

АКУСТИЧЕСКИЙ СПЕКТР ЦИЛИНДРИЧЕСКОГО ВИХРЯ, НАЙДЕННЫЙ НА ОСНОВЕ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

Т.А. Петрова, Ф.В. Шугаев

*Московский государственный университет имени М.В.Ломоносова,
физический факультет, кафедра квантовой статистики и теории поля*

tapetrova@physics.msu.ru, shugaev@phys.msu.ru

Поступила 10.03.2016

Рассмотрена генерация звука одиночным цилиндрическим вихрем, опирающимся на плоскость. Акустическое излучение возникает за счет диффузии завихренности в вязком теплопроводном газе. Впервые определен акустический спектр такого излучения. Исследована зависимость осцилляций плотности от времени и координат. Рассмотрены геометрически подобные случаи и получена зависимость частоты колебаний от коэффициента подобия. Показано, что частота акустического излучения не зависит от интенсивности начальной завихренности, а зависит лишь от начальных геометрических размеров вихревого цилиндра. Задача решена на основе уравнений Навье-Стокса в приближении малой начальной завихренности. Результаты работы представляют интерес в аэроакустике и могут быть полезны для моделирования торнадо.

УДК 532.516.5

1 Введение

Как известно, вихревые структуры при определенных условиях становятся источниками звука. Излучение звука происходит за счет преобразования вращательной кинетической энергии в продольные акустические волны [1]. Современная теория вихревого звука была основана Лайтхиллом [2]. Общие вопросы генерации звука вихревыми структурами рассмотрены в работе [3]. Акустическое излучение системы двух вихре-

вых колец исследовано в работе [4], системы четырех цилиндрических вихрей – в работе [5]. Влияние вихревых структур на свойства турбулентного течения подтверждено многочисленными экспериментами [6-9]. Анализ энергии возмущений вихревых течений в связи с проблемой устойчивости посвящены работы [10-12].

По мнению ряда исследователей, свойства турбулентного течения могут быть описаны на основе уравнений Навье–Стокса без привлечения дополнительных гипотез [13, 14]. Следует также упомянуть, что в численных моделях LES (Large Eddy Simulation – моделирование с помощью крупных вихрей) турбулентность моделируется совокупностью крупномасштабных вихрей. В этой связи изучение динамики отдельных вихрей и характеристик их акустического излучения представляет определенный интерес. В работе [15] численные модели LES применены для описания акустического излучения.

Частота акустического излучения вихревого кольца в невязкой несжимаемой и слабо сжимаемой жидкости определена в работах [16, 17], в вязком теплопроводном газе – в работе [18]. Что касается частоты акустического излучения одиночного цилиндрического вихря, то она найдена лишь для двумерного цилиндра в невязкой жидкости [19, 20, 21]. Поэтому представляется уместным выполнить исследование для цилиндрического вихря в вязком теплопроводном газе.

Целью данной работы является исследование осцилляций параметров газа, определение частоты акустического излучения, а также спектра акустических колебаний одиночного цилиндрического вихря в вязком теплопроводном газе (воздухе). Анализ производится на основе уравнений Навье–Стокса.

2 Исходные уравнения

Нестационарная система уравнений Навье–Стокса имеет вид:

$$\begin{cases} \rho \frac{dv_i}{dt} = \frac{\partial P_{ij}}{\partial x_j}, \\ \frac{d\rho}{dt} + \rho \frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0, \\ \rho \frac{du}{dt} = P_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right). \end{cases}$$

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_j \frac{\partial}{\partial x_j}, P_{ij} = 2\mu \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{2}{3} \mu \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} - p \delta_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), u = C_V T.$$

Следуя Гельмгольцу, разложим поле скорости на потенциальную и соленоидальную часть:

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = -\frac{\vec{\nabla}}{4\pi} \int \frac{s(\vec{\xi}, t)}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} d\vec{\xi} + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \times \int \frac{\vec{\Omega}(\vec{\xi}, t)}{|\vec{x} - \vec{\xi}|} d\vec{\xi}; \quad (1)$$

$$s = \vec{\nabla} \vec{v}, \vec{\Omega} = \vec{\nabla} \times \vec{v}, \vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}; \frac{\partial}{\partial x_2}; \frac{\partial}{\partial x_3} \right).$$

Принимая во внимание (1), запишем систему уравнений Навье-Стокса в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Omega_i}{\partial t} = \nu \Delta \Omega_i + \frac{3}{4} e_{ijk} \nu \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_m} + \frac{\partial v_m}{\partial x_k} \right) \frac{\partial^2 h}{\partial x_j \partial x_m} - v_j \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_j} + \Omega_m \frac{\partial v_i}{\partial x_m} - s \Omega_i + f_{1i}, \\ \frac{\partial w}{\partial t} = -v_j \frac{\partial w}{\partial x_j} + s, \\ \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{e^h}{\gamma} \Delta w + \frac{4}{3} \nu \Delta s - \left(\frac{1}{\gamma} e^h + 0.5 s \nu \right) \Delta h + 1.5 \nu \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \frac{\partial^2 h}{\partial x_i \partial x_j} - v_j \frac{\partial s}{\partial x_j} + f_2, \\ \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\gamma}{Pr} \eta \Delta h - (\gamma - 1) s - v_j \frac{\partial h}{\partial x_j} + f_3, \end{array} \right. \quad (2)$$

$$w = -\text{Log } \rho, \quad h = \text{Log } T, \quad \nu = \mu / \rho, \quad \eta = \lambda / \rho,$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i}, \quad i = 1, 2, 3, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, 3, \quad m = 1, 2, 3.$$

Здесь e_{ijl} – антисимметричный тензор, ρ, T, \vec{v} – безразмерные значения плотности, температуры, скорости (отнесенные к ρ_0, T_0, c_0 , соответственно); μ, ν, λ, c – вязкость, кинематическая вязкость, теплопроводность и низкочастотная скорость звука, соответственно, γ – показатель адиабаты; Pr – число Прандтля. Функции f_{1i}, f_2, f_3 – нелинейные члены относительно первых производных по координатам.

Система (2) записана в безразмерном виде с помощью характеристической длины $l_0 = \nu_0 / c_0$ и характеристического времени $t_0 = \nu_0 / c_0^2$. Индекс “0” относится к начальному состоянию. Коэффициенты вязкости и теплопроводности в воздухе рассчитываются по формулам: $\mu = \mu_0 (T/T_0)^{0.75}$, $\lambda = \lambda_0 (T/T_0)^{0.75}$, где T_0 – температура в начальный момент времени. Давление, температура и плотность связаны уравнением Менделеева-Клапейрона $p = \frac{\rho R T}{M}$, где M – молярная масса.

