Математическая модель ценообразования для европейского опциона на неполном рынке без транзакционных издержек (дискретное время). Часть I.

Зверев О. В.*, Хаметов В. М.**, Шелемех Е. А.***
(*zv-oleg@yandex.ru; **khametovvm@mail.ru; ***letis@mail.ru)

Аннотация

В статье построена модель ценообразования для европейского опциона на многомерном неполном рынке без транзакционных издержек с дискретным временем. Сначала рассмотрена вспомогательная задача по нахождению верхнего гарантированного значения ожидаемого значения риска, экспоненциально зависящего от дефицита капитала. Верхнее гарантированное значение представляет собой минимаксное значение ожидаемого риска. Первой берется верхняя грань по множеству эквивалентных вероятностных мер, а затем – нижняя грань по множеству самофинансируемых портфелей. В статье найдены условия существования портфеля, на котором достигается нижняя грань. Этот результат позволил построить обобщение опционального разложения функции выплаты опциона. Затем получены условия существования вероятностной меры, доставляющей максимум ожидаемому значению риска. Эта мера оказалась мартингальной и дискретной, но в общем случае она не принадлежит множеству эквивалентных вероятностных мер. Наконец, показано, как полученные результаты для вспомогательной задачи позволяют получить явные формулы для цены европейского опциона на неполном рынке без транзакционных издержек. Во второй части статьи приведены примеры моделей ценообразования европейского опциона на рынках с одним рисковым активом: конечного и с компактным носителем базовой вероятностной меры.

Ключевые слова: европейский опцион, хеджирование, минимаксный портфель, неполный рынок, опциональное разложение, S-представление, функция риска.

Введение

1. В статье построена модель ценообразования европейского опциона на многомерном неполном рынке без транзакционных издержек. Ключевой проблемой при построении моделей ценообразования на неполном рынке является выбор вероятностной меры, относительно которой следует производить расчеты: на полном рынке стоимость финансовых ин-

струментов оценивают относительно единственной эквивалентной мартингальной меры, но на неполном рынке множество таких мер имеет мощность континуума.

В [5], [8], [9], [10], [12], [17], [19] для целей расчетов предложено выбрать ту эквивалентную вероятностную меру, относительно которой цена европейского опциона максимальна. Предложены также методы построения портфелей и расчета цены опциона для различных моделей неполных рынков.

В [5] получено опциональное разложение для случая, когда цена рискового актива описывается диффузионным процессом со скачками. С помощью этого разложения доказано существование суперхеджирующего портфеля с потреблением и найдена цена опциона.

Авторы работ [9], [12], [19], [8], [10], [17] доказали существование опционального разложения (для функции выплаты) относительно класса эквивалентных мартингальных мер в случае неполного безарбитражного рынка без транзакционных издержек, когда эволюция цены рискового актива описывается полумартингалом. Предложен метод расчета цены европейского опциона на неполном рынке в терминах полученного разложения.

В [11] для абстрактной модели рынка установлены необходимые и достаточные условия существования представления для верхней цены хеджирования $\pi(B)$, где B — неотрицательное платежное обязательство, имеющее вид $\sup\limits_{\eta\in D} E\eta B$, а D — множество неотрицательных случайных величин. Статья также содержит детальный обзор результатов по теории суперхеджирования европейских опционов на неполном рынке.

Отметим, что описанный подход к оценке стоимости опциона требует вычисления существенной верхней грани от условного математического ожидания функционала (определенного на траекториях цен рисковых активов) по множеству мартингальных мер, что представляет собой самостоятельную математическую проблему. По этой причине в [5], [8], [9], [10], [12], [17], [19] отсутствуют явные формулы для процессов, описывающих динамику портфеля и капитала. Как известно [1], [6], [13], что вычисление существенной верхней грани условного математического ожидания от аддитивного или мультипликативного функционала (определенного на траекториях наблюдаемого случайного процесса) является объектом изучения стохастического оптимального управления, где эта проблема решается методами стохастического динамического программирования (см., например, [5]).

2. В отличие от [5], [8], [9], [10], [12], [17], [19], в этой статье для построения модели ценообразования европейского опциона на неполном рынке

без транзакционных издержек в дискретном времени применен минимаксный принцип, который можно сформулировать следующим образом: 1) поскольку распределение вероятностей цен рисковых активов не известно, то следует предполагать "наихудшее" , т.е. что оно доставляет максимум цены европейского опциона; 2) при формировании портфеля необходимо, затратив минимальный капитал, приобрести столько рисковых активов, чтобы обеспечить выплату по опциону. Этот принцип реализован в статье благодаря двум возможностям. Первая связана с возможностью свести минимаксную задачу к игровой задаче оптимального стохастического управления, а вторая — с тем, что удалось (на базе результатов [4]) свести задачу расчета европейского опциона к игровой задаче стохастического оптимального управления с мультипликативным функционалом.

