

УСТОЙЧИВЫЕ ДВУМЕРНЫЕ ТОРЫ В ЛОВУШКЕ ПЕННИНГА ПРИ КОМБИНИРОВАННОМ ЧАСТОТНОМ РЕЗОНАНСЕ

М.В. Карасев, Е.М. Новикова*

*Лаборатория математических методов естествознания,
Национальный исследовательский университет "Высшая школа экономики"*

karasev.mikhail@gmail.com, e.m.novikova@hse.ru

Поступила 03.11.2015

Исследуется планарная ловушка Пеннинга в резонансном режиме. Аксиальная симметрия системы нарушена отклонением магнитного поля от оси ловушки на малый угол (малый параметр в данной модели). Геометрия плоских электродов, а также напряжения на них, согласованы так, чтобы добиться комбинированного резонанса: как в главном, так и в субглавном гамильтонианах при разложении по малому параметру. В таком двойном резонансном режиме проведено двойное усреднение и найдены явные формулы для зависимости усредненного гамильтониана от управляющих параметров ловушки. После двойной редукции по первичной и вторичной алгебрам симметрий для редуцированного гамильтониана построен алгоритм и явные формулы для вычисления всех точек покоя, формулы для энергий, а также для гессианов в этих точках, причем, в явном виде, через исходные управляющие параметры ловушки. В исходном шестимерном фазовом пространстве устойчивым точкам покоя соответствуют устойчивые инвариантные двумерные торы, которые заматываются около-периодическими траекториями заряда, движущегося в ловушке.

УДК 517.955.8

Введение

Ловушки Пеннинга имеют давнюю историю [1-3, 12, 13] и находят все больше применений в физике как детекторы [4-8], искусственные «атомы» [9], как управляемые квантовые приборы, перспективные, например, для создания квантовых компьютеров [10, 11]. В последние годы возник большой интерес к планарным ловушкам [14-16].

* Работа выполнена при поддержке Научного Фонда НИУ ВШЭ по проекту 15-09-0291.

Заряд в такой ловушке движется в неоднородном электрическом поле, порожденном плоской системой электродов, и в однородном магнитном поле, направленном почти перпендикулярно данной плоскости. Происходит быстрое вращение вокруг направления магнитного поля, и этот «ларморов вихрь» прецессирует вблизи одного из двух центров равновесия (эти два центра зеркально симметричны относительно плоскости, в которой расположена система электродов; местоположение центров равновесия определяется экстремумами – седловыми точками – электрического потенциала).

Данная система вблизи центров равновесия имеет гиперболический тип, и частотный резонанс грозит в ней неустойчивостью; поэтому физики, обычно, резонансные случаи не рассматривают. С другой стороны, именно в случае частотного резонанса спектральные щели квантового гамильтониана ловушки становятся максимальными, что облегчает наблюдения и уменьшает влияние шума. Оказывается, что от проблемы неустойчивости при резонансе можно избавиться, немного изменив величину магнитного поля и отклонив его от направления перпендикуляра к плоскости на некоторый специально подобранный угол.

Основной резонанс гиперболического осциллятора Пеннинга (старшая часть гамильтониана вблизи центра равновесия) наступает при соотношении частот $2:(-1):2$. Ангармонические части гамильтониана после усреднения по траекториям старшей части оказываются элементами алгебры симметрий данного резонансного осциллятора. Первая проблема состоит в том, что эта алгебра имеет нелиевский тип, т.е. не может быть представлена как конечномерная алгебра Ли; ее естественные генераторы удовлетворяют нелинейным (квадратичным) соотношениям. Для данного типа алгебр необходимо разрабатывать и применять новые математические подходы. Причем, в данной системе, к основному резонансу подключается еще и вторичный резонанс, возникающий при отклонении направления магнитного поля; и появляется вторичная алгебра симметрий – тоже нелиевского типа.

Новый математический аппарат, необходимый для исследования таких систем, мало знаком как физикам, так и математикам. Мы здесь следуем нашим базовым результатам, касающимся исследования общих свойств нелиевских алгебр симметрий, возникающих при частотных резонансах [17], а также работам по различным резонансным моделям ловушек Пеннинга [18 – 21].

Рассматривается круговая конфигурация электродов в планарной ловушке: центральный диск + круговое кольцо вокруг него. В первом разделе данной статьи мы приводим подробное описание электрического потенциала седлового типа, который порождается такой системой электродов. Выписана асимптотика потенциала в предположении малости отношения $\delta = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ радиусов кольцевого электрода (это первый геометрический малый параметр, асимптотику по которому мы используем при исследовании свойств ловушки).

Далее вводится магнитное поле, и предполагается, что оно мало – на угол ε – отклоняется от оси ловушки (от перпендикуляра к плоскости электродов). Данный второй геометрический малый параметр ε согласовывается по масштабу с первым геометрическим малым параметром δ . Затем формулируется условие комбинированного резонанса между всеми физическими параметрами ловушки: геометрическими, электрическими и магнитными.

Это условие, заданное соотношениями (1.31), (1.32), представляет первый важный логический пункт данной статьи. Оно обеспечивает сразу два базовых (низших) резонанса между частотами как главного гамильтониана ловушки, так вспомогательного,

субглавного гамильтониана, возникающего за счет асимметричного отклонения магнитного поля от оси ловушки.

В следующих трех разделах мы следуем работам [19 – 21]. Показано как в рамках теории возмущений по малому параметру ε проводится алгебраическое усреднение возмущающих членов в режиме резонанса $2 : (-1) : 2$, который имеется в главной гармонической части гамильтониана. Указано выражение для усредненного гамильтониана через образующие нелиевской (квадратичной) алгебры симметрий. Продемонстрирована структура субглавного, поправочного гамильтониана, возникающего за счет отклонения магнитного поля от направления оси ловушки. При этом в субглавном гамильтониане опять возникает режим базового резонанса, а именно, резонанса $4 : (-2) : 1$. Построена его алгебра симметрий, имеющая квадратичные коммутационные соотношения. Затем выписано представление дважды усредненных ангармонических членов гамильтониана ловушки через образующие вторичной алгебры симметрий, причем, сразу в квантовой версии (в классической версии аналог этих формул был найден в [21]). Построенный редуцированный гамильтониан имеет вид, аналогичный $su(1,1)$ -волчку Эйлера, но только над алгеброй нелиевского типа.

Редуцированная модель оказывается трехмерной и ее динамика задается системой дифференциальных уравнений первого порядка с кубическими правыми частями. В пятом разделе, мы указываем алгоритм и выводим явные формулы для вычисления всех точек покоя этой системы и для исследования их на устойчивость. Получены формулы для энергий, отвечающих точкам покоя, а также гессианы гамильтониана в этих точках. В разделе 5.2 данные величины представлены в явной форме через исходные управляющие параметры ловушки; это второй новый результат статьи.

Обратим внимание на то, что точкам покоя редуцированной системы соответствуют в исходном шестимерном фазовом пространстве почти-инвариантные двумерные торы. Эти торы заматываются около-периодическими траекториями заряда, захваченного ловушкой. Устойчивость точек покоя редуцированной системы гарантирует устойчивость торов.

В квантовой версии ловушки Пеннинга, в рамках квазиклассического приближения, данным резонансным устойчивым торам можно сопоставить серии квантовых состояний. При отсутствии резонанса для этого применяется известная теория «комплексного роста» [22 – 24]. В резонансном случае применяется иная схема [25, 26]: вначале проводится квантовое усреднение и квантовая редукция системы в неприводимые представления алгебры симметрий, а затем, уже на симплектических листах алгебры симметрий используется общая техника асимптотического квантования.

Подчеркнем, что именно в силу резонансного характера инвариантных торов соседние уровни энергии в квазиклассических сериях отличаются друг от друга достаточно сильно [19], т.е. спектральные щели различимы на фоне шума настолько, чтобы рассматривать данные состояния в качестве потенциального кандидата для использования в квантовых устройствах, например, в квантовых компьютерах.

Интересно отметить, что квазиклассическим малым параметром в данной модели является безразмерное отношение $h = \left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^2$ магнитной длины ρ_0 , заданной напряженностью магнитного поля (1.16), и радиуса ρ_1 центрального кругового электрода ловушки. Квазиклассический режим $h \ll 1$ означает, что радиус центрального электрода должен быть гораздо больше (по крайней мере, в три раза больше) магнитной длины, т.е. минимального масштаба ларморовых вихрей в данной системе.

Если радиус центрального электрода выбрать слишком маленьким, сравнимым с магнитной длиной, то квазиклассический режим нарушается, и ловушка становится чисто квантовой. В этом случае точки покоя и соответствующие им геометрические торы в фазовом пространстве системы уже не будут аналитически (количественно) описывать квантовую систему, но, тем не менее, сам факт их существования будет говорить о наличии у нее требуемых спектральных свойств.

Дальнейшие подробности про сравнение классического и квантового режимов ловушки и про конкретные физические параметры данной модели см. в Приложении В.

1. Описание модели. Гамильтониан

В трехмерном пространстве будем исследовать движение электрона в квантовой ловушке, т.е. в такой суперпозиции электрического и магнитного полей, которая ограничивает движения электрона во всех направлениях. Вклад от спина электрона не учитываем. Опишем конфигурацию электромагнитного поля ловушки.

1.1. Электрический потенциал

В нашей модели электрическое поле создается расположенными в одной плоскости (будем считать, что это плоскость (q_1, q_2)) кольцевыми концентрическими электродами, к которым приложены постоянные потенциалы. Радиусы электродов и заданные на них значения потенциалов обозначим соответственно через ρ_j, V_j ($j = 1, 2$).

Таким образом, потенциал V электрического поля является решением следующей задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta V = 0, \\ V|_{q_3=0} = V_j, & \rho_{j-1} < r < \rho_j, \\ V|_{q_3 \rightarrow \infty} = 0, \\ V|_{r \rightarrow \infty} = 0. \end{cases}$$

Здесь приняты обозначения: $r = \sqrt{q_1^2 + q_2^2}$, $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial q_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial q_3^2}$, $\rho_0 = 0$.

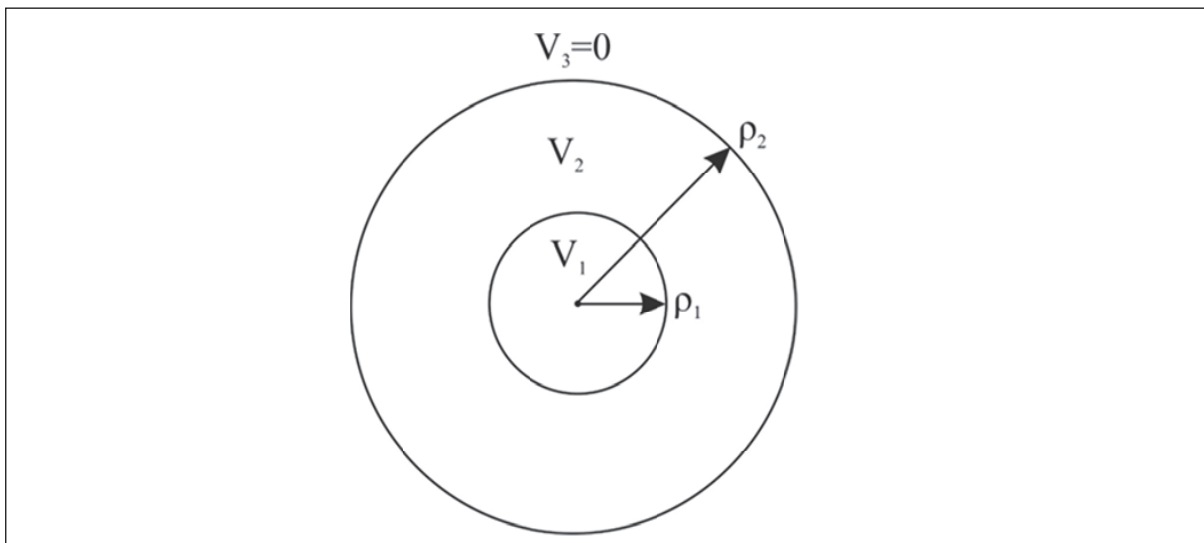


Рис. 1

Решение этой задачи можно записать в виде линейной комбинации

$$V(r, q_3) = \sum_{j=1}^2 V_j \Phi_j(r, q_3)$$

потенциалов Φ_j , не зависящих от V_j , а зависящих только от геометрии ловушки

$$\begin{cases} \Delta \Phi_j = 0, \\ \Phi_j|_{q_3=0} = \begin{cases} 0, & r < \rho_{j-1}, \\ 1, & \rho_{j-1} < r < \rho_j, \\ 0, & r > \rho_j, \end{cases} \\ \Phi_j|_{q_3 \rightarrow \infty} = 0, \\ \Phi_j|_{r \rightarrow \infty} = 0. \end{cases}$$

В полупространстве $q_3 \geq 0$ потенциалы Φ_j выражаются в виде интегралов от функций Бесселя:

$$\Phi_j(r, q_3) = \rho_j \int_0^\infty dk e^{-kq_3} J_1(k\rho_j) J_0(kr) - \rho_{j-1} \int_0^\infty dk e^{-kq_3} J_1(k\rho_{j-1}) J_0(kr).$$

Аналогично строится решение уравнения Лапласа при $q_3 \leq 0$.

1.2. Стационарная точка потенциала

Зафиксируем $q_3 = q_3^0$ и разложим потенциал V в степенной ряд в окрестности точки $(r, q_3) = (0, q_3^0)$. Получим

$$\begin{aligned} V(r, q_3) = & \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{\rho_1} (q_3 - q_3^0) + \frac{\alpha_2}{\rho_1^2} \left[(q_3 - q_3^0)^2 - \frac{1}{2} r^2 \right] + \frac{\alpha_3}{\rho_1^3} (q_3 - q_3^0) \left[(q_3 - q_3^0)^2 - \frac{3}{2} r^2 \right] + \\ & + \frac{\alpha_4}{\rho_1^4} \left[(q_3 - q_3^0)^4 - 3(q_3 - q_3^0)^2 r^2 + \frac{3}{8} r^4 \right] + \dots, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где коэффициенты α_j задаются формулами

$$\begin{aligned} \alpha_0 = & \sum_{j=1}^2 \Delta V_j \left(\frac{q_3^0}{(\rho_j^2 + (q_3^0)^2)^{1/2}} - 1 \right), \\ \alpha_1 = & \sum_{j=1}^2 \Delta V_j \frac{\rho_j \rho_j^2}{(\rho_j^2 + (q_3^0)^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

$$\alpha_2 = -\frac{3}{2} \sum_{j=1}^2 \Delta V_j \frac{\rho_1^2 \rho_j^2 q_3^0}{(\rho_j^2 + (q_3^0)^2)^{5/2}}, \quad (1.2)$$

$$\alpha_3 = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \Delta V_j \frac{\rho_1^3 \rho_j^2 (\rho_j^2 - 4(q_3^0)^2)}{(\rho_j^2 + (q_3^0)^2)^{7/2}},$$

$$\alpha_4 = \frac{5}{8} \sum_{j=1}^2 \Delta V_j \frac{\rho_1^4 \rho_j^2 q_3^0 (3\rho_j^2 - 4(q_3^0)^2)}{(\rho_j^2 + (q_3^0)^2)^{9/2}},$$

в которых через ΔV_j обозначена разность

$$\Delta V_j = V_{j+1} - V_j$$

(здесь $V_3 = 0$).