В начальный момент завихренность имеет отличное от нуля значение ω_0 только внутри газообразного кругового цилиндра радиуса r_0 и высотой z_0 . Цилиндр располагается на плоскости (Рис. 1). Ось цилиндра неподвижна относительно плоскости и перпендикулярна ей:

Задача решается в предположении, что начальная завихренность ω_0 мала, $\omega_0 \ll 1$.

Начальные условия задачи таковы:

$$\Omega_z(\vec{x}, 0) = \begin{cases} \omega_0, & r \leq r_0 \\ 0, & r > r_0 \end{cases}$$

$$w(\vec{x}, 0) = s(\vec{x}, 0) = h(\vec{x}, 0) = 0.$$

Скорость газа на плоскости равна нулю:

$$\vec{v}(\vec{x}, t)|_{z=0} = 0.$$

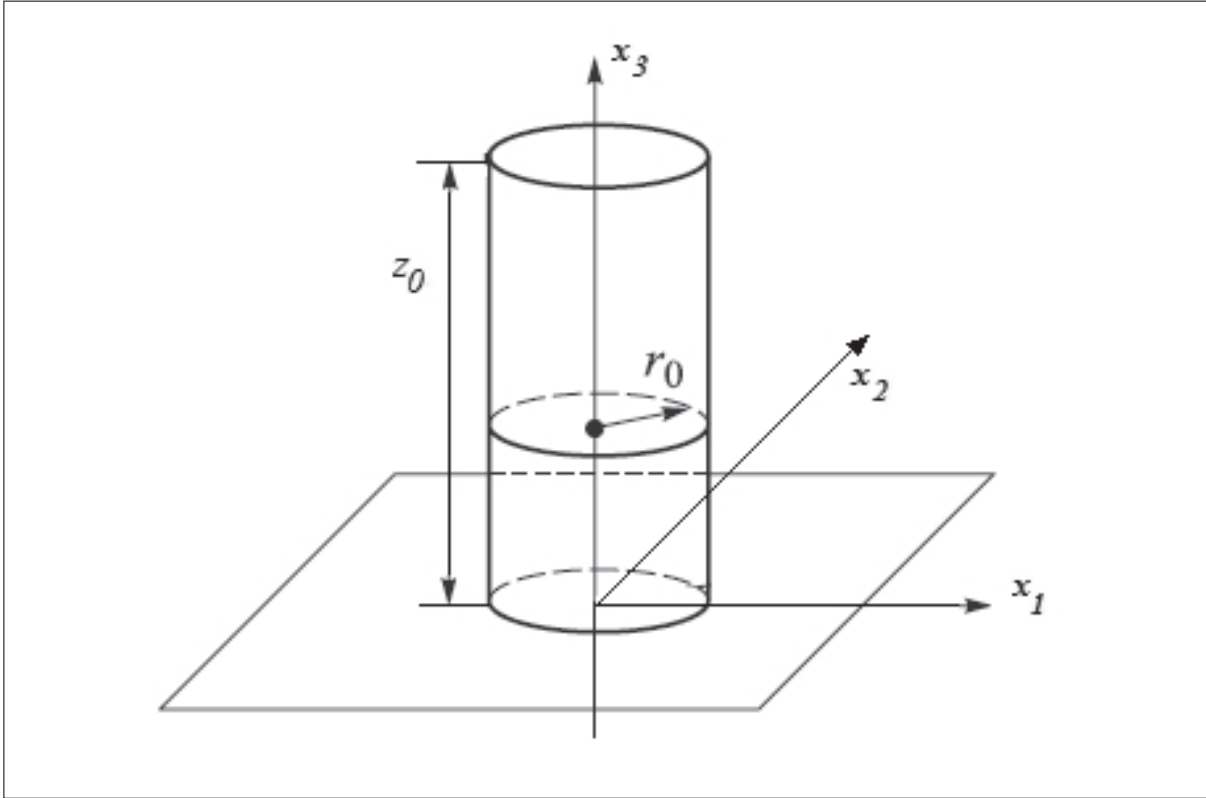


Рис. 1. Схема течения

Вследствие симметрии начальных данных решение не зависит от цилиндрической координаты φ , а зависит только от r, z, t .

Для решения системы (1) используется разложение неизвестных функций по степеням малого параметра $\varepsilon = \omega_0$. В результате получаем выражения [22]:

$$\begin{aligned}
 \Omega_1^{(1)}(\vec{x}, t) &= \varepsilon^2 \Omega_1^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 \Omega_1^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^4 \Omega_1^{(3)}(\vec{x}, t) + \dots, \\
 \Omega_2^{(1)}(\vec{x}, t) &= \varepsilon^2 \Omega_2^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 \Omega_2^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^4 \Omega_2^{(3)}(\vec{x}, t) + \dots, \\
 \Omega_3(\vec{x}, t) &= \varepsilon \Omega_3^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^2 \Omega_3^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 \Omega_3^{(3)}(\vec{x}, t) + \dots, \\
 w(\vec{x}, t) &= \varepsilon^2 w^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 w^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^4 w^{(3)}(\vec{x}, t) + \dots, \\
 s(\vec{x}, t) &= \varepsilon^2 s^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 s^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^4 s^{(3)}(\vec{x}, t) + \dots, \\
 h(\vec{x}, t) &= \varepsilon^2 h^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 h^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^4 h^{(3)}(\vec{x}, t) + \dots, \\
 v_i(\vec{x}, t) &= \varepsilon v_i^{(1)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^2 v_i^{(2)}(\vec{x}, t) + \varepsilon^3 v_i^{(3)}(\vec{x}, t) + \dots
 \end{aligned} \tag{3}$$

Подстановка разложений (3) в уравнения (1) дает систему линейных параболических дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами при старших производных, а также выражения для компонент скорости. Ограничиваясь первыми членами разложения, будем иметь:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \Omega_i^{(1)}}{\partial t} = \Delta \Omega_i^{(1)}, \\ \frac{\partial w^{(1)}}{\partial t} = s^{(1)}, \\ \frac{\partial s^{(1)}}{\partial t} = \frac{1}{\gamma} \Delta w^{(1)} + \frac{4}{3} \Delta s^{(1)} - \frac{1}{\gamma} \Delta h^{(1)} + \varphi_2^{(1)}, \\ \frac{\partial h^{(1)}}{\partial t} = \frac{\gamma}{Pr} \Delta h^{(1)} - (\gamma - 1) s^{(1)} + \varphi_3^{(1)}. \end{array} \right. \quad (4)$$

Здесь

$$\varphi_2^{(1)} = -\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_j} \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_i},$$

$$\varphi_3^{(1)} = \frac{1}{2} \gamma (\gamma - 1) D_{ij} v^{(1)} D_{ij} v^{(1)},$$

$$D_{ij} v^{(1)} = \left(\frac{\partial v_i^{(1)}}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j^{(1)}}{\partial x_i} \right).$$

Скорость равна:

$$\vec{v}(\vec{x}, t) = -\frac{0.25}{\pi} \int \{ \vec{\Omega}(\vec{x} + \vec{r}', t) \times \vec{n} + s(\vec{x} + \vec{r}', t) \vec{n} \} dr' \sin \theta' d\theta' d\varphi',$$

$$n = \{ \sin \theta' \cos \varphi', \sin \theta' \sin \varphi', \cos \theta' \}.$$

Система (4) состоит из трех однородных параболических уравнений для $\Omega_i^{(1)}$ и неоднородной параболической подсистемы с постоянными коэффициентами. Отметим, что в нашем случае от нуля отлична только одна компонента $\Omega_3^{(1)}$.

