zverev O.V., zv-oleg@yandex.ru
Shelemekh E.A., letis@mail.ru

Received 23.03.2024

The article is dedicated to memory of Doctor of Physics and Mathematics, Professor V.M. Khametov (18.11.1946 – 02.09.2023): the milestones of his career as a scientist and teacher are sketched, the scope of his scientific interests and the results obtained are briefly described. One of his main research interests in the last twenty years has been modeling of the value evolution for financial instruments. We present an overview of the most important results on this topic, the key role in obtaining which belongs to V.M. Khametov. In conclusion, the memoirs of his colleagues and followers are given.

Key words: V.M. Khametov, minimax model for option calculation, incomplete market, stochastic game, quantile hedging, the Bayesian bond model.