Для того, чтобы электрическое поле ограничивало движение электрона вдоль оси q_3 в окрестности точки $(r, q_3) = (0, q_3^0)$, должны выполняться следующие условия:

- градиент потенциала V в точке $(0, q_3^0)$ должен быть равен нулю

$$\alpha_1 = 0, \quad (1.3)$$

т.е. точка $(0, q_3^0)$ должна быть стационарной для потенциала V ;

- движения частицы вдоль оси q_3 около точки $(0, q_3^0)$ должны быть периодически-ми, т.е. точка $(0, q_3^0)$ должна быть эллиптической:

$$\alpha_2 < 0 \quad (1.4)$$

(здесь учтено, что заряд электрона отрицательный).

Уравнение (1.3) разрешимо при условии

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} < 1 - \frac{V_1}{V_2} < \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2, \quad (1.5)$$

и имеет два симметричных решения $\pm q_3^0$. Для определенности, выберем положительное решение:

$$q_3^0 = \rho_2 \left(\frac{\left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3} - \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^{2/3}}{\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^{4/3} - \left(1 - \frac{V_1}{V_2}\right)^{2/3}} \right)^{1/2}. \quad (1.6)$$

Подставив вычисленное значение (1.6) в формулу (1.2), увидим, что $\text{sgn } \alpha_2 = \text{sgn}(V_1 - V_2)$. Поэтому условие (1.4) равносильно неравенству $V_1 < V_2$ для потенциалов, приложенных к электродам.

1.3. Обезразмеривание и масштабирование

Обезразмерим координаты с помощью характерного масштаба ловушки:

$$\rho \stackrel{\text{def}}{=} \frac{r}{\rho_1}, \quad z = \frac{q_3}{\rho_1},$$

где ρ_1 – радиус внутреннего электрода. Такое же преобразование применим к координате q_3^0 стационарной точки потенциала V :

$$z^0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{q_3^0}{\rho_1}.$$

Рассмотрим подробнее разложение (1.1). Учтем условие (1.3). Тогда в окрестности стационарной точки разложение (1.1) для потенциала V может быть записано так:

$$V = \alpha_0 + \alpha_2 U^{[2]} + \alpha_3 U^{[3]} + \alpha_4 U^{[4]} + \dots, \quad (1.7)$$

где $U^{[j]}$ – однородные полиномы j -ой степени от ρ , z :

$$\begin{aligned} U^{[2]} &= (z - z^0)^2 - \frac{1}{2} \rho^2, \\ U^{[3]} &= (z - z^0) \left[(z - z^0)^2 - \frac{3}{2} \rho^2 \right], \\ U^{[4]} &= (z - z^0)^4 - 3(z - z^0)^2 \rho^2 + \frac{3}{8} \rho^4. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Формулы (1.2) для коэффициентов α_j переписываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= V_2 \left\{ \frac{\Delta \cdot z^0}{(1 + (z^0)^2)^{1/2}} - \frac{\delta \cdot z^0}{(1 + (\delta \cdot z^0)^2)^{1/2}} + 1 - \Delta \right\}, \\ \alpha_2 &= -\frac{3}{2} V_2 \left\{ \frac{\Delta \cdot z^0}{(1 + (z^0)^2)^{5/2}} - \frac{\delta^3 \cdot z^0}{(1 + (\delta \cdot z^0)^2)^{5/2}} \right\}, \\ \alpha_3 &= -\frac{1}{2} V_2 \left\{ \frac{\Delta \cdot (1 - 4(z^0)^2)}{(1 + (z^0)^2)^{7/2}} - \frac{\delta^3 \cdot (1 - 4(\delta \cdot z^0)^2)}{(1 + (\delta \cdot z^0)^2)^{7/2}} \right\}, \\ \alpha_4 &= \frac{5}{8} V_2 \left\{ \frac{\Delta \cdot z^0 (3 - 4(z^0)^2)}{(1 + (z^0)^2)^{9/2}} - \frac{\delta^5 \cdot z^0 (3 - 4(\delta \cdot z^0)^2)}{(1 + (\delta \cdot z^0)^2)^{9/2}} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь

$$z^0 = \frac{1}{\delta} \left(\frac{\Delta^{2/3} - \delta^{2/3}}{\delta^{-4/3} - \Delta^{2/3}} \right)^{1/2},$$

и введены новые обозначения:

$$\delta \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\rho_1}{\rho_2}, \quad \Delta \stackrel{\text{def}}{=} 1 - \frac{V_1}{V_2}. \quad (1.9)$$

Будем рассматривать случай, когда внешний радиус второго электрода много больше радиуса первого электрода, т.е.

$$\delta \ll 1. \quad (1.10)$$

Кроме того, предположим, что значения потенциалов, приложенных к электродам, связаны соотношением

$$V_1 \ll V_2.$$

В этом случае выполнено условие

$$\Delta \sim 1, \quad (1.11)$$

достаточное (в силу (1.5)) для существования стационарной точки потенциала.

В силу (1.10), (1.11), получим следующие асимптотики по геометрическому малому параметру δ :

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\frac{3}{2}V_2 \delta^{4/3} \Delta^{-1/3} \left(1 - \frac{1}{2}\delta^{2/3} \Delta^{-2/3} + O(\delta^{4/3})\right), \\ \alpha_3 &= 2V_2 \delta^{5/3} \Delta^{-2/3} \left(1 - \frac{5}{4}\delta^{2/3} \Delta^{-2/3} + O(\delta^{4/3})\right), \\ \alpha_4 &= -\frac{5}{2}V_2 \delta^2 \Delta^{-1} \left(1 - \frac{9}{4}\delta^{2/3} \Delta^{-2/3} + O(\delta^{4/3})\right), \\ z^0 &= \delta^{-1/3} \Delta^{1/3} \left(1 - \frac{1}{2}\delta^{2/3} \Delta^{-2/3} + O(\delta^{4/3})\right). \end{aligned} \quad (1.12)$$

Для простоты ниже мы выберем

$$V_1 = 0. \quad (1.13)$$

Тогда $\Delta = 1$.

Кроме того, в асимптотиках коэффициентов α с индексами 3 и 4 нам достаточно учесть только старшие члены. Тогда формулы (1.12) упрощаются:

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= -\frac{3}{2}V_2 \delta^{4/3} \left(1 - \frac{1}{2}\delta^{2/3} + O(\delta^{4/3})\right), \\ \alpha_3 &= 2V_2 \delta^{5/3} (1 + O(\delta^{2/3})), \\ \alpha_4 &= -\frac{5}{2}V_2 \delta^2 (1 + O(\delta^{2/3})), \\ z^0 &= \delta^{-1/3} \left(1 - \frac{1}{2}\delta^{2/3} + O(\delta^{4/3})\right). \end{aligned} \quad (1.14)$$

1.4. Магнитное поле

Предполагается, что магнитное поле \mathcal{B} ловушки однородно и отклоняется на малый угол ε от оси ловушки (от перпендикуляра к плоскости электродов). Величина

магнитного поля $|\mathcal{B}|$ выбирается достаточной, чтобы центростремительная лоренцева сила удерживала заряд и ограничивала его радиальные движения (вдоль плоскости электродов). Для определенности, выберем направление магнитного поля в сторону от стационарной точки электрического потенциала к плоскости электродов.

Введем калибровку напряжения, которая задается удельной энергией магнитного поля, удерживающего заряженную частицу в объеме ловушки:

$$V_0 = \frac{e|\mathcal{B}|^2 \rho_1^2}{mc^2}. \quad (1.15)$$

Здесь m и e - масса и величина заряда частицы, c - скорость света.

Введем также магнитную длину

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{\hbar c}{e|\mathcal{B}|}} \quad (1.16)$$

и определим эффективную постоянную Планка

$$\hbar = \left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^2. \quad (1.17)$$

Энергия частицы, захваченной ловушкой, задается оператором

$$eV_0 \cdot [(\hat{p} - \mathcal{A})^2 / 2 + u]. \quad (1.18)$$

Здесь эффективный потенциал u определен с учетом отрицательного знака заряда электрона следующим образом:

$$u = -V / V_0;$$

\mathcal{A} - эффективный магнитный потенциал, связанный с магнитным полем так:

$$(\nabla \times \mathcal{A}) = \mathcal{B} / |\mathcal{B}|, \quad (1.19)$$

а $\hat{p} = -i\hbar\nabla$ - это эффективный квантовый импульс, и операция $\nabla = (\nabla_x, \nabla_y, \nabla_z)$ берется в безразмерных координатах (x, y, z) .

Эффективное (безразмерное) магнитное поле задано единичным вектором $\mathcal{B} / |\mathcal{B}|$, который имеет три компоненты:

$$\mathcal{B} / |\mathcal{B}| = (\sin \varepsilon, 0, \cos \varepsilon)$$

в предположении, что x - координатная ось направлена вдоль проекции магнитного поля на плоскость электродов. Пренебрегая малыми членами по малому параметру ε , получим:

$$\mathcal{B} / |\mathcal{B}| = b + \varepsilon \tilde{b} + O(\varepsilon^3), \quad (1.20)$$

где $b = (0, 0, \omega)$, $\tilde{b} = (1, 0, 1/4)$ и

$$\omega = 1 - \varepsilon / 4 - \varepsilon^2 / 2 . \quad (1.21)$$

Формула (1.20) представляет эффективное магнитное поле в виде «главной части» b , направленной вдоль оси ловушки, и малого возмущения $\varepsilon \tilde{b}$, у которого осевая и продольная компоненты соотносятся как 1 : 4.

Векторный потенциал магнитного поля также разложим на главную часть и возмущение:

$$A = a + \varepsilon \tilde{a} + O(\varepsilon^3). \quad (1.22)$$

Здесь

$$a = \frac{\omega}{2}(-y, x, 0), \quad (1.23)$$

$$\tilde{a} = \frac{1}{8}(-y, x - 4(z - z^0), 4y). \quad (1.24)$$

1.5. Условие комбинированного резонанса

В гамильтониане ловушки (1.18) будем игнорировать константу α_0 / V_0 , которую доставляет нулевой член электрического потенциала из (1.7). Тогда гамильтониан представляется как некоторая старшая часть с возмущениями разных порядков по малым параметрам.

В энергетических единицах eV_0 старшая часть гамильтониана ловушки имеет квадратичный вид

$$H_0 = \frac{1}{2}(\hat{p} - a)^2 + \frac{\omega_0^2}{2} U^{[2]}(x, y, z), \quad (1.25)$$

где $U^{[2]}$ – квадратичный полином (1.8), а множитель перед ним, в силу (1.14), задается формулой

$$\omega_0^2 = 3 \frac{V_2}{V_0} \delta^{4/3} \left(1 - \frac{1}{2} \delta^{2/3} + O(\delta^{4/3})\right). \quad (1.26)$$

Величина ω_0 представляет частоту колебаний в осевом направлении (вдоль z – оси). Одновременно, в кинетической части гамильтониана (1.25) присутствует величина ω , которая представляет частоту вращения в продольной x, y – плоскости. Как известно [13], соотношение

$$\omega > \sqrt{2} \omega_0$$

гарантирует ловушечный режим (ограниченность траекторий частицы). Мы наложим на частоты более сильное резонансное условие

$$\omega = \frac{3}{2} \omega_0, \quad (1.27)$$

которое обеспечит не только ограниченность, но и периодичность траекторий.

Обратим внимание, что соотношение (1.27) задает первый (основной) резонанс $2:(-1):2$ в нормальной форме гамильтониана (1.18); но имеются и более высокие резонансы с аналогичной пропорцией $k:(-l):r$, в которой $k^2 + l^2 + r^2 = (k+l)^2$.

В силу представленных выше формул (1.21), (1.26) для частот ω и ω_0 условие резонанса (1.27) выглядит так:

$$\frac{4}{9}(1 - \varepsilon/4 - \varepsilon^2/2)^2 = 3 \frac{V_2}{V_0} \delta^{4/3} (1 - \frac{1}{2} \delta^{2/3} + O(\delta^{4/3})). \quad (1.28)$$

Напомним, что здесь $\delta = \frac{\rho_1}{\rho_2}$ – это отношение радиусов электродов (первый геометрический параметр), а ε – это угол отклонения магнитного поля от оси ловушки (второй геометрический параметр). Будем предполагать, что эти геометрические параметры по масштабу соотносятся между собой следующим образом:

$$\delta^{1/3} = k \varepsilon, \quad k \sim 1. \quad (1.29)$$

В этом случае условие (1.28) можно, с точностью $O(\varepsilon^3)$, представить так:

$$\frac{V_2}{V_0} = \varepsilon^{-4} \frac{4}{27k^4} \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon + \left(\frac{k^2}{2} - \frac{15}{16} \right) \varepsilon^2 \right). \quad (1.30)$$

Теперь, после того, как мы определились с порядками всех величин и асимптотическими оценками, можно удалить из этого соотношения искусственно введенный параметр $k = \delta^{1/3} / \varepsilon$. Тогда данное соотношение примет вид:

$$\frac{V_2}{V_0} = \frac{4}{27\delta^{4/3}} \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon + \frac{1}{2} (\delta^{2/3} - \frac{15}{8} \varepsilon^2) \right). \quad (1.31)$$

Это соотношение *комбинированного резонанса*, совместно с масштабирующим условием

$$\delta^{1/3} \sim \varepsilon, \quad (1.32)$$

связывает между собой потенциал V_2 кольцевого электрода ловушки, величину магнитного поля (определяющую напряжение V_0 (1.15)), угол ε отклонения магнитного поля от оси ловушки, и отношение радиусов электродов $\delta = \frac{\rho_1}{\rho_2}$.

