

# ОБРАЗОВАНИЕ ВОЙДОВ В НЕПОДВИЖНОЙ И ДВИЖУЩЕЙСЯ ПЫЛЕВОЙ ПЛАЗМЕ

О.В. Кравченко<sup>1-3</sup>, О.А. Азарова<sup>4</sup>

<sup>1</sup>Научно-технологический центр уникального приборостроения РАН, Москва

<sup>2</sup>Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, Москва

<sup>3</sup>Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН

<sup>4</sup>Вычислительный центр им. А.А. Дородницына Федерального исследовательского центра «Информатика и управление» РАН, Москва

ok@bmstu.ru

Поступила 05.10.2017

В статье рассматривается моделирование образования устойчивых структур, свободных от пылевых частиц (войдов), в неподвижной и движущейся пылевой плазме. Моделирование проводится на основе известной модели Avinash, Bhattacharjee, Hu (ABH), описывающей динамику образования пылевого войда. Гидродинамическая часть модели была преобразована и записана в дивергентном виде, который использовался для расчетов по известным схемам первого и второго порядка (схема Лакса и комплексно-консервативная схема). Для различных режимов потока получена динамика кольцевых структур в неподвижной и движущейся пылевой плазме. Получены также установившиеся режимы течения, характеризующиеся формированием пылевых войдов.

УДК 533.9, 519.622, 519.63

## 1. Обозначения

$n_d, n_e$	=	плотности концентрации пылевой и электронной компоненты
$v_d, v_i$	=	скорости пылевой и электронной компоненты
$E$	=	напряженность электрического поля
$F_d$	=	сила ионного притяжения
$D_0$	=	коэффициент диффузии

$t, x, y$	=	временная и пространственная переменные
$a, b$	=	постоянные в выражении для силы ионного притяжения
$\mu$	=	коэффициент мобильности ионов
$\alpha_0$	=	коэффициент трения
$\tau_d, \tau_i$	=	коэффициент нормализованных температур для пылевой и ионной компонент
$n_i$	=	количество узлов сетки по $x$

Индекс “ $0$ ” относится к начальным данным

## 2. Введение

В последние годы был опубликован ряд исследований по динамике пылевой плазмы [1, 2]. Впервые области, свободные от пылевых частиц (войды), были обнаружены в ходе экспериментов на борту международной космической станции (МКС) в условиях микрогравитации [2]. Впоследствии войды были также получены экспериментально в лабораторных условиях в поле тяжести Земли [3-5]. Вместе с тем следует отметить относительно малое количество работ, относящихся к вопросам компьютерного моделирования образования пространственных структур в пылевой плазме.

Эволюция динамики образования одинарного симметричного войда была описана электро-гидродинамической моделью [6, 7], в основе которой лежит учет силы ионного притяжения как нелинейной функции, зависящей от скорости ионов. Алгоритм расчёта образования пылевого войда при помощи модели [7] был представлен в [8] для случая радиальной симметрии электрического поля. Образование одиночного симметричного войда и концентрических симметричных войдов в неподвижной среде было рассмотрено в [9].

В настоящей статье рассматривается образование войда в неподвижной и движущейся пылевой плазме. Моделирование проводится на основе модели [7] образования войда в потоке пылевой плазмы. Схема Лакса (первого порядка аппроксимации) и комплексно-консервативная разностная схема [10] (второго порядка аппроксимации) применяются для расчёта гидродинамической части модели.

Материалы статьи были представлены на Международной конференции 7<sup>th</sup> European Conference for Aeronautics and Space Sciences (EUCASS) [11].

## 3. Моделирование

### 3.1 Описание математической модели

Численный расчёт проводится на основе модели [7] с использованием разностных схем первого и второго порядка аппроксимации. Модель рассматривается в безразмерном виде с использованием нормирующих параметров из [7]:

$$\frac{\partial v_d}{\partial t} + v_d \frac{\partial v_d}{\partial x} = F_d - E - \alpha_0 v_d - \frac{\tau_d}{n_d} \frac{\partial n_d}{\partial x}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_d}{\partial t} = - \frac{\partial(n_d v_d)}{\partial x} + D_0 \frac{\partial^2 n_d}{\partial x^2}, \quad (2)$$

$$\frac{dn_e}{dx} = - \frac{n_e E}{\tau_i}, \quad (3)$$

$$\frac{dE}{dx} = 1 - n_e - n_d, \quad (4)$$

$$F_d = \frac{aE}{b + |v_i|^3}, \quad v_i = \mu E. \quad (5)$$

Здесь  $n_d, n_e$  – плотности концентрации пылевой и электронной компонент,  $v_d, v_i$  – скорости пылевой и ионной компонент,  $E$  – напряженность электрического поля,  $F_d$  – сила ионного притяжения,  $D_0$  – коэффициент диффузии. Гидродинамическая часть модели состоит из закона изменения количества движения (1) и уравнения неразрывности для пылевой компоненты (2). Электростатическая часть состоит из уравнения баланса для электронной компоненты (без учёта инерции электронов) (3) и закона Пуассона (4), который замыкает нелинейную систему уравнений в частных производных. Выражение для силы ионного притяжения представлено в (5). Следует отметить, что сила ионного притяжения (5) является силой, действующей на пылевые частицы со стороны ионов. Она аппроксимируется нелинейной функцией с параметрами аппроксимации  $a, b$ , которые являются положительными постоянными величинами. Одной из главных особенностей модели [7] является то, что сила  $F_d$  зависит от скорости ионов  $v_i$ , и её модуль уменьшается с ростом скорости  $v_i$ .