Из первого уравнения системы (4) следует выражение для завихренности:

$$\Omega_3^{(1)}(\vec{x}, t) = \frac{0.125}{\pi^{3/2} t^{3/2}} \int \Omega_3^{(1)}(\xi, 0) * \exp\left(-0.25 \left| \vec{x} - \vec{\xi} \right|^2 / t\right) d\vec{\xi}. \quad (5)$$

Выражение для $\Omega_3^{(1)}$ позволяет вычислить компоненты скорости, а, следовательно, и члены $\varphi_2^{(1)}, \varphi_3^{(1)}$, входящие в правые части дифференциальных уравнений системы (4).

Решение однородной системы с постоянными коэффициентами находится с помощью Фурье-преобразования. При этом однородная параболическая подсистема принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{w}^{(1)}}{dt} = \tilde{s}^{(1)}, \\ \frac{d\tilde{s}^{(1)}}{dt} = -\frac{k^2}{\gamma}\tilde{w}^{(1)} - \frac{4}{3}k^2\tilde{s}^{(1)} + \frac{k^2}{\gamma}\tilde{h}^{(1)}, \\ \frac{d\tilde{h}^{(1)}}{dt} = -k^2\frac{\gamma}{\text{Pr}}\tilde{h}^{(1)} - (\gamma-1)\tilde{s}^{(1)}. \end{cases} \quad (6)$$

Волнистая линия обозначает Фурье-образ. Характеристическое уравнение системы (6) имеет вид [23]

$$f^3 + k^2\left(\frac{4}{3} + \frac{\gamma}{\text{Pr}}\right)f^2 + k^2\left(\frac{4}{3}\frac{\gamma}{\text{Pr}}k^2 + 1\right)f + \frac{k^4}{\text{Pr}} = 0 \quad (7)$$

При $0 \leq k \leq k_*$ ($k_* \approx 1$ для воздуха), корни уравнения (7) выглядят следующим образом

$$f_1 = \sigma_1(k), f_{2,3} = \sigma_2(k) \pm i\omega(k); \sigma_1, \sigma_2 < 0.$$

При $k > k_*$ все корни действительны и быстро затухают со временем, поэтому данный случай не рассматривается. Дисперсионная кривая $\omega(k)$ имеет две ветви. Учитывается только та ветвь ($0 \leq k \leq k_1 < k_*$), которая соответствует меньшим значениям коэффициентов затухания σ_1, σ_2 .

Фундаментальная матрица решений A для параболической подсистемы (6) имеет вид:

$$\begin{aligned} A &= [a_{ij}], \\ a_{1i} &= c_{1i}e^{\sigma_1 t} + c_{2i}e^{\sigma_2 t} \cos(\omega t) + c_{3i}e^{\sigma_2 t} \sin(\omega t), \\ a_{2i} &= c_{1i}\sigma_1 e^{\sigma_1 t} + (c_{2i}\sigma_2 + c_{3i}\omega)e^{\sigma_2 t} \cos(\omega t) + (c_{3i}\sigma_2 - c_{2i}\omega)e^{\sigma_2 t} \sin(\omega t), \\ a_{3i} &= c_{1i}\left(1 + \gamma\sigma_1\left(\frac{\sigma_1}{k^2} + \frac{4}{3}\right)\right)e^{\sigma_1 t} + \left(\left(1 + \frac{\gamma}{k^2}(\sigma_2^2 - \omega^2) + \frac{4}{3}\gamma\sigma_2\right)c_{2i} + 2\gamma\omega\left(\frac{\sigma_2}{k^2} + \frac{2}{3}\right)c_{3i}\right)e^{\sigma_2 t} \cos(\omega t) + \\ &+ (-2\gamma\omega\left(\frac{\sigma_2}{k^2} + \frac{2}{3}\right)c_{2i} + \left(1 + \frac{\gamma}{k^2}(\sigma_2^2 - \omega^2) + \frac{4}{3}\gamma\sigma_2\right)c_{3i})e^{\sigma_2 t} \sin(\omega t). \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты c_{ij} определяются из начальных условий и имеют значения:

$$c_{11} = (\gamma(\sigma_2^2 + \omega^2) - k^2) / g_1, c_{12} = -2(\sigma_2 + \frac{2}{3}k^2) / g_0, c_{13} = k^2 / g_1,$$

$$c_{21} = (\gamma\sigma_1(\sigma_1 - 2\sigma_2) + k^2) / g_1, c_{22} = -c_{12}, c_{23} = -c_{13},$$

$$c_{31} = (\gamma\sigma_1(\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2 - \omega^2) + k^2(\sigma_1 - \sigma_2)) / (\omega g_1),$$

$$c_{32} = (\sigma_1^2 - \sigma_2^2 + \omega^2 + \frac{4k^2(\sigma_1 - \sigma_2)}{3}) / (\omega g_0),$$

$$c_{33} = k^2(\sigma_2 - \sigma_1) / (\omega g_1);$$

$$g_0 = (\sigma_2 - \sigma_1)^2 + \omega^2, g_1 = \gamma g_0.$$

Исследуются колебания плотности $w^{(1)}$:

$$w^{(1)}(\vec{x}, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{\pi}} \int_0^t d\tau \int_{R^3} d\vec{\xi} \int_{R^3} d\vec{k} \exp(i\vec{k}(\vec{x} - \vec{\xi})) * \{a_{12}(k, t - \tau)\varphi_2^{(1)}(\vec{\xi}, \tau) + a_{13}(k, t - \tau)\varphi_3^{(1)}(\vec{\xi}, \tau)\}, \quad (8)$$

Функции $s^{(1)}(\vec{x}, t)$, $h^{(1)}(\vec{x}, t)$ могут быть получены аналогично.