Напомним, что потенциал V_1 внутреннего кругового электрода ловушки для простоты выбран нулевым (1.13).

При условии комбинированного резонанса (1.31), (1.32) эффективный потенциал u в гамильтониане (1.18) представляется в виде разложения по степеням малого параметра ε :

$$u = const + \frac{\omega_0^2}{2} U^{[2]} + \varepsilon \beta U^{[3]} + \varepsilon^2 \gamma U^{[4]} + O(\varepsilon^3), \quad (1.33)$$

где

$$\begin{aligned} const &= -\alpha_0 / V_0, \\ \omega_0 &= \frac{2}{3} \left(1 - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon^2}{2}\right), \\ \beta &= -\frac{8k}{27} + O(\varepsilon), \\ \gamma &= \frac{10k^2}{27}. \end{aligned} \quad (1.34)$$

Эффективный магнитный потенциал \mathcal{A} в гамильтониане (1.18) также разлагается по малому параметру ε , см. (1.22).

Наша цель теперь – это асимптотическое, с точностью до $O(\varepsilon^3)$, приведение гамильтониана ловушки Пеннинга к интегрируемому виду.

1.6. Эффективный гамильтониан

В единицах энергии eV_0 полный гамильтониан модели имеет вид

$$\hat{H} = \frac{1}{2} (\hat{p} - \mathcal{A})^2 + u, \quad \hat{p} = -i\hbar\nabla,$$

где \hbar – это эффективная постоянная Планка (1.17).

Подставим сюда разложение (1.33) для электрического потенциала в окрестности стационарной точки, а также магнитный потенциал, заданный в (1.22) – (1.24). Тогда эффективный гамильтониан, описывающий движение электрона в планарной квантовой ловушке Пеннинга, запишется в виде

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \varepsilon \hat{H}_1 + \varepsilon^2 \hat{H}_2 + O(\varepsilon^3), \quad (1.35)$$

где

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2} \left[\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2 - \frac{3}{2} \omega_0 (x\hat{p}_y - y\hat{p}_x) + \omega_0^2 (z - z^0)^2 + \frac{1}{16} \omega_0^2 (x^2 + y^2) \right], \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= \frac{1}{8} \left[y\hat{p}_x + (4(z - z^0) - x)\hat{p}_y - 4y\hat{p}_z - 3\omega_0 (z - z^0)x + \frac{3}{4} \omega_0 (x^2 + y^2) \right] + \\ &+ \beta (z - z^0) \left[(z - z^0)^2 - \frac{3}{2} (x^2 + y^2) \right], \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{128} \left[17y^2 + (x - 4(z - z^0))^2 \right] + \gamma \left[(z - z^0)^4 - 3(z - z^0)^2 (x^2 + y^2) + \frac{3}{8} (x^2 + y^2)^2 \right]. \quad (1.38)$$

1.7. Приведение гамильтониана \hat{H}_0 к нормальной форме

Главная часть \hat{H}_0 (1.36) гамильтониана (1.35) является квадратичной формой. С помощью линейной замены

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{2}{\omega_0}}(x_+ + x_-), & \hat{p}_x &= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0}{2}}(\hat{p}_+ + \hat{p}_-), \\ y &= \sqrt{\frac{2}{\omega_0}}(\hat{p}_+ - \hat{p}_-), & \hat{p}_y &= -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\omega_0}{2}}(x_+ - x_-), \\ z &= \frac{x_0}{\sqrt{\omega_0}} + z^0, & \hat{p}_z &= \sqrt{\omega_0} \hat{p}_0. \end{aligned}$$

ее можно привести к диагональному виду

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2} \omega_0 (2(\hat{p}_+^2 + x_+^2) - (\hat{p}_-^2 + x_-^2) + 2(\hat{p}_0^2 + x_0^2)) \quad (1.39)$$

(подробнее о приведении гамильтониана (1.36) к нормальной форме см. [17], раздел 2). К возмущающим гамильтонианам \hat{H}_1 (1.37) и \hat{H}_2 (1.38) также следует применить указанную замену.

1.8. Комплексная структура

Введем операторы комплексной структуры

$$\hat{\xi}_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j + i\hat{p}_j), \quad j \in \{+, -, 0\}, \quad (1.40)$$

и сопряженные к ним в $L^2(\mathbb{R}^3)$ операторы $\hat{\xi}_j^*$. Отметим, что

$$[\hat{\xi}_j, \hat{\xi}_k^*] = h\delta_{jk}, \quad j, k \in \{+, -, 0\}.$$

Главная часть \hat{H}_0 гамильтониана (1.35) выражается через $\hat{\xi}_j, \hat{\xi}_j^*$ так:

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2} \omega_0 (2\hat{\xi}_+^* \hat{\xi}_+ - \hat{\xi}_-^* \hat{\xi}_- + 2\hat{\xi}_0^* \hat{\xi}_0 + \frac{3h}{2}). \quad (1.41)$$

2. Первое усреднение гамильтониана \hat{H}

2.1. Алгебра симметрий и спектр оператора \hat{H}_0

Алгебра симметрий \hat{H}_0 с девятью образующими

$$\begin{aligned} \hat{S}_j &= \hat{\xi}_j^* \hat{\xi}_j \quad (j \in \{+, -\}), & \hat{S}_3 &= \hat{\xi}_0^* \hat{\xi}_0, \\ \hat{A}_\rho &= \hat{\xi}_+^* \hat{\xi}_0, & \hat{A}_\sigma &= \hat{\xi}_+^* (\hat{\xi}_-^*)^2, & \hat{A}_\theta &= (\hat{\xi}_-^*)^2 \hat{\xi}_0^*, \\ & & \hat{A}_\rho^* &, & \hat{A}_\sigma^* &, & \hat{A}_\theta^* &, \end{aligned} \quad (2.1)$$

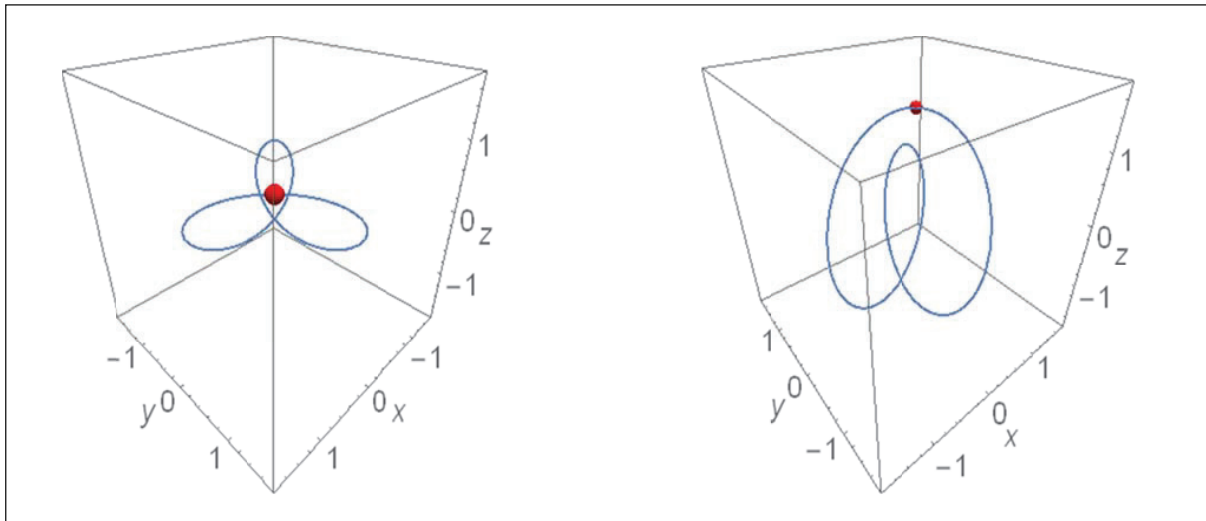


Рис. 2. Разные ракурсы одной из траекторий гамильтониана H_0 в исходных координатах x, y, z .

описана в работе [20]. Она задается следующими коммутационными соотношениями:

$$\begin{aligned}
 [\hat{S}_+, \hat{A}_\rho] &= h\hat{A}_\rho, & [\hat{S}_3, \hat{A}_\rho] &= -h\hat{A}_\rho, \\
 [\hat{S}_+, \hat{A}_\sigma] &= h\hat{A}_\sigma, & [\hat{S}_-, \hat{A}_\sigma] &= 2h\hat{A}_\sigma, \\
 [\hat{S}_-, \hat{A}_\theta] &= 2h\hat{A}_\theta, & [\hat{S}_3, \hat{A}_\theta] &= h\hat{A}_\theta, \\
 [\hat{A}_\rho, \hat{A}_\sigma^*] &= -h\hat{A}_\theta^*, & [\hat{A}_\rho, \hat{A}_\theta] &= h\hat{A}_\sigma, & [\hat{A}_\sigma, \hat{A}_\theta^*] &= -4h(\hat{S}_- + \frac{h}{2})\hat{A}_\rho, \\
 [\hat{A}_\rho^*, \hat{A}_\rho] &= h(\hat{S}_3 - \hat{S}_+), \\
 [\hat{A}_\sigma^*, \hat{A}_\sigma] &= h(4\hat{S}_+\hat{S}_- + \hat{S}_-^2 + 2h\hat{S}_+ + 3h\hat{S}_- + 2h^2), \\
 [\hat{A}_\theta^*, \hat{A}_\theta] &= h(\hat{S}_-^2 + 4\hat{S}_-\hat{S}_3 + 3h\hat{S}_- + 2h\hat{S}_3 + 2h^2).
 \end{aligned}$$

В той же статье [20] для этой алгебры приведены операторы Казимира:

$$2\hat{S}_+ - \hat{S}_- + 2\hat{S}_3, \quad \hat{A}_\rho\hat{A}_\rho^* - \hat{S}_+(\hat{S}_3 + h), \quad \hat{A}_\sigma\hat{A}_\sigma^* - \hat{S}_+\hat{S}_-(\hat{S}_- - h), \quad \hat{A}_\theta\hat{A}_\theta^* - \hat{S}_3\hat{S}_-(\hat{S}_- - h)$$

и квазиоператоры Казимира:

$$\hat{A}_\rho\hat{A}_\sigma^* - \hat{S}_+\hat{A}_\theta^*, \quad \hat{A}_\sigma\hat{A}_\theta^* - \hat{S}_-(\hat{S}_- - h)\hat{A}_\rho, \quad \hat{A}_\rho\hat{A}_\theta - (\hat{S}_3 + h)\hat{A}_\sigma.$$

Отметим, что спектр гамильтониана \hat{H}_0 (1.41) в $L^2(\mathbb{R}^3)$ состоит из чисел

$$\frac{h\omega_0}{2}\left(n + \frac{3}{2}\right), \quad \text{где } n \in \mathbb{Z}. \quad (2.2)$$

Собственное подпространство \hat{H}_0 , отвечающее n -ому собственному значению,

бесконечно вырождено. Это утверждение может быть получено алгебраическим путем – с использованием коммутационных соотношений между образующими алгебры симметрий \hat{H}_0 (см., например, [17]). А в данной работе в Приложении А мы выводим формулу для спектра \hat{H}_0 путем построения для \hat{H}_0 собственного базиса.

2.2 Схема квантового усреднения

Рассмотрим возмущенный гамильтониан \hat{H} (1.35) квантовой ловушки Пеннинга. Поскольку его старшая (по ε) часть \hat{H}_0 фактически является оператором типа "действие", то к \hat{H} можно применить процедуру квантового усреднения, т.е. с помощью некоторого унитарного преобразования "уничтожить" в возмущающей части \hat{H} члены, не коммутирующие со старшей частью \hat{H}_0 .

Приведем схему квантового усреднения:

$$U^{-1}\hat{H}U = \hat{H}_0 + \varepsilon\hat{H}_{10} + \varepsilon^2\hat{H}_{20} + O(\varepsilon^3),$$

где

$$[\hat{H}_0, \hat{H}_{10}] = [\hat{H}_0, \hat{H}_{20}] = 0.$$

Здесь усредненные гамильтонианы \hat{H}_{10} и \hat{H}_{20} и унитарный оператор U имеют вид

$$\hat{H} = \underline{\hat{H}}_1, \quad \hat{H}_{20} = \underline{\hat{H}}_2 + \frac{i}{\omega_0 h} [\hat{H}_1^\#, \hat{H}_1 + \underline{\hat{H}}_1], \quad U = \exp \left\{ -\frac{i\varepsilon}{h} (\hat{H}_1^\# + \varepsilon \hat{H}_2^\#) \right\},$$

где операции подчеркивания снизу $\underline{\dots}$ и решетка $\dots^\#$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} \underline{\hat{F}} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp \left\{ -\frac{2it}{h\omega_0} \hat{H}_0 \right\} \hat{F} \exp \left\{ \frac{2it}{h\omega_0} \hat{H}_0 \right\} dt, \\ \hat{F}^\# &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\pi - t) \exp \left\{ -\frac{2it}{h\omega_0} \hat{H}_0 \right\} \hat{F} \exp \left\{ \frac{2it}{h\omega_0} \hat{H}_0 \right\} dt. \end{aligned}$$

2.3 Усредненный гамильтониан

Поскольку усредненный гамильтониан $\hat{H}_{10} + \varepsilon\hat{H}_{20}$ коммутирует с гамильтонианом осциллятора \hat{H}_0 , то его можно выразить через образующие алгебры симметрий \hat{H}_0 .