Модель представляет собой самосогласованную систему дифференциальных уравнений в частных производных, в которой динамика заряженных частиц влияет на изменение напряженности электрического поля  $E$  и наоборот, напряженность электрического поля влияет на динамику заряженных частиц. Неизвестными функциями являются плотности и скорости пылевых частиц, электронов и ионов,  $n_d, n_e$  и  $v_d, v_i$ , и напряженность электрического поля  $E$ . Скорость ионов  $v_i$  прямо пропорционально зависит от напряженности электрического поля  $E$  с коэффициентом пропорциональности  $\mu$ .

### 3.2 Моделирование с использованием разностных схем первого и второго порядков

Общий алгоритм для численного моделирования с использованием схемы первого порядка был представлен ранее в [7], а также был описан в [9]. Он состоит в следующем:

- На текущем шаге интегрирования по времени  $t^n$  происходит решение начально-краевой задачи для (1), (2) с граничными условиями Неймана по явной консервативной схеме первого порядка (в качестве такой схемы рассматривалась схема Лакса), отсюда определяются значения функций  $n_d, v_d$  в узлах пространственной сетки.
- На том же шаге интегрирования по времени  $t^n$  происходит решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3),(4) явным методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Отсюда находятся значения функций  $n_e, E$  в узлах пространственной сетки.
- На новом шаге интегрирования по времени  $t^{n+1}$  происходит повторное решение начально-краевой задачи для (1), (2) с граничными условиями Неймана. Отсюда становятся известными значения функций  $n_d, v_d$  в узлах пространственной сетки на новом шаге по времени.

Для расчёта с применением схемы первого порядка для гидродинамической части модели по схеме Лакса (при  $D_0=0$ ) уравнения (1), (2) модели были переписаны в дивергентном виде:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{f}, \quad (6)$$

где

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} n_d \\ v_d \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} n_d v_d \\ 0.5v_d^2 + \tau_d \ln n_d \end{pmatrix}, \mathbf{f} = \begin{pmatrix} D_0 \frac{\partial^2 n_d}{\partial x^2} \\ F_d - E - \alpha_0 v_d \end{pmatrix}.$$

Схема второго порядка для алгоритма [8, 9] была применена без шага повторного вычисления на основе подхода, описанного в [10] для увеличения порядка аппроксимации разностной схемы. Применяя такой подход для системы в дивергентном виде (6), запишем дополнительно систему дифференциальных следствий:

$$\frac{\partial \mathbf{u}_x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} = \mathbf{0}, \quad (7)$$

где

$$\mathbf{u}_x = \begin{pmatrix} n_{dx} \\ v_{dx} \end{pmatrix}, \mathbf{F}_x = \begin{pmatrix} (n_d v_d - D_0 n_{dx})_x \\ (0.5v_d^2 + \tau_d \ln n_d)_x + E - F_d + \alpha_0 v_d \end{pmatrix}.$$

В системе для производных (7), пространственные производные в правой части включаются в функцию потока. Такой приём позволяет избежать искусственных источников и стоков в расчетной области. На выходной границе использовались условия сноса. Для расчёта системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3), (4) также применяется метод Рунге-Кутты 4-го порядка. В расчетах полагалось, что  $n_d \leq 1$ , причем если  $n_d$  превышало 1 (за счет численных осцилляций в схеме второго порядка), то значение  $n_d$  принималось равным 1, а значение  $v_d$  полагалось равным  $v_{d0}$ .

## 4. Численные результаты

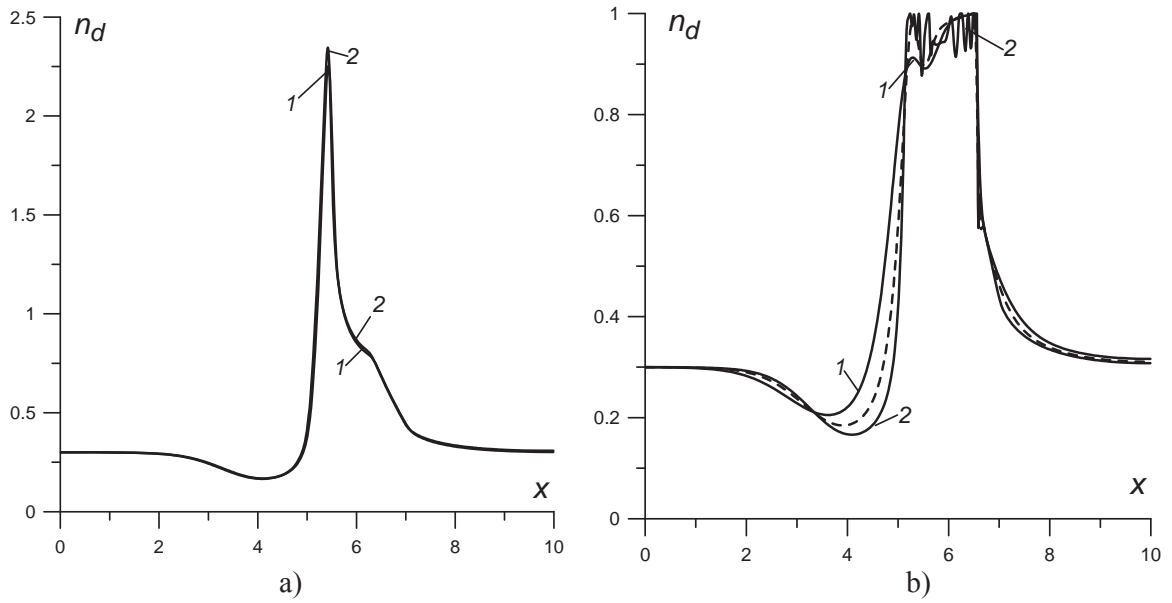
Проводились численные эксперименты по генерации войдов для нулевой и ненулевой начальной скорости пылевой составляющей  $v_{d0}$  в комплексной плазме. Параметры модели представлены в Таблице 1.