3. Кратко опишем наш подход к моделированию цены европейского опциона. Рассматривается многомерный неполный рынок, заданный полумартингалом, и на нем — европейский опцион с конечным горизонтом и ограниченной функцией выплаты.

Сначала рассмотрена вспомогательная игровая задача, а именно: предполагается, что два игрока наблюдают динамику d-мерной последовательности цен рисковых активов. Первый рынок представляет рынок. Его стратегиями являются вероятностные меры, определенные на траекториях цен рисковых активов и эквивалентные некоторой базовой мере. Второй игрок управляет допустимыми (в поясненном ниже смысле) самофинансирующими портфелями активов (которые описываются многомерными предсказуемыми последовательностями). Предполагается, что функция риска (функция выплаты для второго игрока): 1) зависит от дефицита его портфеля, 2) экспоненциальная (такой выбор будет объяснен ниже). Аналогично [10], здесь дефицит определяется как разность между величиной обязательств и прибылью второго игрока от управления портфелем в течение срока действия опциона. Также предполагается, что игроки "разумны" и выбирают свои стратегии независимо друг от друга. Первый игрок старается максимизировать ожидаемый риск, а второй — минимизировать его. Таким образом, получили минимаксную задачу.

Идея рассмотрения такой минимаксной задачи восходит к [4], где она решена для одного частного случая. Авторы, чтобы доказать существование S-представления для мартингалов, применили метод стохастического динамического программирования (определение S-представления см. в [17]). Здесь этот результат обобщен (см. теорему 4). Поясним, что выбор экспоненциальной функции риска связан с тем, что ее свойство мультипликативности позволяет применить указанный метод. В свою очередь, решение вспомогательной задачи дает возможность: 1) построить аналог опционального разложения для любой измеримой ограниченной функции, т.е. для любого платежного обязательства в задаче расчета европейского опциона на неполном рынке без транзакционных издержек; 2) Исследовать свойства меры, относительно которой достигается существенная верхняя грань условного математического ожидания; 3) выбрать вероятностную меру, относительно которой следует производить расчет опциона. Наконец, все изложенное позволило построить модель ценообразования европейского опциона на неполном рынке, а именно: 1) построить портфель активов в любой момент времени и рассчитать соответствующий ему капитал; 2) вычислить верхнюю границу спреда.

4. Структура статьи. Статья состоит из двух частей. Здесь приведен обзор первой части. Раздел 1 посвящен вспомогательной игровой задаче (2). Сначала показано, что для ее решения применим стохастичейкий вариант метода динамического программирования: доказано, что последовательность верхних гарантированных значений удовлетворяет рекуррентному соотношению (5) (теорема 1). Далее установлены условия существования допустимого портфеля, доставляющего внешнюю существенную нижнюю грань (Theorem 3). Этот результат использован при доказательстве того, что платежное обязательсво допускает опциональное разложение относительно класса эквивалентных вероятностных мер (теорема 4). Далее, установлены условия существования вероятностной меры, доставляющей внутреннюю верхнюю грань (Theorem 6). В совокупности доказанные теоремы дают условия существования решения вспомогательной задачи (теорема 8). Для удовбства читателя все доказательства вынесены в раздел 3.

Раздел 2 посвящен построению модели ценообразования европейского опциона на неполном рынке без транзакционных издержек в дискретном времени. Сначала с помощью теоремы 4 (аналог рпционального разложения) устанавливается связь вспомогательной задачи (2) задачи суперхеджирования [17]; а именно, построен совершенный суперхеджирующий портфель европейского опциона на неполном рынке без транзакционных издержек (теорема 10). Здесь также доказано, что капитал упомянутого совершенного суперхеджирующего портфеля (построенного для экспоненциальной функции риска) не превосходит капитал любого другого совершенного суперхеджирующего портфеля в любой момент. Последнее означает, что капитал минимального совершенного суперхеджирующего портфеля совпадает с верхней границей спреда. Далее, доказано, что мера, доставляющая существенную верхнюю грань (построенная в разделе 1 и называемая в статье "наихудшей"), является мартингальной (теорема 11), а функция выплаты допускает относительно нее S-представление [17] (теорема 12). Кроме того, доказано существование дискретной "наихудшей" меры (теорема 13). В случае неполного рынка она не эквивалентна базовой мере. Из приведенных результатов вытекает, что относительно "наихудшей" меры исходный неполный рынок можно отождествить с полным, причем соответствующий минимальный суперхеджирующий портфель имеет тривиальное потребление. Такой портфель назван минимаксным хеджирующим. Отметим, что капитал минимаксного хеджирующего портфеля совпадает с верхней границей спреда. И поскольку относительно "наихудшей" меры рынок полон, верхнюю границу спреда можно посчитать явно. Все утверждения раздела 2 доказаны в разделе 4.