Приведем явные формулы:

$$\hat{H}_{10} = \frac{1}{4} \left(2\hat{S}_+ + \hat{S}_- + \frac{3h}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{A}_\rho + \hat{A}_\rho^*), \quad (2.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{H}_{20} &= f_{++}\hat{S}_+^2 + f_{--}\hat{S}_-^2 + f_{33}\hat{S}_3^2 + f_{+-}\hat{S}_+\hat{S}_- + f_{3+}\hat{S}_3\hat{S}_+ + f_{3-}\hat{S}_3\hat{S}_- + \\ &+ f_+\hat{S}_+ + f_-\hat{S}_- + f_3\hat{S}_3 + g_\rho(\hat{A}_\rho + \hat{A}_\rho^*) + g_\sigma(\hat{A}_\sigma + \hat{A}_\sigma^*) + r. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 f_{++} = f_{--} &= \frac{6}{\omega_0^4} (\omega_0^2 \gamma - 3\beta^2) \approx -3k^2, \\
 f_{33} &= \frac{3}{4\omega_0^4} (2\omega_0^2 \gamma - 5\beta^2) \approx -\frac{5}{12} k^2, \\
 f_{+-} = -2f_{3+} = -2f_{3-} &= \frac{12}{\omega_0^4} (2\omega_0^2 \gamma - 7\beta^2) \approx -\frac{52}{3} k^2, \\
 f_+ &= \frac{3h}{\omega_0^4} (4\omega_0^2 \gamma - 13\beta^2) \approx -\frac{22}{3} hk^2, \\
 f_- &= -\frac{7}{12\omega_0} + \frac{3h}{\omega_0^4} (4\omega_0^2 \gamma - 13\beta^2) \approx -\frac{7}{8} - \frac{22}{3} hk^2, \\
 f_3 &= -\frac{5}{12\omega_0} - \frac{3h}{4\omega_0^4} (14\omega_0^2 \gamma - 51\beta^2) \approx -\frac{5}{8} + \frac{33}{4} hk^2, \\
 g_\rho &= \frac{1}{2\sqrt{2}\omega_0} \approx \frac{3}{4\sqrt{2}}, \\
 g_\sigma &= -\frac{4\beta}{\omega_0^{5/2}} \approx \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{3}} k, \\
 r &= -\frac{h}{2\omega_0} + \frac{h^2}{8\omega_0^4} (54\omega_0^2 \gamma - 179\beta^2) \approx -\frac{3}{4} h - \frac{311}{72} h^2 k^2,
 \end{aligned}$$

где k - это отношение геометрических параметров ловушки (1.29).

3. Вторичный резонанс и алгебра симметрий \hat{H}_{10}

Рассмотрим старшую часть \hat{H}_{10} усредненного гамильтониана.

3.1. Спектр гамильтониана \hat{H}_{10}

Отметим, что гамильтониан \hat{H}_{10} (2.3) можно записать в виде линейной комбинации

$$\hat{H}_{10} = \hat{A}_+ - \frac{1}{2} \hat{A}_- + \frac{1}{4} \hat{A}_0 + \frac{3h}{8} \quad (3.1)$$

следующих трех коммутирующих операторов:

$$\hat{A}_0 = \hat{S}_-, \quad \hat{A}_+ = \frac{1}{3} [2\hat{S}_+ + \hat{S}_3 - \sqrt{2}(\hat{A}_\rho + \hat{A}_\rho^*)], \quad \hat{A}_- = \frac{1}{3} [\hat{S}_+ + 2\hat{S}_3 + \sqrt{2}(\hat{A}_\rho + \hat{A}_\rho^*)]. \quad (3.2)$$

На n -ом собственном подпространстве \hat{H}_0 , где \hat{H}_0 принимает значение $\frac{h\omega_0}{2}(n + \frac{3}{2})$, эти операторы имеют общий ортонормированный собственный базис

$$\{\chi_{m_+, m_-}^n \mid m_+, m_- \in \mathbb{Z}_+, m_+ + m_- \geq \frac{n}{2}\},$$

определенный в Приложении А по формуле (А.1). На векторах χ_{m_+, m_-}^n операторы \hat{A}_0 , \hat{A}_\pm принимают значения

$$\hat{A}_0 \chi_{m_+, m_-}^n = h(2m_+ + 2m_- - n) \chi_{m_+, m_-}^n, \quad \hat{A}_\pm \chi_{m_+, m_-}^n = h m_\pm \chi_{m_+, m_-}^n.$$

Поэтому гамильтониан \hat{H}_{10} на векторах χ_{m_+, m_-}^n принимает значения

$$\frac{h}{4} \left(6m_+ - n + \frac{3}{2} \right), \quad m_+ \in \mathbb{Z}_+. \quad (3.3)$$

Каждое собственное значение (3.3) бесконечно вырождено. Здесь n нумерует собственные подпространства гамильтониана \hat{H}_0 .

3.2. Алгебра вторичного резонанса

Рассмотрим гамильтониан (3.1). Алгебра операторов, коммутирующих с гамильтонианами \hat{H}_0 и \hat{H}_{10} , задается образующими \hat{A}_0 , \hat{A}_+ , \hat{A}_- , определенными в (3.2), и операторами

$$\hat{B} = \sqrt{\frac{2}{3}} (\hat{A}_\sigma + \sqrt{2} \hat{A}_\theta), \quad \hat{B}^*. \quad (3.4)$$

Коммутационные соотношения между образующими (3.2), (3.4) имеют вид

$$\begin{aligned} [\hat{A}_0, \hat{A}_\pm] &= [\hat{A}_+, \hat{A}_-] = 0, \\ [\hat{A}_0, \hat{B}] &= 2h\hat{B}, \quad [\hat{A}_+, \hat{B}] = 0, \quad [\hat{A}_-, \hat{B}] = h\hat{B}, \\ [\hat{B}^*, \hat{B}] &= 2h(\hat{A}_0^2 + 4\hat{A}_0\hat{A}_- + 3h\hat{A}_0 + 2h\hat{A}_- + 2h^2), \end{aligned} \quad (3.5)$$

и плюс сопряженные соотношения.

В этой алгебре имеются следующие элементы Казимира:

$$\hat{M} = 2\hat{A}_+ - 2\hat{A}_- + \hat{A}_0, \quad \hat{C} = 2\hat{A}_+ + 2\hat{A}_- - \hat{A}_0, \quad \hat{K} = \hat{B}\hat{B}^* - 2\hat{A}_0(\hat{A}_0 - h)\hat{A}_-.$$

В реализации (3.2), (3.4) элементы Казимира имеют вид

$$\hat{M} = \frac{8}{3} \hat{H}_{10} - \frac{2}{3\omega_0} \hat{H}_0 - \frac{h}{2}, \quad \hat{C} = \frac{2}{\omega_0} \hat{H}_0 - \frac{3h}{2}, \quad \hat{K} = 0.$$

4. Второе усреднение гамильтониана

4.1. Схема второго квантового усреднения

Старшая часть \hat{H}_{10} усредненного гамильтониана $\hat{H}_{10} + \varepsilon \hat{H}_{20}$ фактически является оператором типа "действие". Поэтому к $\hat{H}_{10} + \varepsilon \hat{H}_{20}$ можно снова применить процедуру усреднения, описанную в разделе 2.2, т.е. с помощью некоторого унитарного оператора \tilde{U} привести этот гамильтониан к виду

$$\tilde{U}^{-1}(\hat{H}_{10} + \varepsilon \hat{H}_{20})\tilde{U} = \hat{H}_{10} + \varepsilon \hat{H}_{200} + O(\varepsilon^2), \quad \text{где} \quad [\hat{H}_{10}, \hat{H}_{200}] = 0.$$

Дважды усредненный гамильтониан вычисляется по формуле

$$\hat{H}_{200} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left\{-\frac{2it}{3h} \hat{H}_{10}\right\} \hat{H}_{20} \exp\left\{\frac{2it}{3h} \hat{H}_{10}\right\} dt. \quad (4.1)$$

Поскольку дважды усредненный гамильтониан \hat{H}_{200} коммутирует с гамильтонианами \hat{H}_0 и \hat{H}_{10} , то его можно записать в виде функции от образующих алгебры совместных симметрий \hat{H}_0 и \hat{H}_{10} .

4.2. Выражение дважды усредненного гамильтониана \hat{H}_{200} через образующие алгебры вторичного резонанса

Дважды усредненный гамильтониан \hat{H}_{200} является квадратичной функцией

$$\hat{H}_{200} = a_h \hat{A}_0^2 + b_h (\hat{S}_0, \hat{S}_1) \hat{A}_0 + c_h (\hat{S}_0, \hat{S}_1) - \frac{s}{2} (\hat{B} + \hat{B}^*)$$

от образующих (3.2), (3.4) алгебры (3.5) вторичного резонанса.

Здесь введены два коммутирующих оператора "действие" \hat{S}_0 и \hat{S}_1 с целочисленным спектром

$$\text{Spec } \hat{S}_0 = \{hn \mid n \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{Spec } \hat{S}_1 = \{hm \mid m \in \mathbb{Z}_+\}.$$

Они связаны с гамильтонианами \hat{H}_0 и \hat{H}_{10} по формулам:

$$\hat{H}_0 = \frac{\omega_0}{2} \left(\hat{S}_0 + \frac{3h}{2}\right), \quad \hat{H}_{10} = \frac{1}{4} \left(6\hat{S}_1 - \hat{S}_0 + \frac{3h}{2}\right).$$

Скалярные коэффициенты s , a_h и функции b_h , c_h задаются формулами

$$s = \frac{4\sqrt{2}\beta}{\sqrt{3}\omega_0^{5/2}} \approx -\frac{8}{3}k,$$

$$\begin{aligned}
a_h &= \frac{298\omega_0^2\gamma - 881\beta^2}{48\omega_0^4} \simeq -\frac{1289}{432}k^2, \\
b_h(S_0, S_1) &= \frac{1}{216\omega_0^4} [1260(2\omega_0^2\gamma - 7\beta^2)S_1 + 9(10\omega_0^2\gamma - 17\beta^2)S_0 - \\
&\quad - 360\omega_0^3 - 18\omega_0^2\gamma(13 - 152h) + 9\beta^2(85 - 956h)] \simeq \\
&\quad \simeq -\frac{1}{216} [1820k^2S_1 - 7k^2S_0 + 540 - 145k^2 + 1896hk^2], \quad (4.2) \\
c_h(S_0, S_1) &= \frac{1}{432\omega_0^4} [36(26\omega_0^2\gamma - 85\beta^2)S_1^2 - 72(2\omega_0^2\gamma - 7\beta^2)S_1S_0 + 9(10\omega_0^2\gamma - 17\beta^2)S_0^2 - \\
&\quad - 4(171\omega_0^3 - 18\omega_0^2\gamma(26 + 45h) + 9\beta^2(170 + 309h))S_1 + \\
&\quad + 2(18\omega_0^3 - 18\omega_0^2\gamma(13 - 8h) + 45\beta^2(17 - 4h))S_0 - \\
&\quad - 18h(36\omega_0^3 - 162h\omega_0^2\gamma + 537h\beta^2)] \simeq \\
&\quad \simeq \frac{1}{432} [-580k^2S_1^2 + 104k^2S_1S_0 + 7k^2S_0^2 - 2(513 + 580k^2 + 1122hk^2)S_1 + \\
&\quad + 2(27 + 145k^2 + 40hk^2)S_0 - 6h(162 + 311hk^2)],
\end{aligned}$$

где k - это отношение геометрических параметров ловушки (1.29).

4.3. Пуассонова алгебра вторичного резонанса

В квазиклассическом пределе ($\hbar \rightarrow 0$) резонансный гамильтониан \hat{H}_0 (1.41) переходит в функцию

$$H_0 = \frac{\omega_0}{2} (2|\xi_+|^2 - |\xi_-|^2 + 2|\xi_0|^2)$$

на фазовом пространстве \mathbb{R}^6 с комплексными координатами

$$\xi_j = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_j + ip_j), \quad j \in \{+, -, 0\}.$$

Пуассонова алгебра симметрий H_0 порождается функциями

$$S_j \quad (j \in \{+, -, 3\}), \quad A_\rho, \quad A_\sigma, \quad A_\theta, \quad \bar{A}_\rho, \quad \bar{A}_\sigma, \quad \bar{A}_\theta,$$

которые выражаются через комплексные координаты $\xi_j, \bar{\xi}_j$ по тем же формулам (2.1), которые были использованы в квантовой версии.

Усредненный гамильтониан \hat{H}_{10} (2.3) переходит в функцию

$$H_{10} = \frac{1}{4}(2S_+ + S_-) - \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\rho + \bar{A}_\rho).$$

Квантовая алгебра (3.5) вторичного резонанса с образующими (3.2), (3.4) переходит в пуассонову алгебру с образующими A_0 , A_+ , A_- , B и \bar{B} , которые определяются прежними формулами (3.2), (3.4) (в формулах (3.2), (3.4) следует просто заменить операторы функциями).

Пуассонова алгебра вторичного резонанса задается соотношениями

$$\begin{aligned} \{A_0, A_{\pm}\} &= \{A_+, A_-\} = 0, \\ \{A_0, B\} &= 2iB, \quad \{A_+, B\} = 0, \quad \{A_-, B\} = iB, \\ \{\bar{B}, B\} &= 2iA_0(A_0 + 4A_-). \end{aligned}$$

Симплектические листы определяются уравнениями

$$\begin{cases} \mathcal{Y}_1^2 + \mathcal{Y}_2^2 = A_0^2(A_0 + d), \\ 2A_- = A_0 + d, \\ A_+ = \frac{H_0}{3\omega_0} + \frac{2H_{10}}{3}, \end{cases} \quad (4.3)$$

в которых

$$\mathcal{Y}_1 = \frac{1}{2}(B + \bar{B}), \quad \mathcal{Y}_2 = \frac{1}{2i}(B - \bar{B})$$

- это вещественная и мнимая части образующей B , а параметр d связан с H_0 , H_{10} так:

$$d = \frac{4H_0}{3\omega_0} - \frac{4}{3}H_{10}.$$

В нашей реализации $d < \frac{2H_0}{\omega_0}$,

$$A_0 > 0, \quad A_0 \geq -d. \quad (4.4)$$

4.4. Дважды усредненный гамильтониан на симплектических листах

В квазиклассическом пределе дважды усредненный гамильтониан \hat{H}_{200} имеет вид $\hat{H}_{200} = s\mathcal{H}$, где

$$\mathcal{H}(A_0, \mathcal{Y}_1) = aA_0^2 + bA_0 + c - \mathcal{Y}_1 \quad (4.5)$$

$$a = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a_h}{s}, \quad b = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{b_h}{s}, \quad c = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c_h}{s},$$

а коэффициенты s , a_h , b_h , c_h определены в (4.2). Отметим, что $a \neq 0$.