### 4.1 Сравнение результатов моделирования по схемам первого и второго порядка

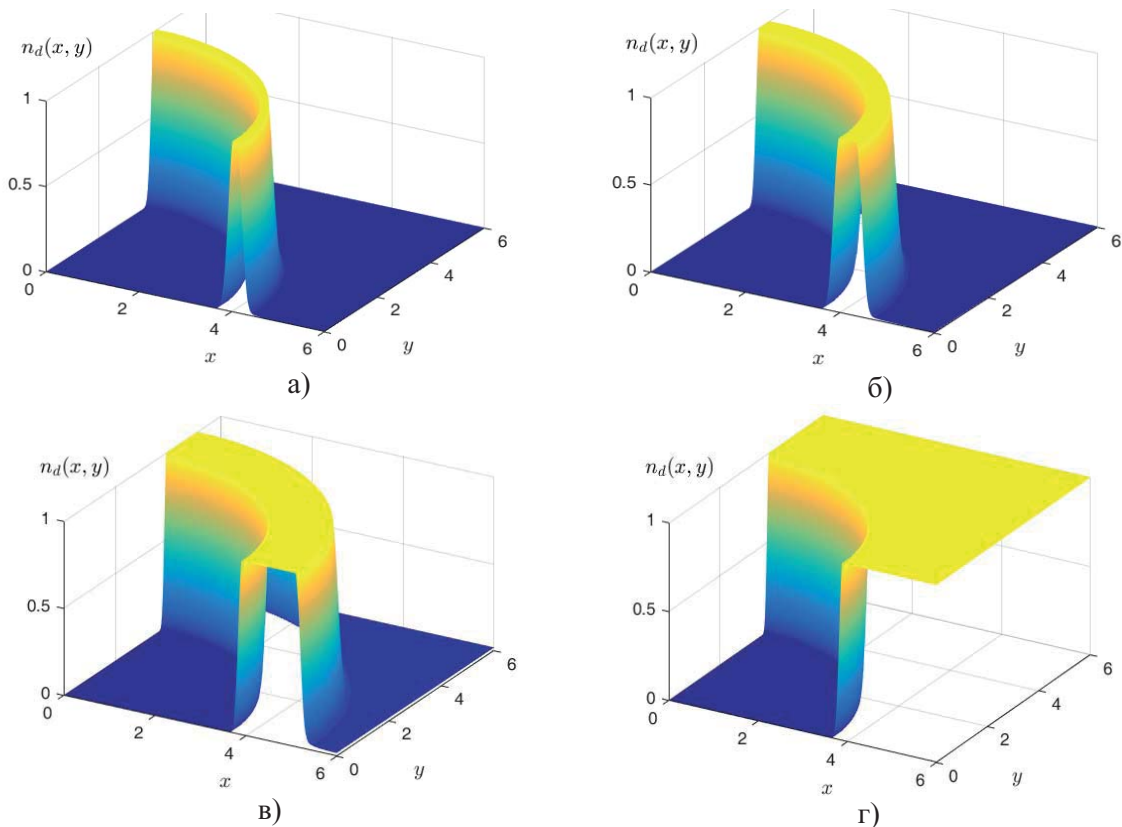
Сравнение результатов моделирования с применением разностных схем первого и второго порядка показано на Рис. 1. Отметим, что на начальном этапе распределения плотности  $n_d$ , полученные по схемам первого (кривая 1) и второго порядка (кривая 2), практически совпадают (Рис. 1а). Ограничение на значения скорости пылевых частиц  $v_d$  приводит к подавлению искусственных осцилляций численного решения распределения  $v_d$  (когда значение функции  $n_d$  превышает значение 1 в пространственных узлах сетки). Эти осцилляции показаны на графике численного решения  $n_d$ , которое было вычислено по схеме второго порядка (Рис. 1б, кривая 2). Наличие ненулевого коэффициента диффузии (который с вычислительной точки зрения играет роль искусственной вязкости в (2)) позволяет сгладить осцилляции (Рис. 1б, пунктир,  $D_0=0.1$ ).

### 4.2 Моделирование динамики образования войда в неподвижной пылевой плазме

Динамика образования пылевого войда при первоначально неподвижной пылевой компоненте ( $v_{d0}=0$ ) с применением схемы первого порядка для гидродинамической части модели представлена на Рис. 2. Двумерные распределения плотностей концентраций пылевых частиц  $n_d$ , которые представлены на Рис. 2а-2г, получены вращением вокруг оси  $Oz$ . Механизм образования войда связан с балансом между напряженностью электрического поля и силой ионного притяжения. Войд эволюционирует во времени при фиксированных параметрах модели и достигает насыщенного состояния в момент времени  $t=200$  (Рис. 2д). Промежуточные состояния представлены на Рис. 2а-2в в мо-