Введем переменную $\vec{X} = \vec{\xi} - \vec{x}_0$. Тогда уравнение (9) принимает вид

$$w^{(1)}(\vec{x}_0, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^t d\tau \int_0^{k_1} k dk \int_0^\infty R_3 dR_3 \int_0^\pi \sin\theta_3 d\theta_3 \int_0^{2\pi} d\varphi \sin(kR_3) * \{a_{12}(k, t - \tau)\varphi_2^{(1)}(\vec{x}_0 + \vec{X}, \tau) + a_{13}(k, t - \tau)\varphi_3^{(1)}(\vec{x}_0 + \vec{X}, \tau)\}. \quad (9)$$

Отклонение плотности от начального значения равно

$$\frac{\rho_d - \rho_0}{\rho_0} \approx -w \cong -\omega_0^2 w^{(1)}.$$

Здесь ρ_d обозначает размерную плотность.

Функция $w^{(1)}$, также как и частота акустического излучения, не зависит от ω_0 . Аналогичным образом можно получить выражение для $w^{(n)}$, $n > 1$. Первые члены ряда могут быть использованы для анализа частотного диапазона осцилляций плотности в случае малой завихренности. Отметим, что в нашем случае колебания давления практически совпадают с колебаниями плотности.

3 Результаты и обсуждение

Для исследования эволюции плотности использовалось уравнение (9). Кратные интегралы вычислены с применением сеток Коробова [24]. Расчеты выполнены как для исходной области внутри вихревого цилиндра, так и для области вне его.

Рис. 2-5 описывают осцилляции плотности внутри первоначального вихревого цилиндра. Рис. 2 относится к точке на оси цилиндра. Как можно видеть, сначала амплитуда колебаний растет, затем спадает до нуля. Через некоторое время колебания возникают заново с меньшей амплитудой и стремятся к нулю при $t \rightarrow \infty$.

На спектре (Рис. 3) наблюдаются две собственные частоты (порядка 115 и 280 Гц), которые разделены непрерывным спектром.

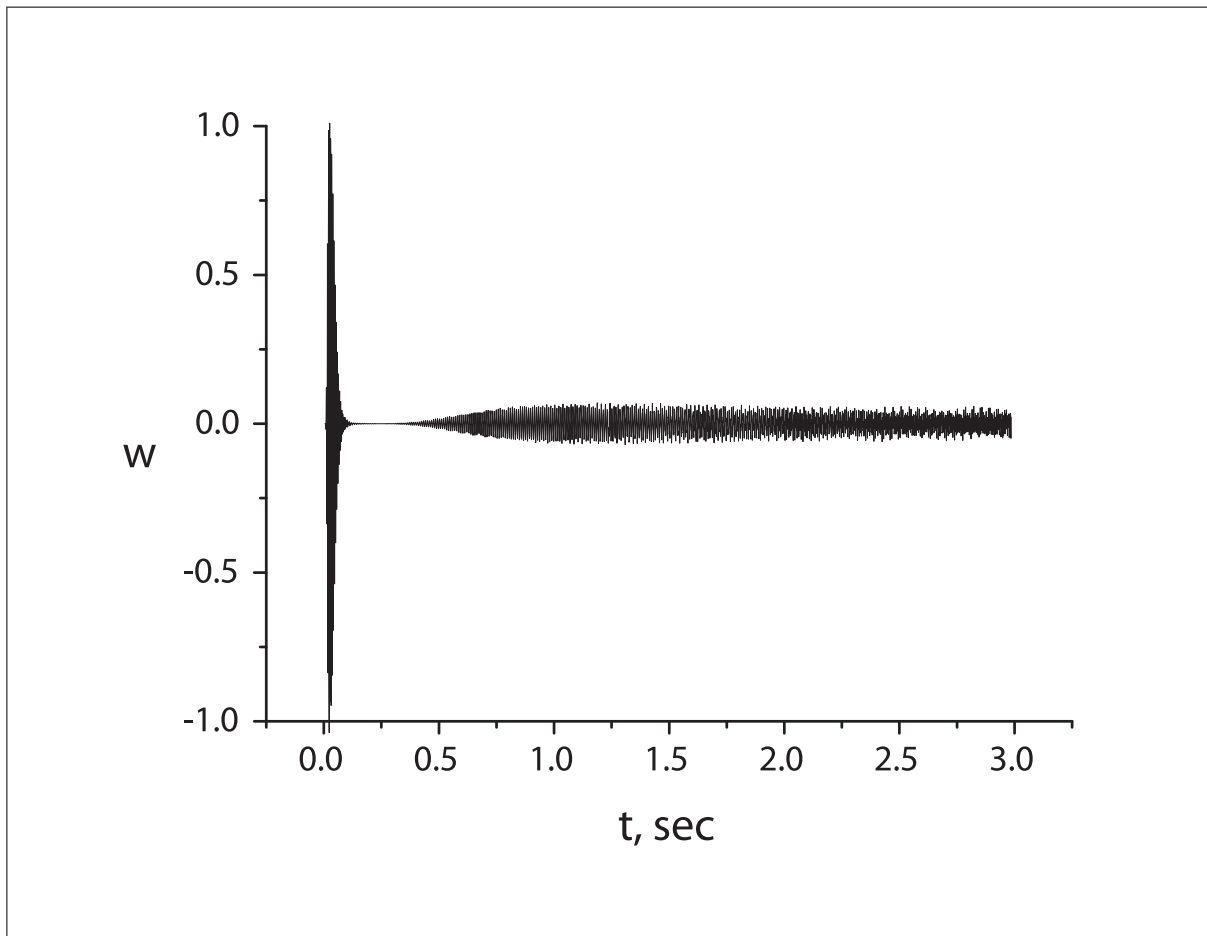


Рис. 2. График функции $w = -\log \rho$ на оси цилиндра в зависимости от времени,
 $r_0 = 0.188$ см, $z_0 = 2.909$ см, $z = 1.7$ см.