5. Точки покоя дважды усредненного гамильтониана

Рассмотрим гамильтонову систему дважды усредненного гамильтониана \mathcal{H} (4.5):

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} A_0 = -2\mathcal{Y}_2, \\ \frac{d}{dt} \mathcal{Y}_1 = -2\mathcal{Y}_2(2aA_0 + b), \\ \frac{d}{dt} \mathcal{Y}_2 = 2(2aA_0 + b)\mathcal{Y}_1 - A_0(3A_0 + 2d) \end{cases} \quad (5.1)$$

и исследуем ее точки покоя, лежащие на каждом уровне

$$\mathcal{H}(A_0, \mathcal{Y}_1) = E.$$

Из (5.1) видно, что координаты точек покоя являются решениями системы уравнений

$$\begin{cases} \mathcal{Y}_2 = 0, \\ 2(2aA_0 + b)\mathcal{Y}_1 = A_0(3A_0 + 2d). \end{cases}$$

Из этой системы, с учетом (4.3), (4.4), получаем следующий алгоритм нахождения координат A_0 , \mathcal{Y}_1 , \mathcal{Y}_2 точек покоя.

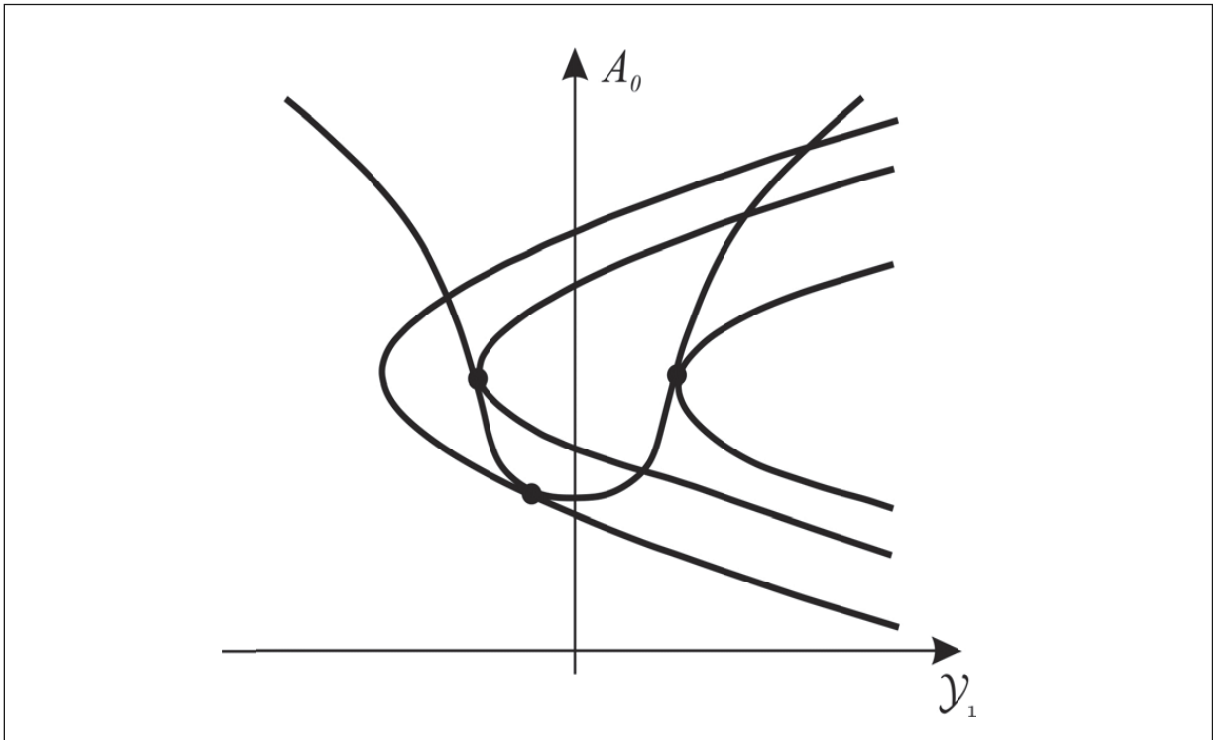


Рис. 3. Сечение симплектического листа (кривая с «усами» вверх) и трех изоэнергетических поверхностей гамильтониана \mathcal{H} плоскостью $\mathcal{Y}_2 = 0$ с возможными вариантами расположения точек покоя. Левая из точек – неустойчивая, а две другие – устойчивые.

1° Решить систему

$$\begin{cases} 2\kappa(2aA_0 + b)\sqrt{A_0 + d} = 3A_0 + 2d, \\ A_0 > 0, \quad A_0 \geq -d \end{cases} \quad (5.2)$$

относительно A_0 , $\kappa \in \{+1, -1\}$.

2° Подставить найденные A_0 , κ в формулу

$$\mathcal{Y}_1 = \kappa A_0 \sqrt{A_0 + d}.$$

3° Вычислить соответствующую энергию

$$E = \mathcal{H}(A_0, \mathcal{Y}_1). \quad (5.3)$$

5.1 Исследование устойчивости точек покоя

Пусть $\kappa \in \{+1, -1\}$. Введем обозначение:

$$F_{\kappa}(A_0) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial}{\partial A_0} (aA_0^2 + bA_0 + c - \kappa A_0 \sqrt{A_0 + d}). \quad (5.4)$$

В самой точке покоя мы имеем $\mathcal{Y}_2 = 0$. Поскольку вблизи этой точки значения величины \mathcal{Y}_2 на листе (4.3), т.е. на поверхности вращения

$$\mathcal{Y}_1^2 + \mathcal{Y}_2^2 = A_0^2 (A_0 + d), \quad (5.5)$$

не гладко выражаются через A_0, \mathcal{Y}_1 , то использовать набор A_0, \mathcal{Y}_1 в качестве координат вдоль листа (4.3) в окрестности точек покоя нельзя. Поэтому будем использовать набор координат A_0, \mathcal{Y}_2 , выразив через них значения \mathcal{Y}_1 в гамильтониане $\mathcal{H} = \mathcal{H}(A_0, \mathcal{Y}_1)$ с помощью уравнения (5.5). Матрица вторых производных тогда имеет вид

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial^2 (A_0, \mathcal{Y}_2)} \right) \Big|_{\text{в точке покоя}} = \begin{pmatrix} F'_{\kappa}(A_0) & 0 \\ 0 & \frac{\kappa}{A_0 \sqrt{A_0 + d}} \end{pmatrix} \Big|_{A_0, \kappa - \text{решение системы (5.2)}}.$$

Поскольку на листе $A_0 > 0$, то устойчивость точки покоя определяется знаком величины $\kappa F'_{\kappa}(A_0)$ в точке покоя:

- если $\kappa F'_{\kappa}(A_0) \Big|_{A_0, \kappa - \text{решение системы (5.2)}} > 0$, то точка покоя устойчивая;
- если $\kappa F'_{\kappa}(A_0) \Big|_{A_0, \kappa - \text{решение системы (5.2)}} < 0$, то точка покоя неустойчивая.

В терминах функции (5.4) уравнение (5.2) записывается в виде:

$$F_{\kappa}(A_0) = 0.$$

Введем новую переменную y по формуле:

$$\sqrt{A_0 + d} = \frac{y + \frac{1}{2}}{2\kappa a}, \quad \text{где} \quad \kappa a \left(y + \frac{1}{2}\right) \geq 0.$$

Тогда

$$A_0 = A_0(y) = \frac{1}{4a^2} \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 - d, \quad (5.6)$$

$$F_{\kappa}(A_0(y)) = \frac{y^3 + Py + Q}{a(2y+1)}, \quad \text{где} \quad \begin{cases} P \stackrel{\text{def}}{=} 2ab - 4a^2d - \frac{3}{4}, \\ Q \stackrel{\text{def}}{=} ab - \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Теперь, чтобы решить систему (5.2), следует найти все вещественные корни кубического уравнения

$$G(y) \stackrel{\text{def}}{=} y^3 + Py + Q = 0, \quad (5.7a)$$

удовлетворяющие неравенству

$$\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 > 2Q - P - \frac{1}{4}, \quad (5.7b)$$

и далее, для каждого корня y определить κ из неравенства

$$\kappa a \left(y + \frac{1}{2}\right) \geq 0. \quad (5.7c)$$

Поскольку при замене (5.6)

$$\kappa F'(A_0) \Big|_{A_0, \kappa - \text{решение системы (5.2)}} = \frac{4\kappa a(3y^2 + P)}{(2y+1)^2} \Big|_{y, \kappa - \text{решение системы (5.7a,b,c)}}$$

то устойчивость точки покоя, соответствующей решению y, κ системы (5.7a,b,c),

определяется знаком производной $G'(y) = 3y^2 + P$:

- если $\kappa a G'(y) \Big|_{y, \kappa - \text{решение системы (5.7a,b,c)}} > 0$, то точка покоя устойчивая,
- если $\kappa a G'(y) \Big|_{y, \kappa - \text{решение системы (5.7a,b,c)}} < 0$, то точка покоя неустойчивая.

5.2 Явные формулы для точек покоя. Зависимость количества и устойчивости точек покоя от параметров P , Q

Как известно, число вещественных корней кубической функции G зависит от знака дискриминанта

$$D = \left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{Q}{3}\right)^2.$$

В тех случаях, когда корней более одного, мы будем нумеровать их в порядке возрастания. Явные формулы для этих корней следующие.

- Если $P > 0$, то $y_1 = -2Rsh\frac{\varphi}{3}$, где $sh\varphi = \frac{Q}{2R^3}$.
- Если $P = 0$, то $y_1 = \sqrt[3]{-Q}$.
- Если $P < 0$, $D > 0$, то $y_1 = -2Rch\frac{\varphi}{3}$, где $ch\varphi = \frac{Q}{2R^3}$.
- Если $P < 0$, $D = 0$, то $y_1, y_2 \in \{-2k, k\}$, где $k = \sqrt[3]{\frac{Q}{2}}$.
- Если $P < 0$, $D < 0$, то $y_1, y_2, y_3 \in \{-2R \cos \frac{\varphi}{3}, -2R \cos(\frac{\varphi}{3} + \frac{2\pi}{3}), -2R \cos(\frac{\varphi}{3} + \frac{4\pi}{3})\}$,
где $\cos \varphi = \frac{Q}{2R^3}$.

Здесь $R = \operatorname{sgn}(Q)\sqrt{\frac{|P|}{3}}$.

Приведем результаты решения системы (5.7a,b,c) в зависимости от параметров P и Q уравнения (5.7a) и выводы об устойчивости соответствующих точек покоя системы (5.1).

Если $D > 0$, то кубическое уравнение (5.7a) имеет один вещественный корень y_1 . В случае $P > 2Q - \frac{1}{4}$ ему соответствует устойчивая точка покоя. А в случае $P \leq 2Q - \frac{1}{4}$ для y_1 не выполнено условие (5.7b); тогда система (5.1) не имеет точек покоя.

Если $D = 0$, $Q = 0$, то система (5.1) имеет одну точку покоя, соответствующую трехкратно вырожденному корню y_1 уравнения (5.7a).

Если $D = 0$, $Q < 0$, то при $Q \neq -\frac{1}{4}$ система (5.1) имеет две точки покоя: одна соответствует двукратно вырожденному корню y_1 , а другая – простому корню y_2 , причем последняя точка покоя устойчива.

При $Q = -\frac{1}{4}$ имеется только одна устойчивая точка покоя, отвечающая простому корню y_2 (а для вырожденного корня y_1 в случае $Q = -\frac{1}{4}$ нарушено условие (5.7b)).

Если $D = 0$, $Q > 0$, то уравнение (5.7a) имеет два вещественных корня: простой корень y_1 и двукратно вырожденный y_2 . В случае $0 < Q < \frac{1}{32}$ обоим корням соответствуют точки покоя системы (5.1), причем корню y_1 соответствует устойчивая точка покоя.

В случае $\frac{1}{32} \leq Q < \frac{1}{4}$ для корня y_1 не выполнено условие (5.7b), и точка покоя только одна – отвечающая корню y_2 . А в случае $Q \geq \frac{1}{4}$ точек покоя нет, т.к. условие (5.7b) нарушено и для y_1 и для y_2 .

Если $D < 0$, то уравнение (5.7a) имеет три различных вещественных корня: y_1 , y_2 , y_3 . При $P > 2Q - \frac{1}{4}$ им соответствуют три точки покоя системы (5.1): две устойчивые и одна неустойчивая (в случае $Q < -\frac{1}{4}$ неустойчивая точка покоя отвечает корню y_1 , а в случае $Q > -\frac{1}{4}$ – корню y_2).

При $-4Q^2 - \frac{1}{2} < P \leq 2Q - \frac{1}{4}$ и $Q < 0$, или при $Q = 0$ и $P \leq -\frac{1}{4}$, или при $-4Q^2 - \frac{1}{2} < P < -(2Q - \frac{1}{2})^2$ и $0 < Q < \frac{1}{4}$ и $D < 0$ существуют две точки покоя: одна устойчивая (она соответствует корню y_3) и одна неустойчивая (в случае $Q < -\frac{1}{4}$ она соответствует y_1 , а в случае $Q > -\frac{1}{4}$ – корню y_2).

Если $P \leq -4Q^2 - \frac{1}{2}$ и либо $Q < 0$, либо $Q > 0$ и $P \geq -\frac{3}{16}(1 + \sqrt{5 - 16Q})^2$, то система (5.1) имеет одну устойчивую точку покоя, соответствующую корню y_3 (а для y_1 и y_2 не выполнено условие (5.7b)).

В случае $-(2Q - \frac{1}{2})^2 \leq P \leq 2Q - \frac{1}{4}$, $Q > 0$, $D < 0$ и $P > -\frac{1}{4}$ имеется только одна неустойчивая точка покоя; она отвечает корню y_2 (а для y_1 и y_3 нарушено условие (5.7b)).

В случае $D < 0$, $Q > 0$ и $P < -\frac{3}{16}(1 + \sqrt{5 - 16Q})^2$ условие (5.7b) не выполнено ни для одного из корней y_1 , y_2 , y_3 уравнения (5.7a), и точек покоя не существует.

Приведенные здесь результаты систематизированы на рисунках 4–6.