**Рис. 1.** Динамика изменения концентрации пылевой компоненты  $n_d$  в процессе образования войда, рассчитанная по схеме первого порядка (кривая 1,  $D_0=0$ ) и второго порядка (кривая 2,  $D_0=0$ ) для гидродинамической части модели,  $n_{d0}=0.3$ ,  $v_{d0}=0$ , 1:  
 а) начальная стадия процесса (без ограничений на  $n_d$  и  $v_d$ ); б) промежуточная стадия (с ограничениями на  $n_d$  и  $v_d$ ), пунктир -  $D_0=0.1$



**Рис. 2.** Эволюция плотности концентрации распределения пылевой компоненты  $n_d$  в процессе образования войда,  $E_0=4 \cdot 10^{-4}$  (схема первого порядка): а) – безразмерное время  $t=70$  (неустойчивая кольцевая структура); б) -  $t=100$ ; в) -  $t=140$ ; г) -  $t=200$  (установившийся режим)

менты времени  $t=70, 100, 140$ , соответственно. Следует отметить, что в начале эволюции образуется кольцевая структура, в центре которой находится войд. Далее правая граница кольцевой структуры распространяется вправо и впоследствии покидает расчетную область, а левая граница кольцевой структуры затормаживается и остаётся неподвижной.

Зависимость плотности распределения концентрации пылевых частиц  $n_d$  для различных начальных значений напряженности электрического поля  $E$  представлена на Рис. 3. Здесь в начале процесса генерации войда пылевые частицы образуют кольцевую структуру. Видно, что размер войда уменьшается при увеличении начальных значений напряженности электрического поля  $E_0$  со значения  $10^{-6}$  (Рис. 3а) до значения  $10^{-3}$  (Рис. 3г). Для значения  $E_0=10^{-6}$  радиус войда приближается к пространственному безразмерному значению, равному 4 (Рис. 3а), в то время как это значение становится равным 2.2 для начального значения напряженности  $E_0=10^{-3}$  (Рис. 3г). Далее войд формируется внутри кольцевой структуры, правая граница которой расширяется до установившегося состояния.

Табл. 1.

### Значения параметров расчета

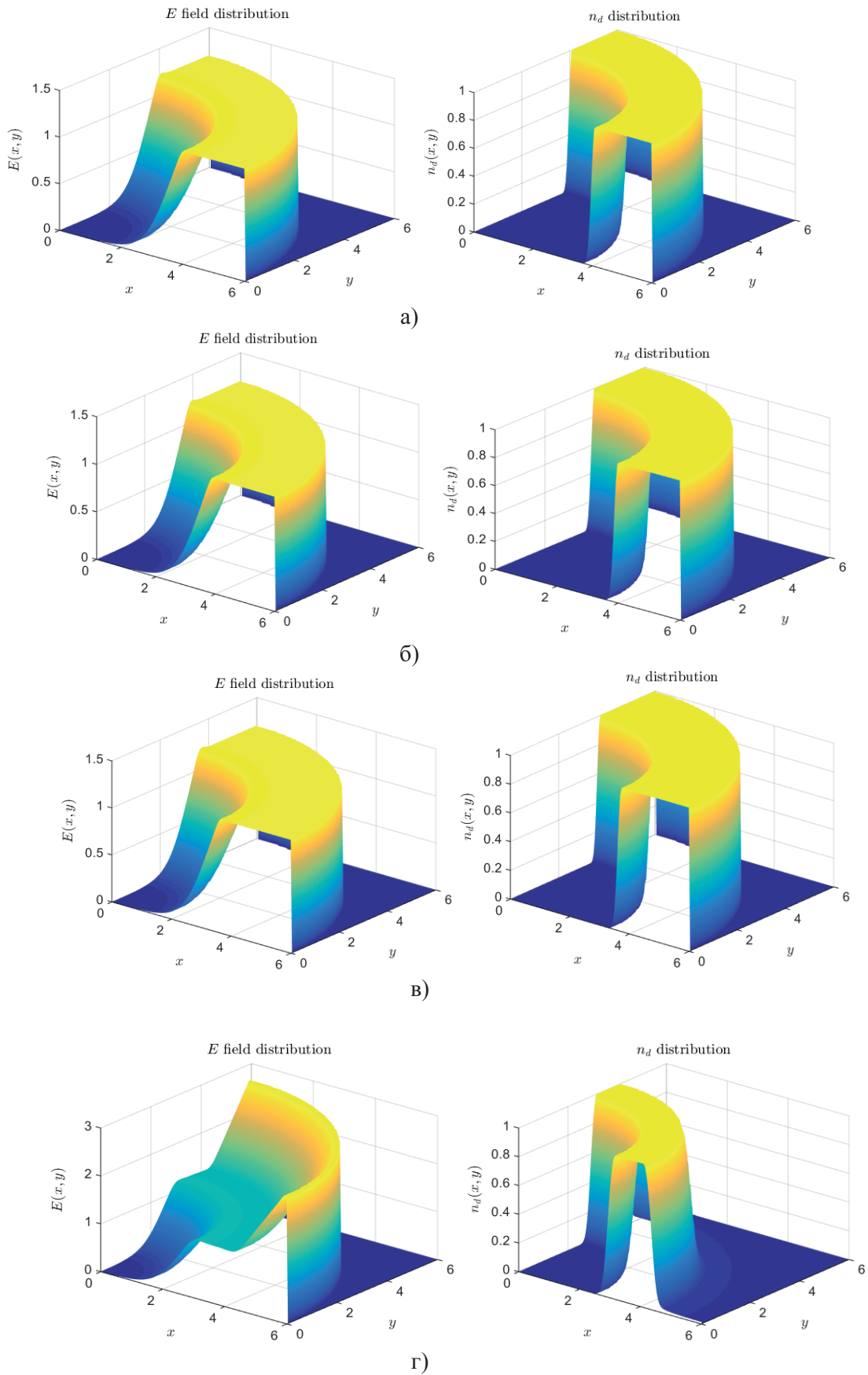
Параметры	Значения
$\tau_i$	0.125
$\tau_d$	0.001
$a$	7.5
$b$	1.6
$\alpha_0$	2
$\mu$	1.5
$n_{e0}$	0.999