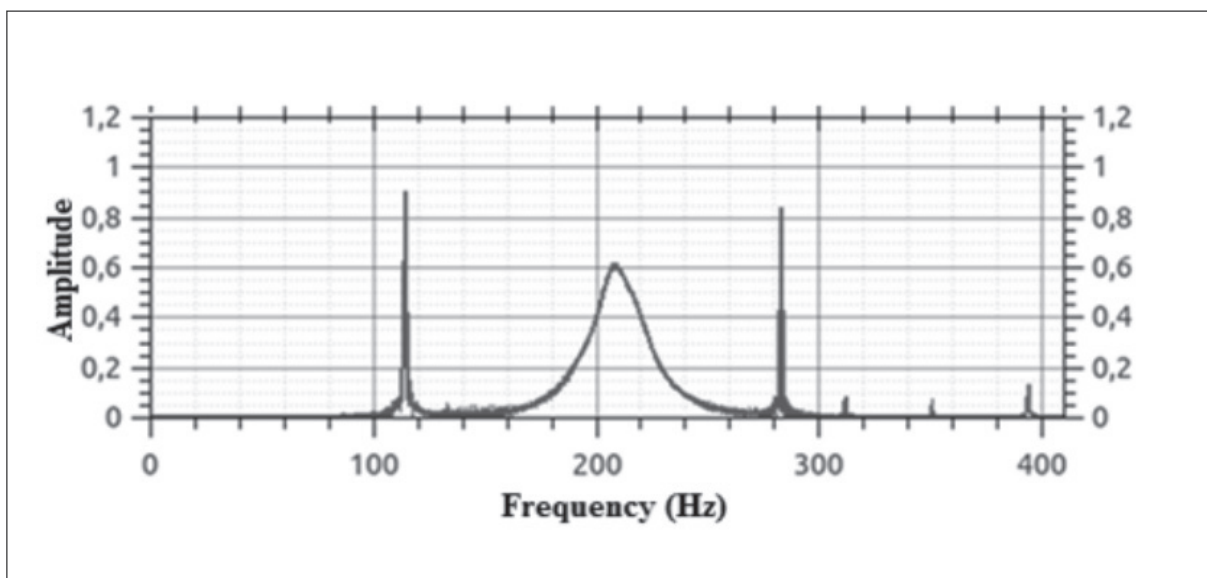


Рис. 3. Спектр колебаний функции $w = -\log \rho$ на оси цилиндра,
 $r_0 = 0.188$ см, $z_0 = 2.909$ см, $z = 1.7$ см.

Рис. 4 демонстрирует колебания при $r = r_0 / 2$. В этом случае также можно различить два временных интервала, в которых амплитуда колебаний достаточно велика.

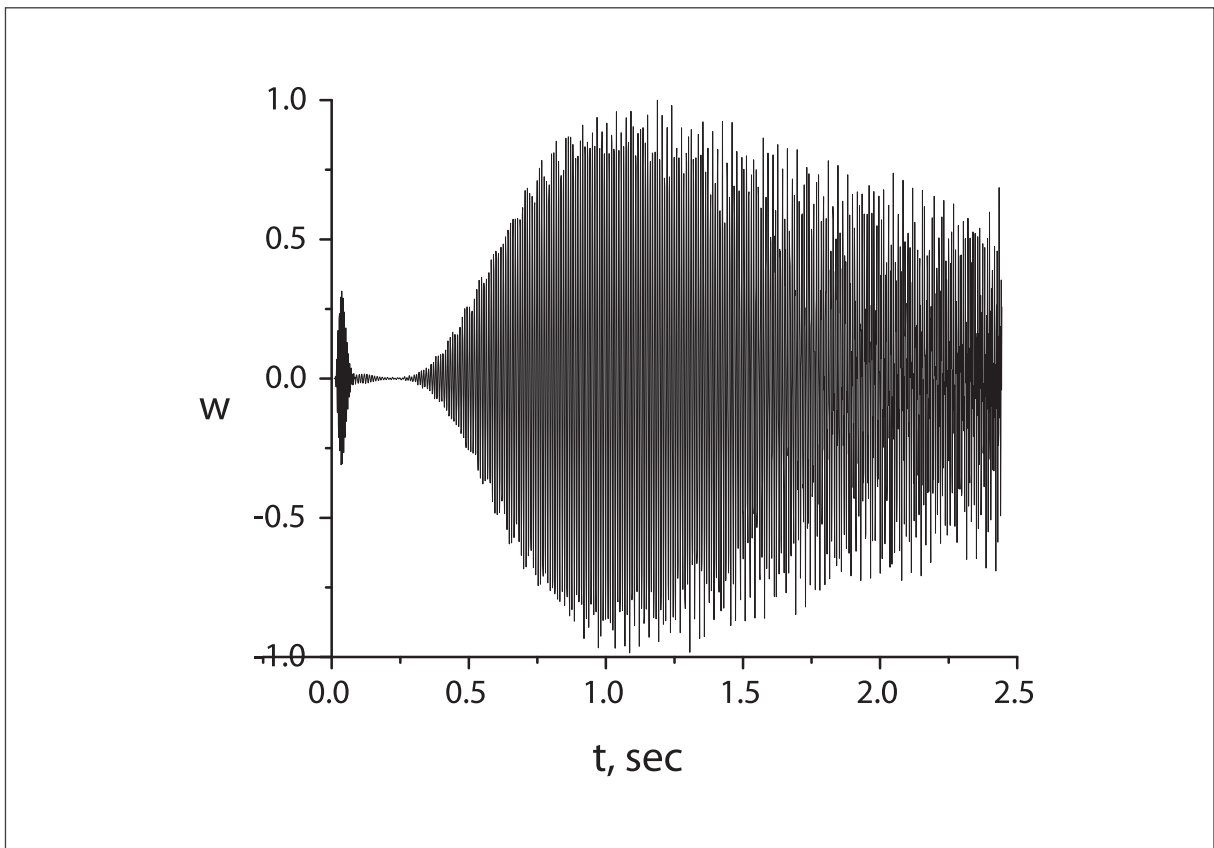


Рис. 4. График функции $w = -\log \rho$ при $r = r_0 / 2$ в зависимости от времени, $r_0 = 0.188$ см, $z_0 = 2.909$ см, $z = 1.7$ см.

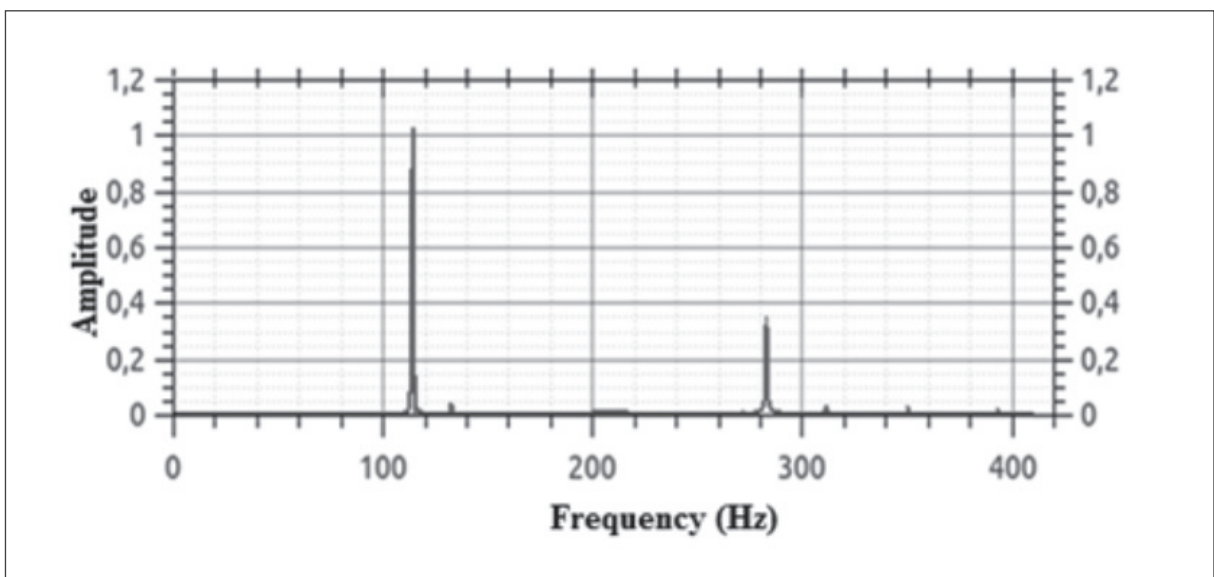


Рис. 5. Спектр колебаний функции $w = -\log \rho$ при $r = r_0 / 2$, $r_0 = 0.188$ см, $z_0 = 2.909$ см, $z = 1.7$ см.