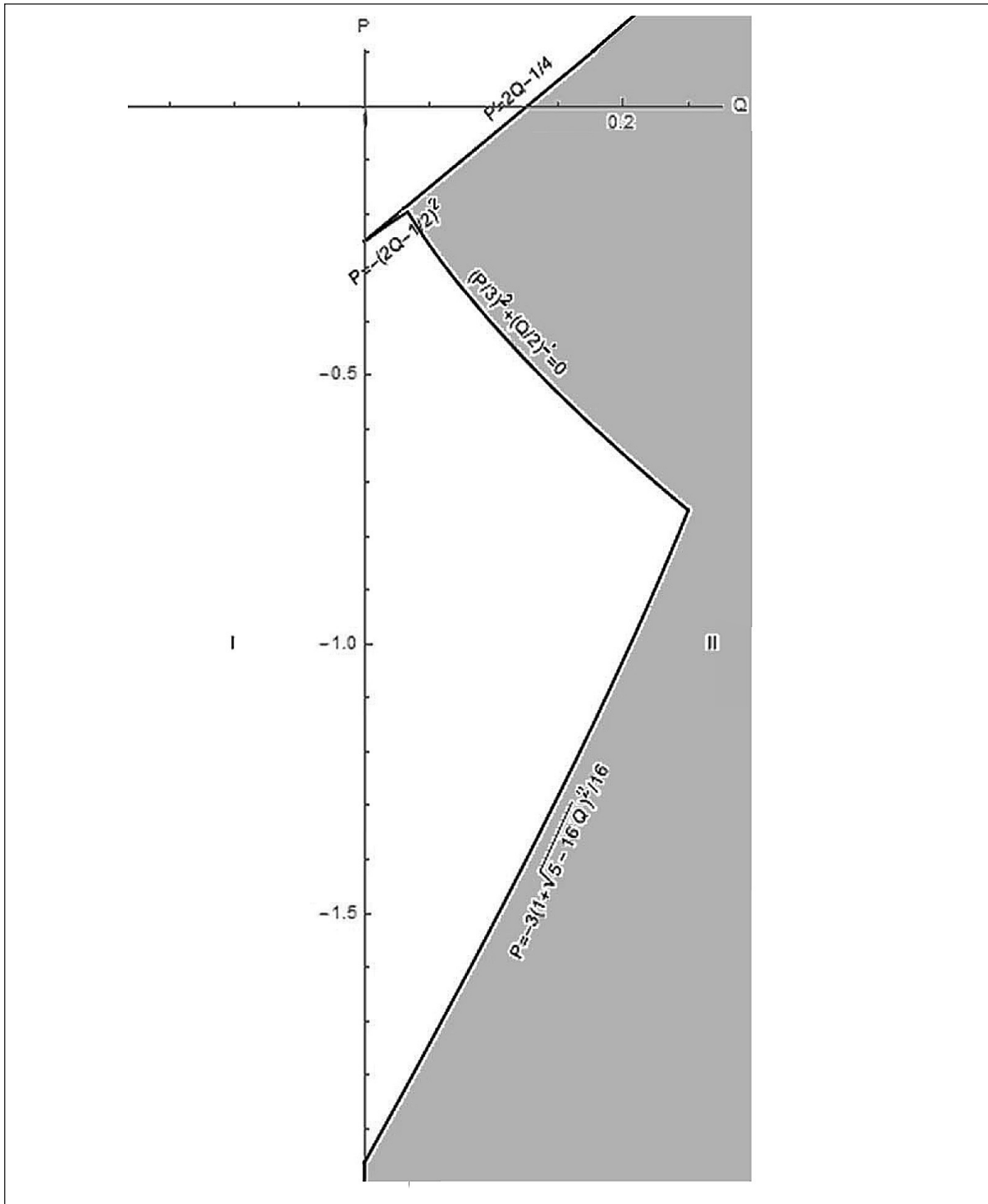


Рис. 4. Наличие хотя бы одной устойчивой точки покоя

На всех рисунках изображена плоскость (Q, P) . На рисунке 4 эта плоскость разбита на две области: в области I параметры P, Q уравнения (5.6а) принимают такие значения, которым соответствует хотя бы одна устойчивая точка покоя системы (5.1), а в области II система (5.1) не имеет устойчивых точек покоя. На рисунке 5 область I разбита на область Ia, в которой имеются две устойчивые точки покоя, и область Ib, где устойчивая точка покоя только одна. На рисунке 6 закрашены области, в которых есть (одна) неустойчивая точка покоя.

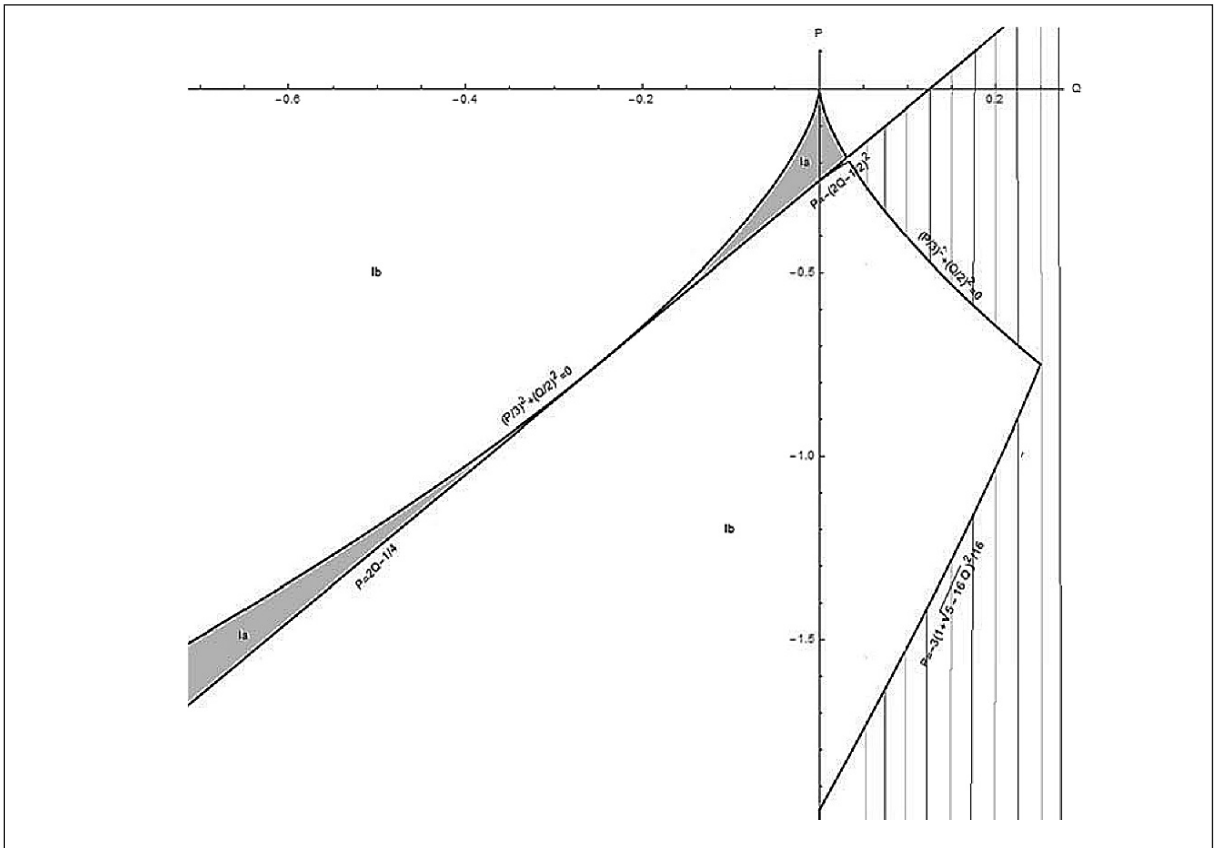


Рис. 5. Количество устойчивых точек покоя

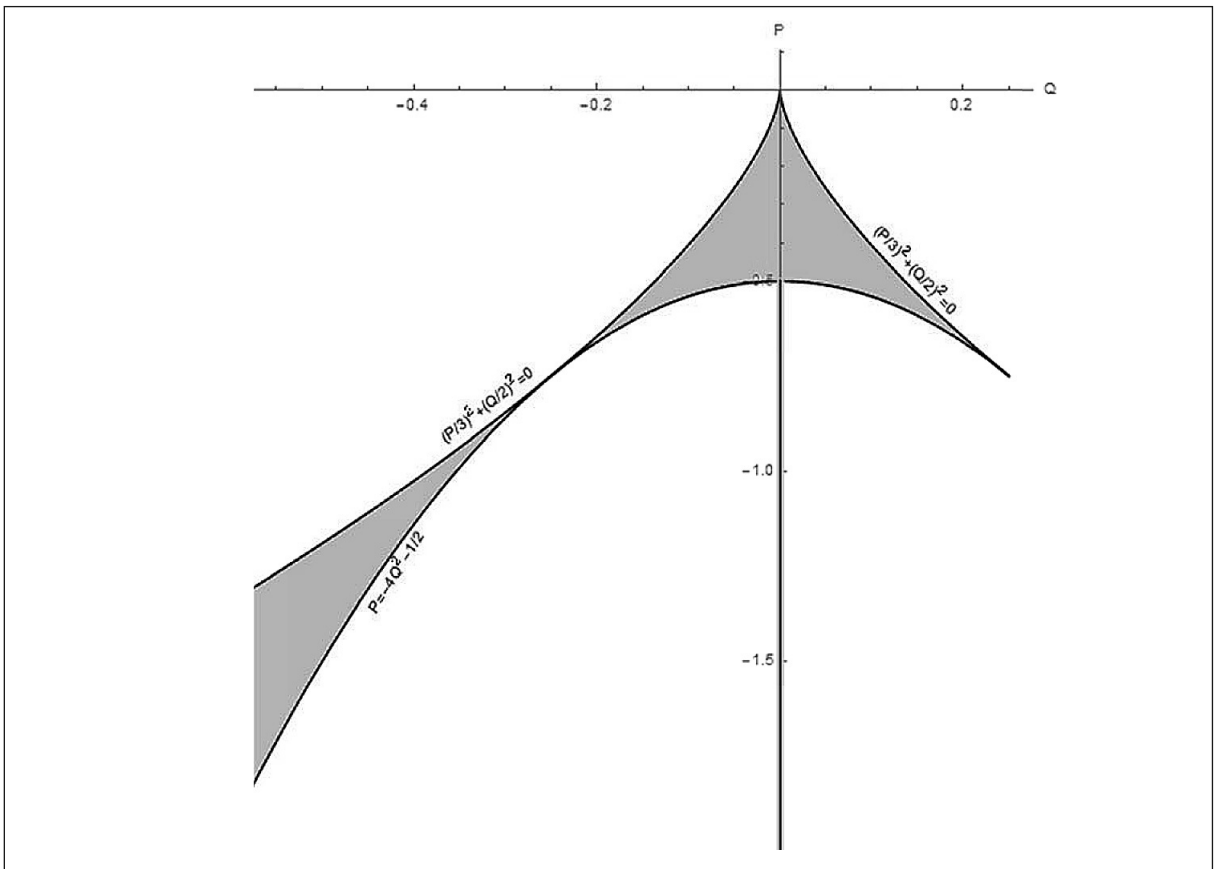


Рис. 6. Наличие неустойчивых точек покоя

Приложение А.

Собственный базис гамильтониана \hat{H}_0

В $L^2(\mathbb{R}^3)$ рассмотрим ортонормированный базис, состоящий из функций

$$\chi_{n_+, n_-, n_0}(x_+, x_-, x_0) \stackrel{\text{def}}{=} \left(\prod_{j \in \{+, -, 0\}} \frac{(\hat{\xi}_j^*)^{n_j}}{\sqrt{h^{n_j} n_j!}} \right) (\chi_{0,0,0}(x_+, x_-, x_0)), \quad n_+, n_-, n_0 \in \mathbb{Z}_+. \quad (\text{A.1})$$

Здесь $\hat{\xi}_j^*$ ($j \in \{+, -, 0\}$) – операторы, сопряженные к операторам (1.40), а

$$\chi_{0,0,0}(x_+, x_-, x_0) = \frac{1}{(\pi h)^{3/4}} e^{-\frac{x_+^2 + x_-^2 + x_0^2}{2h}}$$

"вакуумный" вектор. Он аннулируется всеми операторами (1.40):

$$\hat{\xi}_j \chi_{0,0,0} = 0.$$

Явная формула для векторов (A.1) имеет вид

$$\chi_{n_+, n_-, n_0}(x_+, x_-, x_0) = \prod_{j \in \{+, -, 0\}} \frac{1}{\sqrt{2^{n_j} n_j!}} H_{n_j} \left(\frac{x_j}{\sqrt{h}} \right) \chi_{0,0,0}(x_+, x_-, x_0),$$

где H_k – полиномы Эрмита

$$\begin{cases} H_{k+1}(y) = 2yH_k(y) - 2kH_{k-1}(y), \\ H_1(y) = 2y, \quad H_0(y) = 1. \end{cases}$$

Собственное подпространство \hat{H}_0 , отвечающее собственному значению (2.2), натянуто на векторы

$$\left\{ \chi_{n_+, 2(n_+ + n_0) - n_-, n_0} \mid n_+, n_0 \in \mathbb{Z}_+, n_+ + n_0 \geq \frac{n}{2} \right\}.$$

Удобно также ввести другой ортонормированный базис на n -ом собственном подпространстве \hat{H}_0 :

$$\begin{aligned} \chi_{m_+, m_-}^n(x_+, x_-, x_0) &= \frac{1}{\sqrt{2^{m_+ + m_-} h^{3m_+ + 3m_- - n} (2m_+ + 2m_- - n)! m_+! m_-!}} \cdot \\ &\cdot \left(\sqrt{\frac{4}{3}} \hat{\xi}_+^* - \sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\xi}_0^* \right)^{m_+} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \hat{\xi}_+^* + \sqrt{\frac{4}{3}} \hat{\xi}_0^* \right)^{m_-} (\hat{\xi}_-^*)^{2m_+ + 2m_- - n} (\chi_{0,0,0}(x_+, x_-, x_0)), \end{aligned}$$

где $m_+, m_- \in \mathbb{Z}_+$, $m_+ + m_- \geq \frac{n}{2}$.

Этот базис является собственным и для усредненного гамильтониана \hat{H}_{10} (3.1).

Приложение В.

Квантование из-за резонансного нарушения симметрии

(М.В. Карасев)

В классической механике значения интегралов движения, например, энергии, могут варьироваться непрерывно. Но, с другой стороны, всякая классическая механическая модель является только лишь упрощенной предельной версией более полной и точной квантовой модели. А в квантовом случае значения интегралов движения могут оказаться дискретными – это собственные значения соответствующих квантовомеханических операторов, например, оператора энергии. Правда, расстояния между ближайшими собственными значениями (спектральные щели) в уточненной квантовой модели будут чрезвычайно малы и просто неразличимыми в том приближении, в котором классическая механика изучает систему. Можно сказать и иначе: чистые квантовые состояния в такого типа системе будут сразу разрушаться под действием пренебрежимо малых (в масштабах классической механики) возмущений, шумов.