Динамика образования войда с применением схем второго порядка для гидродинамической части модели [7] приведена на Рис. 4 ( $D_0=0.1, b=2$ ). *Кривая 1* показывает распределение плотности концентрации  $n_d$  в начальной стадии образования войда из кольцевой структуры пылевых частиц. *Кривые 2, 3* соответствуют установившемуся режиму, то есть соответствуют моменту времени, когда войд полностью образовался (Рис. 4а). Рис. 4б демонстрирует графики всех неизвестных плотностей концентраций, скоростей и сил, участвующих в процессе образования войда. Двумерные графики для плотности концентрации  $n_d$ , полученной вращением вокруг оси  $Oz$  представлены на Рис. 4в, 4г. Отметим, что наличие ненулевого коэффициента диффузии приводит к увеличению значений плотности концентрации  $n_d$  в центре войда (Рис. 4в). Однако это значение может быть уменьшено при изменении константы  $b$  в выражении для силы ионного притяжения  $F_d$  (5). Заметим, что при этом происходит увеличение радиуса войда.

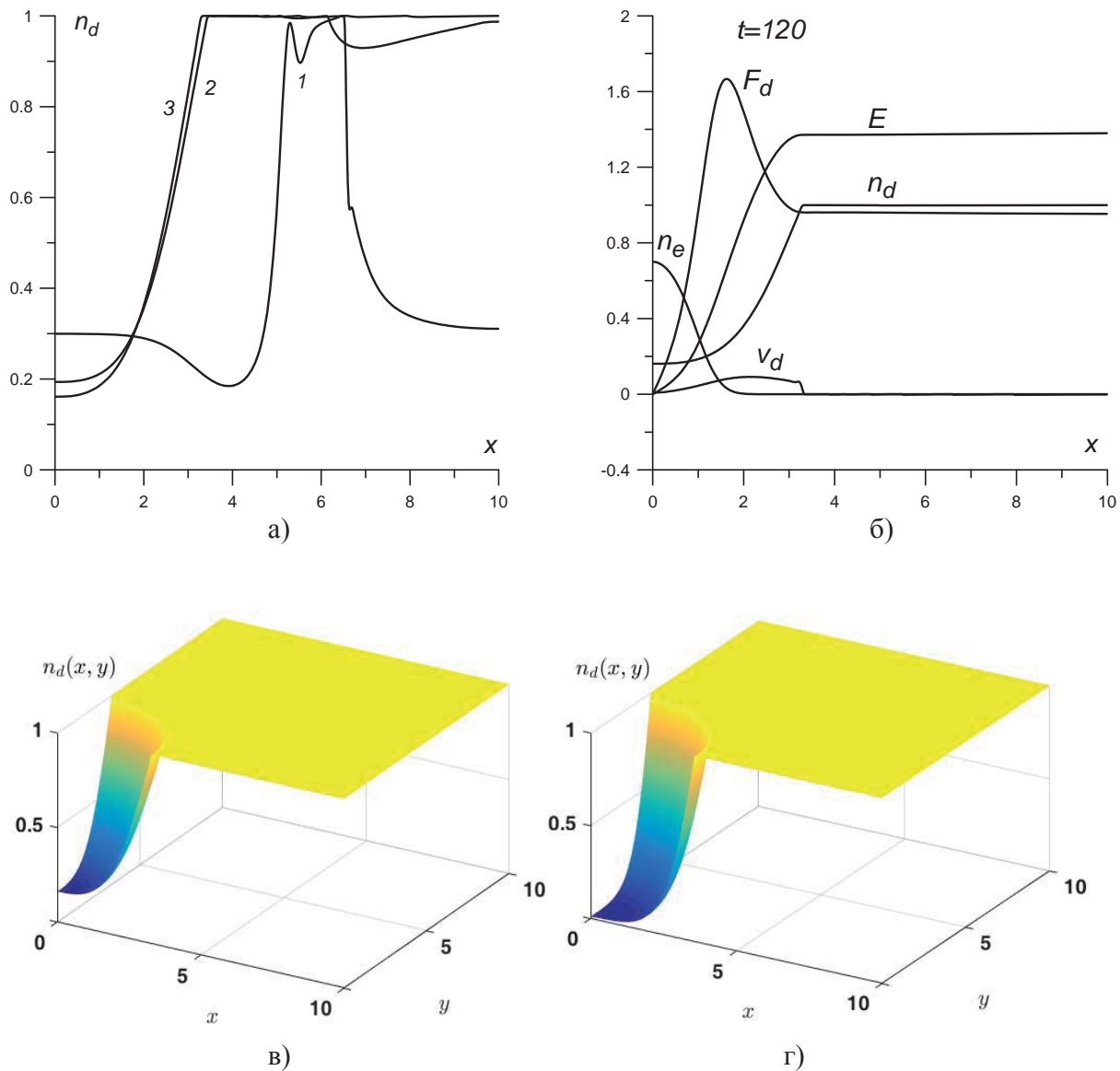
### 4.3 Моделирование динамики образования войда в подвижной пылевой плазме

Динамика образования войда при наличии потока пылевых частиц ( $v_{d0}=0.1$ ) с применением схемы первого порядка для гидродинамической части модели [7] представлена на Рис. 5. Здесь приведены все неизвестные величины для установившегося режима образования пылевого войда при наличии начальной скорости пылевых частиц (Рис. 5а, 5б). Распределение плотности концентрации пылевой компоненты  $n_d$  в режиме генерации войда из кольцевой структуры пылевой плазмы представлено на Рис. 5в.