Максимальная амплитуда наблюдается при $f = 110 \text{ Гц}$. Спектр колебаний в этом случае, как и в предыдущем, имеет две собственные частоты (порядка 115 и 280 Гц); области непрерывного спектра не наблюдается. Процесс имеет несколько другой вид для области вне первоначального цилиндра (Рис. 6).

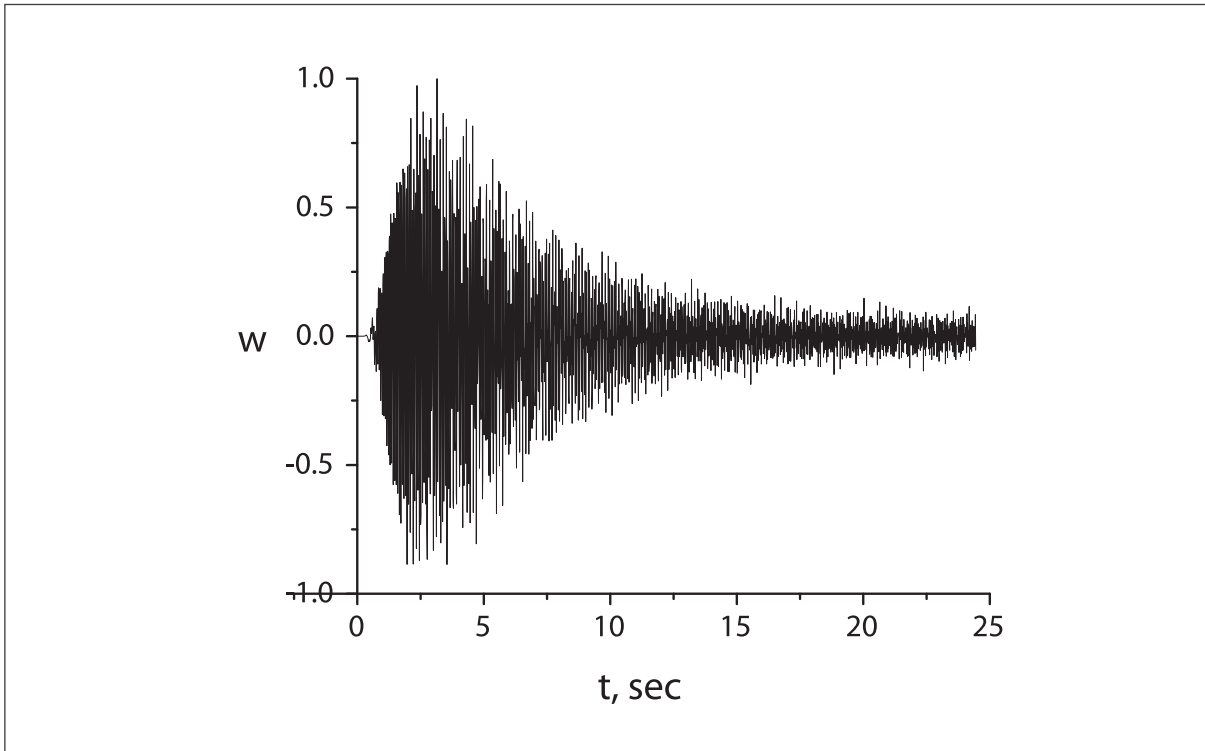


Рис. 6. График функции $w = -\log \rho$ при $r > r_0$ в зависимости от времени, $r = 1.709 \text{ см}, r_0 = 0.188 \text{ см}, z_0 = 2.909 \text{ см}, z = 1.7 \text{ см}$.

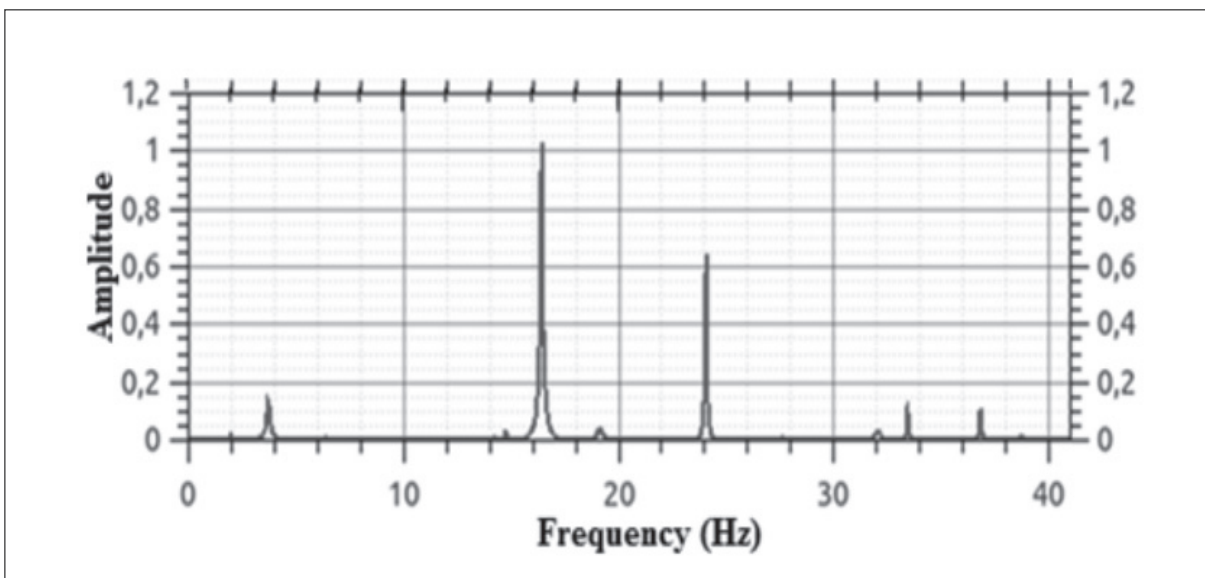


Рис. 7. Спектр колебаний величины $w = -\log \rho$ при $r > r_0$, $r = 1.709 \text{ см}, r_0 = 0.188 \text{ см}, z_0 = 2.909 \text{ см}, z = 1.7 \text{ см}$.