Сознательно соглашаясь или поневоле имея дело с размытой точностью описания системы, мы и применяем классическую механическую модель, заданную гамильтоновой динамикой в фазовом пространстве с некоторой геометрией или супергеометрией, а не уточненную квантовую операторную модель над некоторой некоммутативной алгеброй. В квантовом расширении модели просто нет необходимости, когда оно дает избыточную информацию, например, о наличии спектральных щелей, которые в эксперименте, на опыте нам не видны (не нужны), или информацию, которую по тем или иным причинам мы не можем осмыслить.

И наоборот, когда физики имеют дело с заведомо квантовыми системами, то в их базовых моделях вообще отсутствует геометрия и какая-либо классическая динамика. Остается только алгебра. Эта ситуация обычна для систем с характерными масштабами, начиная с атомарных, субнано масштабов и ниже (здесь нужно оговориться, что речь идет об описании динамики отдельных частиц, а не о коллективных процессах, в которых граница проявления квантовых свойств может смещаться даже и в макромасштабы).

Правда, и в квантовом случае, зачастую, можно говорить о «квазиклассическом» приближении, когда классическую геометрию и механику используют как средство для приближенного описания системы по некоторому малому параметру (или нескольким параметрам). Фольклор связывает этот параметр с постоянной Планка, но, конечно, настоящие квазиклассические параметры всегда безразмерны; обычно, это отношения характерных масштабов длин, энергий, величин полей.

Такие квазиклассические системы, где геометрия и гамильтонова динамика могут применяться для моделирования квантовых свойств, как правило, располагаются в диапазоне нано или субмикроскопических масштабов. А вот уже в диапазоне микрометровых и, тем более, миллиметровых масштабов «квантованность» системы обычно размывается и перестает наблюдаться или быть существенной.

И здесь возможен интересный эффект. Допустим, в пограничном микромасштабном диапазоне имеется некоторая система, которая на рассматриваемом интервале энергий выглядит для наблюдателя как классическая. То есть энергетические спектральные щели в ней настолько малы, что не различаются или почти не различаются на фоне естественных возмущений (шумов), а длина волны излучения при переходе между энергетическими уровнями слишком велика и не влияет на систему и ее окру-

жение в данном диапазоне масштабов. Для описания системы достаточна классическая механика.

А теперь мы производим небольшую деформацию геометрии системы. И после этого система становится квантовой, с достаточно хорошо различаемыми энергетическими щелями.

Таким образом, наблюдатель вначале имеет классическую систему с определенной геометрией и что-то в ней отклоняет, нарушая симметрию, например, деформирует скобки Пуассона или внешнее поле, метрику, конфигурацию. При этом масштабы всех физических величин вообще не затрагиваются. Но оказывается, что в результате такого малого изменения геометрии теряется возможность рассматривать систему как классическую и описывать ее только в рамках гамильтоновой механики.

Значения некоторых интегралов движения, например, энергии частицы, до акта деформации могли варьироваться непрерывно, а после нарушения симметрии системы эти интегралы движения становятся квантовыми, т.е. имеют вполне различимый дискретный набор возможных значений с запрещенными интервалами (щелями) между ними.

С точки зрения классической механики такое изменение характера системы может рассматриваться как «квантовая катастрофа». А с точки зрения квантовой математики, в частности, квантовой информатики, этот эффект означает возможность существования систем с квантовым поведением индивидуальных частиц на нижней границе с классикой, где еще работает геометрия, и применимо обычное механическое конструирование. Такая квантовая система допускает управление с помощью настройки вполне классических параметров, определяющих ее конфигурацию.

Пример возникновения обсуждаемого эффекта – "внезапного" перехода системы из разряда классических в разряд квантовых – дает микромасштабная ловушка Пеннинга. В данном примере упомянутое выше малое изменение геометрии – это отклонение однородного магнитного поля от направления оси ловушки [20, 21]. Таким образом, речь идет о нарушении симметрии или, что эквивалентно, о малой деформации скобок Пуассона между компонентами импульса частицы.

Механизм, отвечающий за возникновение эффекта в ловушке Пеннинга – это частотный резонанс. Причем, необходим двойной (комбинированный) резонанс, который достигается настройкой искусственно созданного возмущения. С позиций гамильтоновой механики такой механизм внесенного извне резонансного возмущения позволяет получить дополнительные интегралы движения и достичь (приблизительно по параметру возмущения) некоммутативной интегрируемости системы [20, 21]. С позиций квантовой механики частотный резонанс обеспечивает увеличение спектральных щелей, связанное с сильным вырождением спектра за счет появления некоммутативной алгебры симметрий [19, 20].

Таким образом, искусственная деформация геометрии ловушки Пеннинга нарушает ее исходную (коммутативную) симметрию, но, одновременно, за счет созданного комбинированного резонанса порождает новую (некоммутативную) симметрию, тем самым, обеспечивая вырождение главной части спектра и возникновение кластеров с четко различимыми энергетическими уровнями.

В данном Приложении мы рассмотрим простейшую планарную ловушку Пеннинга, чья модель математически изучается в основном тексте статьи. Будут указаны конкретные значения физических параметров ловушки и очерчены границы, в которых возможен обсуждаемый эффект квантования за счет резонансного нарушения классической симметрии.

Планарная ловушка представляет собой плоский кольцевой электрод с внутренним радиусом ρ_1 и внешним радиусом ρ_2 , на который подается напряжение V_2 (остальная часть плоскости, в которой расположен электрод, заземлена), и еще в системе присутствует однородное магнитное поле \mathcal{B} . Обычно, оно выбирается направленным вдоль оси ловушки, т.е. вдоль перпендикуляра к плоскости электрода [14 – 16]. Однако, мы будем считать, что магнитное поле отклонено на малый угол ε от оси ловушки. При этом предполагается выполненным следующее масштабное соотношение между порядком малости угла отклонения и отношением радиусов кольцевого электрода:

$$(\rho_1 / \rho_2)^{1/3} \sim \varepsilon . \quad (\text{B.1})$$

Частица, которая помещается в ловушку, это электрон с зарядом e и массой m . Спин не учитываем.

Поле \mathcal{B} задает магнитную длину (1.16) и определяет квазиклассический параметр (1.17) в данной системе:

$$\rho_0 = \sqrt{\frac{\hbar c}{e|\mathcal{B}|}} , \quad h = \left(\frac{\rho_0}{\rho_1}\right)^2 . \quad (\text{B.2})$$

Здесь \hbar – это постоянная Планка, а c – скорость света.

Кроме того, с магнитным полем связывается характерный масштаб энергий E_0 в данной системе

$$E_0 = \frac{\mu|\mathcal{B}|}{h} , \quad \mu = \frac{e\hbar}{mc} . \quad (\text{B.3})$$

Под этот масштаб подстраивается выбор электрического напряжения V_2 на кольцевом электроде:

$$eV_2 \sim E_0 . \quad (\text{B.4})$$

Внутри и вне кольца, т.е. на остальной части плоскости, поддерживается потенциал $V_1 = 0$. Таким образом, на плоскости возникает потенциальный колодец радиуса ρ_1 , а над плоскостью, на оси ловушки, на расстоянии ρ_1 / ε , появляется седловая точка электрического потенциала (и симметричная ей точка с другой стороны плоскости).

Если координаты электрона измеряются в ρ_1 -единицах, а его энергия измеряется в E_0 -единицах, то квантовый гамильтониан электрона в данной системе задается оператором

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p} - \mathcal{A})^2 + u \quad , \quad \hat{p} = -i\hbar\nabla . \quad (\text{B.5})$$

Здесь вектор-потенциал \mathcal{A} определяется формулой (1.22), а скалярный потенциал u имеет вид

$$u = \text{const} + u^{[2]} + \varepsilon u^{[3]} + \varepsilon^2 u^{[4]} + O(\varepsilon^3) , \quad (\text{B.6})$$

где функции $u^{[j]}$ вблизи седловой точки определяются гармоническими полиномами j -ой степени однородности (1.8), (1.33).

Оператор (В.5) представляется рядом по степеням параметра ε , малость которого характеризует нарушение аксиальной симметрии системы:

$$\hat{H} = const + \hat{H}_0 + \varepsilon \hat{H}_1 + \varepsilon^2 \hat{H}_2 + O(\varepsilon^3) . \quad (\text{В.7})$$

Здесь главная часть \hat{H}_0 задает гамильтониан «идеальной» ловушки Пеннинга с квадратичным электрическим потенциалом и магнитным полем, направленным вдоль седловой оси этого потенциала.

Величина спектральных щелей $\Delta\lambda$ у оператора (В.7) сильно зависит от того вырождены или нет его собственные значения. В общем положении спектр не вырожден и величина $\Delta\lambda$ может быть оценена, исходя из известной асимптотической формулы Г. Вейля для числа $N(\lambda_1, \lambda_2)$ собственных значений, лежащих в интервале (λ_1, λ_2) :

$$N(\lambda_1, \lambda_2) \sim \frac{1}{(2\pi\hbar)^3} Vol\{\lambda_1 < H < \lambda_2\} . \quad (\text{В.8})$$

Эта формула дает, в общем положении, следующую оценку $\Delta\lambda$ по малому квазиклассическому параметру:

$$\Delta\lambda \sim h^3 . \quad (\text{В.9})$$

Посмотрим к чему это приводит в реальных физических единицах. Фиксируем величину магнитного поля

$$|\mathcal{B}| \sim 1 \text{ T} \quad \Rightarrow \quad \rho_0 \sim 30 \text{ нм} . \quad (\text{В.10})$$

Рассмотрим ловушку микрометрового масштаба

$$\rho_1 \sim 300\rho_0 \sim 10 \text{ мкм} \quad \Rightarrow \quad h \sim 10^{-5} . \quad (\text{В.11})$$

Поскольку в (В.3) $\mu \sim 10^{-4} \text{ эв/T}$, то при магнитном поле величины (В.10) получим следующий характерный масштаб энергии:

$$E_0 \sim 10 \text{ эв} . \quad (\text{В.12})$$

Энергетические щели ловушки задаются величиной $\Delta E = E_0 \cdot \Delta\lambda$, которая с учетом оценки (В.9) имеет следующий порядок:

$$\Delta E \sim 10^{-14} \text{ эв} . \quad (\text{В.13})$$

Данная величина энергии слишком мала для наблюдений. Соответствующая длина волн, излучаемых при переходе с уровня на уровень в такой системе, будет

$$\Delta l = \frac{2\pi\hbar c}{\Delta E} \sim \frac{10^{-6} \text{ эв} \cdot \text{м}}{\Delta E} \sim 10^8 \text{ м} .$$

Эта длина на одиннадцать порядков превосходит характерный масштаб нашей системы и должна рассматриваться как «бесконечно большая». Таким образом, система является вполне классической и ее квантовый характер неразличим.

Данный вывод основан на предположении о невырожденности спектра оператора (В.7). Это, действительно, имеет место при отсутствии резонанса нормальных частот квадратичного гамильтониана H_0 . В такой нерезонансной ситуации система будет стабильно классической даже при введении в нее возмущений. А вот при резонансе нор-

мальных частот, в главной части спектра будет иметь место сильное (бесконечное) вырождение, и спектральные щели будут чувствительны к возмущениям.

Рассмотрим случай, когда все три частоты H_0 находятся в резонансе (в основном тексте статьи это резонанс 2:(-1):2). Тогда спектральные щели у оператора \hat{H}_0 имеют порядок не h^3 , а только лишь h .

Однако, в (В.7) присутствуют еще и возмущающие члены. При условии резонанса в главной части эти члены усредняются как в разделе 2, и усредненные возмущающие добавки, после редукции на приведенное фазовое пространство, соответствуют механической системе с двумя, а не с тремя степенями свободы. Поэтому в оценке Вейля (В.8) для них нужно заменить размерность 3 на размерность 2, и, поскольку у возмущающего оператора спектр, почти весь, не вырожден, то его спектральные щели будут оцениваться величиной h^2 , а не h^3 , как в (В.9). В итоге, теперь получаем оценку

$$\Delta E \sim \varepsilon^2 \cdot 10^{-9} \text{ эв} \quad (\text{В.13 res})$$

для щелей в ловушке с частотным резонансом в главной части гамильтониана и возмущением порядка ε (у которого среднее равно нулю, а потому эффективно оно дает вклад порядка ε^2). Это, конечно, намного лучше, чем оценка (В.13).

Но и такая величина все еще слишком мала. При таких энергетических щелях чистые квантовые состояния в данной системе будут разрушаться фоновыми полями (шумами) уже начиная с энергий возмущения порядка $\varepsilon^2 h^2 \cdot E_0 \sim \varepsilon^2 \cdot 10^{-9} \text{ эв}$. Для справки: возмущение, вносимое естественным магнитным полем Земли в энергию движения электрона, имеет порядок 10^{-9} эв . Таким образом, на всех интервалах энергий вблизи собственных значений квадратичной части гамильтониана, электрон в данной ловушке, все еще, выглядит как классическая частица.

Чтобы кардинально увеличить спектральные щели мы наложим дополнительное резонансное условие, теперь уже на частоты искусственно введенного возмущающего слагаемого, которое нарушает исходную аксиальную симметрию ловушки (в основном тексте статьи – это резонанс 4:(-2):1 в гамильтониане H_{10} , см. (3.1)). Тогда, после вторичного усреднения, как в разделе 3, в качестве возмущающего гамильтониана у нас остается $\varepsilon^2 H_{200} + O(\varepsilon^3)$, в котором старшая часть H_{200} , после редукции на приведенное фазовое пространство, задает механическую систему с одной (!) степенью свободы. Следовательно, оператор \hat{H}_{200} имеет спектральные щели величины $\Delta \lambda \sim h$, и тогда у полного оператора (В.7) щели имеют порядок $\varepsilon^2 h$.

Таким образом, при условии двойного резонанса (и в главной и в субглавной части гамильтониана), с учетом (В.1), энергетические щели ловушки будут иметь оценку

$$\Delta E \sim E_0 \cdot \varepsilon^2 h \sim \mu |\mathcal{B}| \cdot \varepsilon^2 \sim \mu |\mathcal{B}| \cdot (\rho_1 / \rho_2)^{2/3}. \quad (\text{В.14})$$

Выберем, например, внешний радиус ρ_2 кольцевого электрода ловушки так:

$$\rho_2 \sim 30 \rho_1 \sim 3 \cdot 10^{-1} \text{ мм}. \quad (\text{В.15})$$

Тогда масштабное условие (В.1) дает $\varepsilon \sim 1/3$ и оценки (В.14), (В.12) приводят к следующему результату:

$$\Delta E \sim 10^{-5} \text{ эв}. \quad (\text{В.16})$$

Данная величина энергетических щелей уже является хорошо наблюдаемой. Максимальная длина волны излучения при переходах между ближайшими уровнями в такой системе будет

$$\Delta l = \frac{2\pi\hbar c}{\Delta E} \sim 10^{-1} \text{ м},$$

что коррелирует с размером (В.15) ловушки и означает хорошо выраженный квантовый (волновой) характер электрона в данной системе. Скажем, двумерная решетка с миллиметровым шагом, состоящая из десятков тысяч подобных электронных ловушек, будет обладать свойствами управляемой многочастичной квантовой системы.