**Рис. 3.** Зависимость плотности распределения концентрации  $n_d$  от начальных значений напряженности электрического поля  $E_0$ ,  $t=200$  (схема первого порядка): а)  $E_0=4 \cdot 10^{-6}$ ; б)  $E_0=4 \cdot 10^{-5}$ ; в)  $E_0=4 \cdot 10^{-4}$ ; г)  $E_0=4 \cdot 10^{-3}$

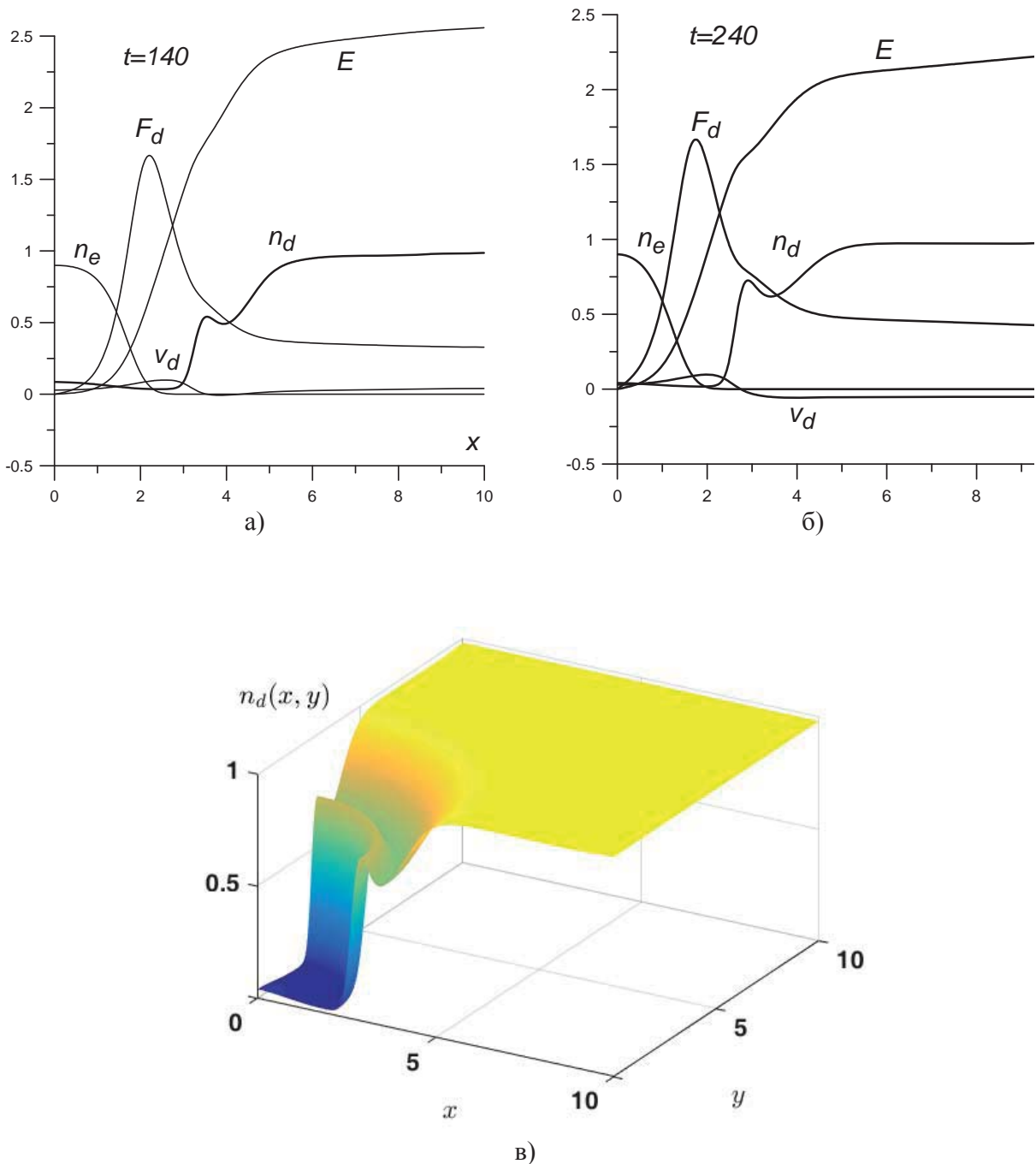


**Рис. 4.** Моделирование по схеме второго порядка с параметрами  $n_{d0}=0.3$ ,  $b=2$  (а) – (в),  $n_{d0}=0.2$ ,  $b=0.4$  (г),  $v_{d0}=0$ ,  $E_0=4 \cdot 10^{-5}$ ,  $n_i=2000$ ,  $D_0=0.1$ : а) – динамика плотности концентрации пылевой компоненты  $n_d$  во время образования войда:  $t=20$  (кривая 1),  $t=60$  (кривая 2),  $t=120$  (кривая 3); б) – графики неизвестных функций модели для установившегося режима при  $t=120$ ; в), г) – двумерные плотности распределения концентрации пылевой компоненты  $n_d$  при  $t=120$

Графики изменения плотности концентрации пылевой компоненты в граничной точке войда (кривая 1) и значение скорости пылевой компоненты  $v_d$  в точке  $x(n_i)$  (кривая 2) представлены на Рис. 6. Кривая 2 демонстрирует осцилляции малой амплитуды скорости пылевой компоненты среды, которые вызваны наличием принятого ограничения на  $v_d$ . Тем не менее, граница войда (кривая 1) не содержит осцилляций. Следует отметить, что вопрос о реализации подобных осцилляций скорости пылевых частиц  $v_d$  на границе войда является открытым.