Рис. 6 описывает колебания в точке вне цилиндра. Видно, что колебания сначала нарастают ($t = 0 \div 3c$), затем наблюдается область резкого уменьшения амплитуды ($t = 3 \div 12c$) и далее – насыщение и медленное затухание ($t > 12c$). Рисунку 6 соответствует спектр, представленный на Рис. 7. На спектре выделяются две собственные частоты (порядка 17 Гц и 24 Гц).

Далее рассмотрим случаи, геометрически подобные картине течения на Рис.6 с коэффициентами подобия 2, 3, 5.

График на Рис. 8 (коэффициент подобия 2) практически совпадает с исходным графиком, за исключением того, что процесс развивается медленнее. Так, нарастание амплитуды происходит в промежутке $t = 0 \div 15c$, резкий спад – при $t = 14 \div 40c$. При коэффициенте подобия 3 (Рис. 9) процесс развивается еще медленнее, чем предыдущие два. Кроме того, можно наблюдать не одну, а две области нарастания амплитуды колебаний, $t = 0 \div 25c$ и $t = 80 \div 160c$.

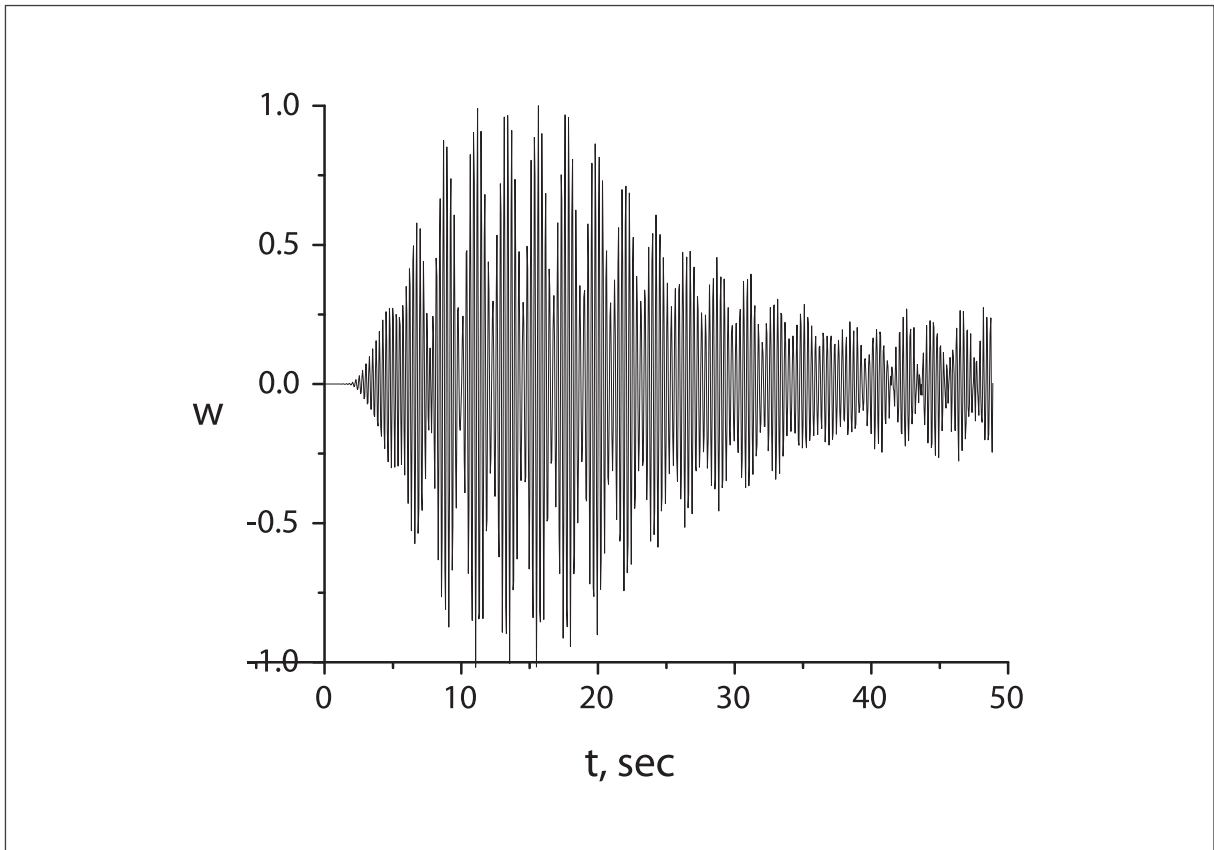


Рис. 8. Коэффициент подобия 2. График функции $w = -\log \rho$ при $r > r_0$ в зависимости от времени $r = 3.418 \text{ см}, r_0 = 0.376 \text{ см}, z_0 = 5.818 \text{ см}, z = 3.4 \text{ см}$.