Напомним, что первичный и вторичный резонансы у нас обеспечиваются одним фундаментальным соотношением (1.31). При выполнении этого соотношения энергетические щели возрастают от пренебрежимо малых величин (В.13) или (В.13 res), которые они имеют в общем положении или при резонансе частот только в квадратичной части гамильтониана, до хорошо различимой величины (В.16). Наша микромасштабная ловушка из непрерывно-классической превращается в дискретно-квантовую. Причем, эффект возрастания величины спектральных щелей от (В.13 res) до (В.16) достигается только лишь небольшой подстройкой угла наклона ε магнитного поля.

Можно интерпретировать данный эффект квантования (дискретизации) несколько иначе. Отклонение направления поля можно понимать как отказ от аксиальной симметрии модели путем введения особого возмущающего магнитного поля. При наличии такого резонансного «магнитного бозона» спектр энергий электрона в ловушке становится дискретным. А без этого поля, нарушающего симметрию ловушки, спектр энергий эффективно выглядит как непрерывный.

Отметим, что, как размазывание спектра до почти непрерывной консистенции, так и его дискретизация, – задаются одними и теми же возмущающими добавками в электрическом потенциале (это полиномы степеней $j = 3$ и $j = 4$ в разложении (В.6)). Добавки такого типа, обычно, появляются просто из-за технологической трудности (невозможности) получить идеальную ловушку Пеннинга с чисто квадратичным гамильтонианом. Именно из-за эффекта размазывания спектра они рассматриваются как помеха, которую следует как-то подавить.

Но можно посмотреть на эти добавки, наоборот, как на полезное дополнительное поле, которое в режиме резонансного нарушения симметрии, т.е. при наличии "магнитного бозона", контролирует устойчивый дискретный спектр энергий электрона в данной системе. Причем, этот дискретный спектр имеет точки минимума в каждом кластере теории возмущений (вблизи энергий квадратичной части гамильтониана) - эти точки минимума соответствуют вычисленным в основном тексте статьи уровням энергии (5.3).

Обратим внимание также на интересный феномен "масштабируемости", который имеет место в рассматриваемой планарной ловушке Пеннинга с круговыми электродами, а именно: величина спектральной щели в (В.14) определяется только взаимным отношением радиусов электродов, а не их абсолютным масштабом. Таким образом, кажется, что никто нам не запрещает синхронно увеличивать оба радиуса ρ_1 и ρ_2 (т.е. переходить от микро к макро масштабам ловушки), сохраняя неизменной величину энергетической щели электрона в ловушке. Однако, здесь есть одно дополнительное ограничение. Обратим внимание на величину напряжения V_2 , которая поддерживается на кольцевом электроде ловушки, см. (В.4):

$$V_2 \sim E_0/e = \frac{e|\mathcal{B}|^2}{mc^2} \rho_1^2. \quad (\text{B.17})$$

Для случая микромасштабного радиуса ρ_1 (B.11) имеем $V_2 \sim 10 \text{ в}$. Но если размеры ловушки увеличить, например, до миллиметровых, т.е. на порядок, то V_2 возрастет на два порядка до величины $V_2 \sim 10^3 \text{ в}$. А теперь вспомним, что внутри кольцевого электрода есть еще круговой электрод с потенциалом $V_1 = 0$. Предполагается, что он отделен от кольцевого электрода «пренебрежимо тонким» изолятором. Если толщину d изолятора принять равной, скажем $d = 10^{-1} \rho_1$, то внутри слоя изолятора будем иметь электрическое поле напряженности $V_2/d \sim 10^6 \text{ в/см}$, что на порядок превышает критические значения для пробоя изоляционных материалов. По этой причине увеличить размеры такой планарной ловушки до миллиметровых и одновременно сохранить ее квантовый характер, все же, реально не удастся.

В силу (B.17) ограничение сверху на внутренний радиус ρ_1 кольцевого электрода планарной ловушки, связанное с возможностью пробоя, выглядит так:

$$\rho_1[\text{нм}] \leq 10 \cdot \frac{\rho_0[\text{нм}]^2}{|\mathcal{B}|[\text{T}]} . \quad (\text{B.18})$$

Здесь квадратные скобки использованы для обозначения размерности: расстояния измеряются в нанометрах, а напряженность поля в теслах.

Но, подчеркнем, что в рассматриваемой *математической* модели планарной ловушки Пеннинга схема наших рассуждений применима для сколь угодно больших масштабов. В математической модели, когда не нужно учитывать дополнительное физическое ограничение (B.18), произвольное увеличение радиуса ρ_1 (и согласованное увеличение ρ_2) приводит только к уменьшению квазиклассического параметра \hbar (B.2), а величина энергетических щелей (B.16) не меняется.

В предположении, что угол ε (нарушение симметрии ловушки) удовлетворяет условию масштабирования (B.1), в данной модели всегда будет иметь место *эффект резонансного квантования*, а именно:

- в общем положении, без резонансных условий, электрон в ловушке может рассматриваться как классическая частица, если не рассматривать спиновые переходы,
- при резонансном условии (1.31) электрон должен рассматриваться как квантовая частица, поскольку его энергетический спектр имеет вполне различимые щели (величины $\Delta E \sim 10^{-5} \text{ эв}$ при напряженности магнитного поля 1 T и соотношении между радиусами электродов $\rho_2 \sim 30 \rho_1$).

Каждая такая резонансная квантовая система утоплена в «море» классических систем, для которых условие комбинированного резонанса (1.31) не выполнено.

Если же двигаться в обратную сторону, т.е. уменьшать размер ρ_1 , то в общем положении, без резонанса, ловушка может называться классической механической системой пока энергетическая щель

$$\Delta E[\text{эв}] \sim 10^{-4} \cdot \hbar^2 \cdot |\mathcal{B}|[\text{T}]$$

может рассматриваться как пренебрежимо малая. Скажем, если километровый масштаб длин волн считать бесконечно большим, а щели $\Delta E \sim 10^{-9}$ эв считать бесконечно малыми, то ловушка с $\rho_1 \sim 1$ мкм еще может пониматься как классическая, а вот все наномасштабные ловушки – это уже квантовые системы.

Последнее не означает, что в наномасштабах не нужна классическая геометрия и гамильтонова динамика. Этот аппарат можно эффективно использовать для описания квантовых наноловушек в рамках теории квазиклассического приближения, поскольку параметр \hbar (В.2) будет продолжать оставаться малым вплоть до масштабов $\rho_1 \sim 3\rho_0 \sim 10^{-1}$ мкм. Но уже для меньших масштабов $\rho_1 \leq \rho_0 \sim 30$ нм начинается чисто квантовый диапазон, где классическая геометрия и гамильтонова механика не работают.

Литература

1. *Blaum K. and Herfurth F.* (eds.) Trapped Charged Particles and Fundamental Interactions // Springer-Verlag, 2008.
2. *Ghosh P.K.* Ion Traps // Callendon Press, Oxford, 1995.
3. *Major F.G., Gheorghie V., and Werth G.* Charged Particle Traps // Springer, 2002.
4. *Brown L.S. and Gabrielse G.* Precision Spectroscopy of a Charged Particle in an Imperfect Penning Trap // Phys. Rev. A, 1982, **25** (4), 2423–2425.
5. *Gabrielse G.* Relaxation Calculation of the Electrostatic Properties of Compensated Penning Traps with Hyperbolic Electrodes // Phys. Rev. A, 1983, **27** (5), 2277–2290.
6. *Gabrielse G.* Detection, Damping, and Translating the Center of the Axial Oscillation of a Charged Particle in a Penning Trap with Hyperbolic Electrodes // Phys. Rev. A, 1984, **29**, 462.
7. *Gabrielse G. and Mackintosh F.C.* Cylindrical Penning Traps with Orthogonalized Anharmonicity Compensation // International Journal of Mass Spectrometry and Ion Processes, 1984, **57**, 1–17.
8. *Gabrielse G, Haarsma L., and Rolston S.L.* Open Endcap Penning Traps for High Precision Experiments // Intern. Journal of Mass Spectrometry and Ion Processes, 1989, **88**, 319–332.
9. *Gabrielse G. and Dehmelt H.* Geonium without a Magnetic Bottle – A New Generation // In: Precision Measurement and Fundamental Constants. II Ed. by *Taylor B.N. and Phillips W.D.* Natl. Bur. Stand. (U.S.), Spec. Publ., 1984, No. 617, 219–221.
10. *Segal D. and Shapiro M.* Nanoscale Paul Trapping of a Single Electron // Nanoletters, 2006, **6** (8), 1622–1626.
11. *Blaum K., Novikov Y.N., and Werth G.* Penning Traps as a Versatile Tool for Precise Experiments in Fundamental Physics arXiv:09090909.1095.
12. *Fernandez D.J. and Velazquez M.* Coherent States Approach to Penning Trap // J. Phys. A: Math. Theor., 2009, **42**, 085304; *Genkin M. and Lindroth E.* On the Penning Trap Coherent States // J. Phys. A: Math. Theor., 2009, **42**, 275305.
13. *Kretzschmar M.* Single particle motion in a Penning trap: description in the classical canonical formalism // Physica Scripta, 1992, **46**, 544–554.
14. *Stahl S., Galve F., Alonso J., Djekic S., Quint W., Valenzuela T., Verdu J., Voge M., Werth G.* A planar Penning trap // Eur. Phys. J. D, 2005, **32**, 139–145.
15. *Hellwig M., Bautista-Salvador A., Singer K., Werth G., Schmidt-Kaler F.* Fabrication of a planar micro Penning trap and numerical investigations of versatile ion positioning protocols // New Journal of Physics, 2010, **57**, 301.
16. *Goldman J., Gabrielse G.* Optimized planar Penning traps for quantum information studies // Hyperfine Interact, 2011, **199**, 279–289.
17. *Karasev M.V. and Novikova E.M.* Non-Lie permutation relations, coherent states, and quantum embedding // in Amer. Math. Soc. Translations, Ser. 2, **187**: Coherent Transform, Quantization, and Poisson Geometry (Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998), 1–202.

18. *Karasev M.V., Novikova E.M.* Алгебра и квантовая геометрия многочастотного резонанса // Известия РАН, серия математическая, 2010, **74** (6), 55-106.
19. *Blagodyreva O.V., Karasev M.V. and Novikova E.M.* Cubic Algebra and Averaged Hamiltonian for the Resonance 3:(-1) Penning-Ioffe Trap // Russian Journal of Mathematical Physics, 2012, **19** (4). P. 441-450.
20. *Karasev M.V., Novikova E.M.* Собственные состояния квантовой наноловушки Пеннинга-Йоффе в резонансном режиме // Теоретическая и математическая физика, 2014, **179** (3), 406-425.
21. *Karasev M.V., Novikova E.M.* Secondary Resonances in Penning Traps. Non-Lie Symmetry Algebras and Quantum States // Russian Journal of Mathematical Physics, 2013, **20** (3), 283-294.
22. *Karasev M.V., Novikova E.M.* Inserted Perturbations Generating Asymptotical Integrability // Mathematical Notes, 2014, **96** (6), 965-970.
23. *Karasev M.V., Novikova E.M.* Planar Penning Trap with Combined Resonance and Top Dynamics on Quadratic Algebra // Russian Journal of Mathematical Physics, 2015, **22**, 463-468.
24. *Доброхотов С. Ю., Маслов В. П.* Некоторые приложения теории комплексного роста к уравнениям с малым параметром // Итоги науки и техн., сер. Современ. пробл. мат., 1975, **5**, 141-211.
25. *Белов В. В., Доброхотов С. Ю.* Квазиклассические асимптотики Маслова с комплексными фазами. I. Общий подход // ТМФ, 1992, **92** (2), 215-254.
26. *Белов В. В., Доброхотов О. С., Доброхотов С. Ю.* Изотропные торы, комплексный росток и индекс Маслова, нормальные формы и квазимоды многомерных спектральных задач // Матем. заметки, 2001, **69** (4), 483-514
27. *Karasev M. V.* Birkhoff resonances and quantum ray method // in: Proc. Int. Seminar "Days on Diffraction", 2004, St. Petersburg, 114-126.
28. *Karasev M. V.* Noncommutative algebras, nano-structures, and quantum dynamics generated by resonances // Part I, in: Quantum Algebras and Poisson Geometry in Mathematical Physics (AMS Transl. Ser. 2, v. 216), 2005, 1-18; arXiv:math/0412542v2;
Part II, in: Adv. Stud. Contemp. Math., **11**, 33-56 (2005);
Part III, in: Russ. J. Math. Phys., **13**, 131-150 (2006).

STABLE TWO-DIMENSIONAL TORI IN PENNING TRAP UNDER A COMBINED FREQUENCY RESONANCE

M.V. Karasev and E.M. Novikova

*Laboratory for Mathematical Methods in Natural Sciences,
National Research University "Higher School of Economics"*

karasev.mikhail@gmail.com, e.m.novikova@hse.ru

Received 03.11.2015

We study the planar Penning traps in a resonance mode. The axial symmetry of the system is violated by deviation of the magnetic field from the trap axis at a small angle (the small parameter in the given model). The geometry of planar electrodes and their electric potentials are made consistent to reach a combined resonance, in both prime and subprime Hamiltonians under the small parameter expansion. In such a double-resonance regime we make the double averaging and derive the explicit formulas for the dependence of the averaged Hamiltonian on the controlling parameters of the trap. After the double reduction with respect to the primary and the secondary symmetry algebras, for the reduced Hamiltonian, an algorithm and explicit formulas for calculating all equilibrium points, explicit formulas for the energies and for the Hessians at these points in terms of the initial controlling parameters of the trap are obtained. In the original six-dimensional phase space the stable equilibrium points are related to invariant two-dimensional tori winded by near-periodic trajectories of a charge moving in the trap.