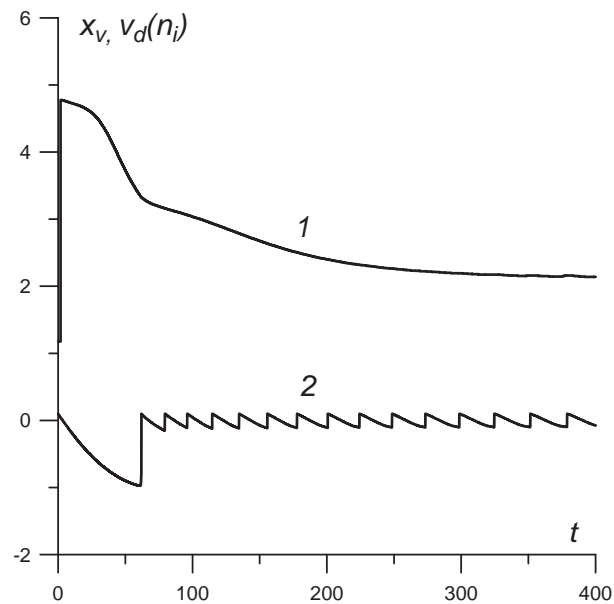
Динамика образования войда для случая  $v_{d0}=0.3$  представлена на Рис. 7. На Рис. 7а, 7б приведена динамика определяющих параметров процесса. Плотность концентрации пылевой компоненты  $n_d$  в установившемся режиме полностью сформированного войда



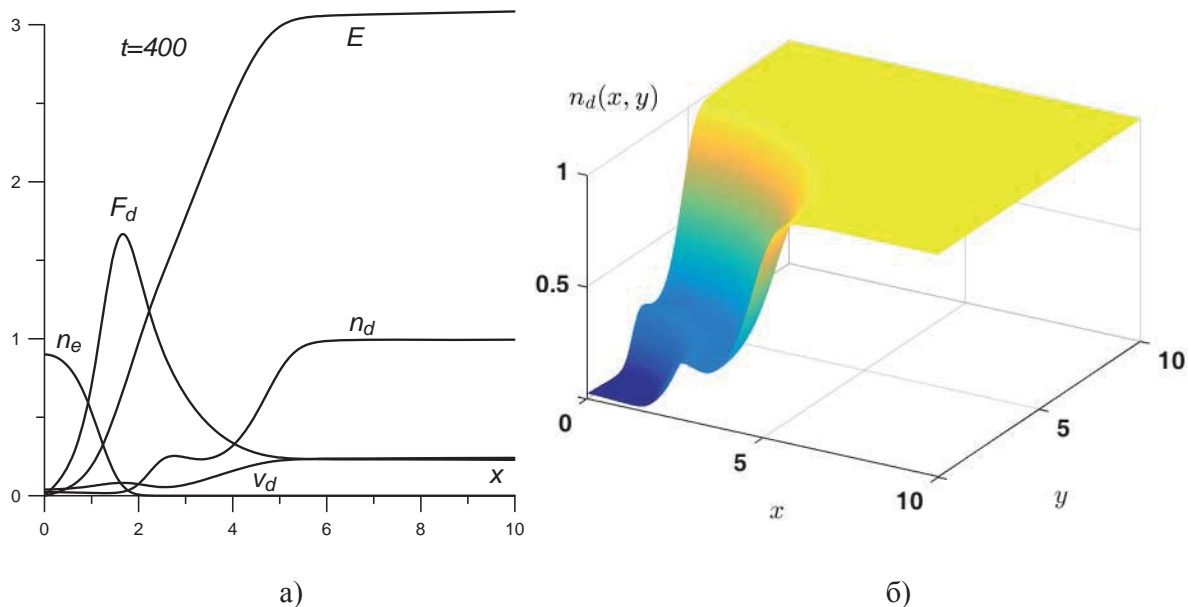


**Рис. 5.** Графики распределений неизвестных функций модели для установившегося режима образования войда, с применением схемы первого порядка,  $n_{d0}=0.1$ ,  $v_{d0}=0.1$ ,  $E_0=4 \cdot 10^{-5}$ ,  $n_i=2000$ ,  $b=2$ : а) -  $t=140$ ; б) -  $t=240$ ; в) – распределение плотности концентрации пылевой компоненты  $n_d$  в момент времени  $t=240$  (установившийся режим)

представлена на Рис. 7в. Немонотонное поведение плотности пылевой компоненты  $n_d$  может быть связано с взаимодействием простых волн, происходящим на периферии войда. Следует отметить, что двумерные распределения потока на Рис. 5, 7 полученные техникой вращения, отражают установившийся характер течения, когда произошло формирование войда и скорость пылевых частиц в его центре стала равна нулю.