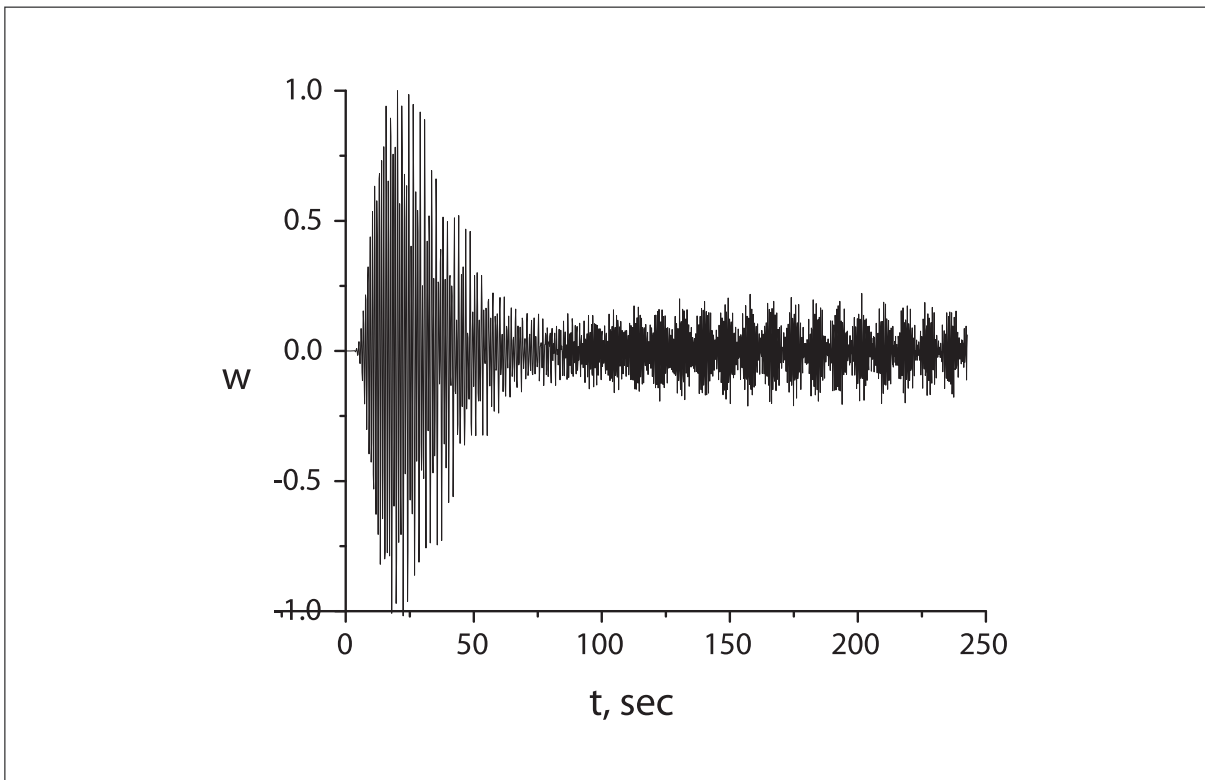


Рис. 9. Коэффициент подобия 3. График функции $w = -\log \rho$ при $r > r_0$ в зависимости от времени, $r = 5.127 \text{ см}$, $r_0 = 0.564 \text{ см}$, $z_0 = 8.727 \text{ см}$, $z = 5.1 \text{ см}$.

4 Заключение

Рассмотрена генерация звука одиночным цилиндрическим вихрем, опирающимся на плоскую поверхность в вязком теплопроводном газе при малой начальной завихренности. Впервые учтен процесс диффузии завихренности и построен акустический спектр в различных точках пространства.

Показано, что процесс характеризуется двумя собственными частотами. Причем для случая на оси цилиндра, между собственными частотами можно наблюдать непрерывный спектр. Показано, что при малой начальной завихренности частота акустического излучения зависит лишь от начального радиуса вихревого цилиндра и не зависит от интенсивности начальной завихренности.

Результаты работы могут представлять интерес для аэроакустики и для моделирования торнадо.

Литература

1. *Howe M.S.* Theory of vortex sound // Cambridge University Press, UK, 2003.
2. *Lighthill M.J.* On sound generated aerodynamically. Part I: General theory // Proceedings of the Royal Society of London, 1952, A21, pp. 564–587.
3. *Powell A.* Theory of vortex sound // J. Acoust. Soc. Amer. 1964. 36. pp. 177.
4. *Inoue O.* Sound generation by the leapfrogging between two coaxial vortex rings // Phys. Fluids. 2002. 14, No. 9, pp.3361.
5. *Eldredge J.D.* The dynamics and acoustics of viscous two-dimensional leapfrogging vortices // J. Sound and Vibration. 2007. 301. pp. 74.
6. *Луговцов Б.А.* Некоторые проблемы математики и механики // М., Наука, 1970.
7. *Johnson G.M.* An empirical model of the motion of turbulent vortex rings // AIAA J. 1971. Vol. 9, No 4, pp. 763.
8. *Maxworthy T.J.* Turbulent vortex rings // J. Fluid Mech. 1974. 64. pp. 22.
9. *Maxworthy T.J.* Some experimental studies of vortex rings // J. Fluid Mech. 1977. 81. 465 pp.
10. *Holm D., Marsden J., Ratiu T., Weinstein A.* Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria // Phys.Rep. 1985. 123. 1 pp.
11. *Menshov I., Nakamura Y.* Unconditionally stable scheme for unsteady compressible flows // Phys. Fluids. 2005. V. 17. No. 3. pp. 034102-1 – 034102-15.
12. *Копьев В.Ф., Леонтьев Е.А.* Об акустической неустойчивости аксиального вихря// Акуст. журн. 1983. 29. стр. 192.
13. *Chorin A., Marsden J., Smale S.* Turbulence seminar. Lecture notes in mathematics // Springer, 1977. pp. 615.
14. *Barenblatt G.I., Chorin A.J.* Turbulence: An Old Challenge and New Perspectives // Meccanica. 1998. V. 33. No. 5. pp. 445.
15. *Claus Wagner, Thomas Hüttl, Pierre Sagaut* Large-eddy simulation for acoustics // Cambridge Aerospace Series, Cambridge University, 2012
16. *Kopiev V.F., Chernyshev S.A.* Vortex ring eigen-oscillations as a source of sound // J. Fluid Mech. 1997. 341. pp. 19.
17. *Копьев В.Ф., Чернышев С.А.* Колебания вихревого кольца, возникновение в нем турбулентности и генерация звука // Успехи физ. наук. 2000. 170. № 7. стр. 713.
18. *Shugaev F.V., Shtemenko L.S. et al.* Modelling of laser beam propagation through turbulence // Proc. SPIE. 2014. 9242. pp. 1-12.
19. *Kelvin, Lord W.* Vibrations of a columnar vortex. // Philos. Mag., 1880. 10. 155- 168 pp.
20. *Яковлев П.Г.* Излучение звука плоским локализованным вихрем // Акуст. журн. 2012. Т. 58. № 4. стр. 563.
21. *Broadbent E. G.* Jet noise radiation from discret vortices // ARC Reports and memoranda.1978. No. 3826. p. 28.

22. *Петрова Т.А, Шугаев Ф.В.* Частота акустического излучения цилиндрического вихря // Вестник Московского Университета, серия 3. Физика, Астрономия. 2015. № 4. стр. 31–35.
23. *Truesdell C.* Precise theory of absorption and dispersion of forced plane infinitesimal waves according to the Navier-Stokes equations // *J. Ration. Mech. and Analysis.* 1953. 2. pp. 643-714.
24. *Коробов Н.М.* Теоретико-числовые методы в приближённом анализе. // М., Наука, 1963.

ACOUSTIC SPECTRUM OF A CYLINDRICAL VORTEX CALCULATED ON THE BASIS OF THE NAVIER-STOKES EQUATIONS

T.A. Petrova, F.V. Shugaev

*Department of Quantum Statistics and Field Theory,
Faculty of Physics, M.V.Lomonosov Moscow State University.*

tapetrova@physics.msu.ru, shugaev@phys.msu.ru

Received 10.03.2016

Generation of sound by a single cylindrical vortex on a flat wall is considered. Acoustic radiation arises due to the diffusion of vorticity in a viscous heat-conducting gas. For the first time the acoustic spectrum of this radiation is defined. Geometrically similar cases are considered. It is also shown that the frequency of the acoustic radiation does not depend on the intensity of the initial vorticity, and depends only on the initial radius of the vortex cylinder. The problem is solved on the basis of the Navier-Stokes equations in the approximation of small initial vorticity. The results may be useful for aeroacoustics and simulation of a tornado.