**Рис. 6.** Динамика границы войда (кривая 1) и значения скорости  $v_d$  в точке  $x(n_i)$  (кривая 2), с применением схемы первого порядка, при значениях параметров  $n_{d0}=0.1$ ,  $v_{d0}=0.1$ ,  $E_0=4 \cdot 10^{-5}$ ,  $n_i=2000$



**Рис. 7.** а) – графики распределений неизвестных функций модели для установившегося режима динамики образования пылевого войда с применением схемы первого порядка,  $n_{d0}=0.1$ ,  $v_{d0}=0.3$ ,  $E_0=4 \cdot 10^{-5}$ ,  $n_i=2000$  при  $t=400$ ; б) – двумерное распределение плотности пылевой компоненты  $n_d$  при  $t=400$

## 5. Заключение

Известная модель Avinash – Bhattacharjee – Ну динамики образования войда в пылевой плазме преобразована и представлена в дивергентной форме. Для её расчёта разработан алгоритм, включающий схемы первого и второго порядка аппроксимации для

гидродинамической части модели. Проведён вычислительный эксперимент и получены результаты по образованию войда в неподвижной и движущейся пылевой плазме.

В неподвижной среде для различных режимов течения получена динамика кольцевых структур и установившиеся режимы течения, характеризующиеся образованием пылевых войдов. Исследована зависимость плотности концентрации пылевых частиц от начального значения напряженности электрического поля. Показано, что размер войда уменьшается при увеличении начального значения напряженности электрического поля.

В движущейся пылевой плазме исследовано поведение всех определяющих параметров процесса на этапе образования кольцевой структуры и в установившемся режиме, когда войд полностью сформирован.

## Литература

1. *Molotov V., Thomas H., Lipaev A., Naumkin V., Ivlev A., and Khrapak S.* Complex (dusty) plasma research under microgravity conditions: PK-3 Plus Laboratory on the International Space Station // *International Journal of Microgravity Science and Application*, 2015, **35** (3), pp. 1–8.
2. *Fortov V.E., Morgill G.E.* Complex and dusty plasmas: from laboratory to Space // CRC Press, 2009, 401 p.
3. *Feng H., Mao-Fu Y., Long W., and Nan J.* Voids in experimental dusty plasma // *Chin. Phys. Lett.*, 2004, **21** (1), pp. 121–124.
4. *Sarkar S., Mondal M., Bose M., and Mukherjee S.* Observation of external control and formation of a void in cogenerated dusty plasma // *Plasma Sources Sci. Technol.*, 2015, **24** (3), p.1–7.
5. *Feng H., Maofu Y., and Long W.* Pattern phenomena in an RF discharge dusty plasma system // *Science in China Series G: Physics, Mechanics & Astronomy*, 2006, **49** (5), pp. 588–596.
6. *Ng C.S., Bhattacharjee A., Hu. S., Ma Z.W., and Avinash K.* Generalizations of a nonlinear fluid model for void formation in dusty plasmas // *Plasma Phys. Control. Fusion.*, 2007, **49**, pp. 1583–1597.
7. *Avinash K., Bhattacharjee A., and Hu S.* Nonlinear theory of void formation in colloidal plasmas // *Phys. Rev. Lett.*, 2003, **90** (7), pp. 1–4.
8. *Kravchenko O.V., and Pustovoi V.I.* Numerical simulation of dynamics of concentric dusty–plasma structures // *Proc. 15<sup>th</sup> International Workshop on Magneto–Plasma Aerodynamics (2016, JIHT RAS, Moscow, Russia)*, Edt. by V.A. Bityurin, pp. 153–155.
9. *Кравченко О.В.* Моделирование пространственно локализованных пылевых структур в комплексной плазме // *Наноструктуры. Математическая физика и моделирование*. 2016, **15** (2), с. 51–62.
10. *Azarova O.A.* Complex conservative difference schemes for computing supersonic flows past simple aerodynamic forms // *J. Comp. Math. Math. Phys.*, 2015, **55** (12), p. 2067–2092.
11. *Kravchenko O.V., Azarova O.A. and Lapushkina T.A.* Dusty Plasma Void Dynamics in Unmoving and Moving Flows // *Proc. 7<sup>th</sup> European Conference for Aeronautics and Space Sciences (EUCASS)*, Milan, Italy, 21–24 July 2017. DOI: 10.13009/EUCASS2017-412

# GENERATION OF VOIDS IN UNMOVING AND MOVING DUSTY PLASMA

O.V. Kravchenko<sup>1-3</sup>, O.A. Azarova<sup>4</sup>

*<sup>1</sup>STC UI RAS, Moscow, Russia*

*<sup>2</sup>BMSTU, Moscow, Russia*

*<sup>3</sup>IRE RAS, Moscow, Russia*

*<sup>4</sup>CC FRS CSC RAS, Moscow, Russia*

ok@bmstu.ru

Received 05.10.2017

Simulation of steady structures with empty regions (voids) is considered numerically in unmoving and moving flows of dusty plasma. Modelling is based on the known model of Avinash, Bhattacharjee and Hu of formation of a void in a dusty plasma flow. The hydrodynamic part of the model has been reduced to the divergent form and two algorithms of first and second order of approximation have been introduced. The Lax's scheme and the complex conservative difference scheme have been used for the first and second order for the hydrodynamic part of the model. Results on the dynamics of voids have been obtained at the stage of a circular ring structure generation and a steady round void formation at the final stage. Behaviour of the defining flow parameters has been analyzed up to the steady dusty plasma void formation.