Вторая часть статьи состоит из двух разделов с примерами. Применив модель, построенную в части I, в разделе 5 мы получили минимаксный хеджирующий портфель для европейского опциона на одномерном конечном неполном рынке. В разделе 6 приведен пример модели ценообразования европейского опциона на одномерном неполном рынке с компактным носителем.

§1. Вспомогательная минимаксная задача

В этом разделе рассматривается вспомогательная задача (2), а его результат — условия существования решения этой задачи. Утверждения этого раздела играют существенную роль при построении (в разделе 2) модели ценообразования опциона. Однако, задача (2) и примененный здесь подход к ее решению имеют и самостоятельную ценность.

1.1. Введем сначала ряд обозначений.

1.1.1. Пусть $\{S_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{N}^+}$ — это d-мерный согласованный случайный процесс, заданный на стохастическом базисе $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}^+}, \mathsf{P}\right)$. Предположим, что:

1) вероятностная мера P фиксирована (ее называют *базовой* [17]);

2) для любого $t \in \mathbb{N}^+$: $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^S \triangleq \sigma\left(S_u, u \le t\right)$.

Вместе стохастический базис $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}^+}, \mathsf{P}\right)$ и $\{S_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in\mathbb{N}^+}$ определяют финансовый $\{1, S\}$-рынок [17].

Через $\Re_N$ обозначим множество всех вероятностных мер, заданных на $\left(\Omega, \mathcal{F}, \left(\mathcal{F}_t^S\right)_{t\in N_0}\right)$, эквивалентных базовой мере P. Без потери общности можно считать, что $\mathsf{P} \in \Re_N$; таким образом, $\Re_N \neq \varnothing$. Множество всех мартингальных мер (т.е. мер, относительно которых $\{S_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in N_0}$ — локальный мартингал, см. также [17]) обозначено через $\mathfrak{M}_N$.

Для математического ожидания случайной величины θ относительно вероятностной меры Q (P) будем писать $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\theta$ $\left(\mathsf{E}^{\mathsf{P}}\theta\right)$, а $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left(\theta|\mathcal{F}_t^S\right)$ — условное математическое ожидание относительно меры Q и σ-алгебры $\mathcal{F}_t^S$.

1.1.2. Пусть $f_N\left(S_\bullet\right)$ — ограниченная $\mathcal{F}_N^S$-измеримая случайная величина, где $N \in \mathbb{N}^+$. В статье $f_N\left(S_\bullet\right)$ (или, кратко, f_N) представляет функцию выплаты европейского опциона с *горизонтом* N [17], [10]. Будем писать $N_k \triangleq \{k, k+1, k+2, \ldots, N\}$, $k \in \{0, ..., N\}$.

Последовательность d-мерных $\mathcal{F}^S$-предсказуемых случайных величин называют *стратегией*, будем обозначать ее через $\gamma_1^N \triangleq \{\gamma_t\}_{t\in N_1}$, где $N_1 \triangleq \{1, 2, \ldots, N\}$. Элемент γ_t — это управление в момент времени $t \in N_1$. Через U_1^N обозначим множество стратегий. Если $\widetilde{U}_1^N$ — произвольное подмножество U_1^N, то через $\widetilde{U}_{t_1}^{t_2}$ будем обозначать сужение множества $\widetilde{U}_1^N$ на $\{t_1, \ldots, t_2\} \subseteq N_1$, где $t_1, t_2 \in N_1$ and $t_2 \geq t_1$. Кроме того, будем использовать запись: $\gamma_{t_1}^{t_2} \in \widetilde{U}_{t_1}^{t_2}$, где $\gamma_{t_1}^{t_2} \triangleq \{\gamma_{t_1}, \ldots, \gamma_{t_2}\}$.

1.1.3.

Определение 1 *Пару* $\left(\mathsf{Q}, \gamma_{t+1}^N\right) \in \Re_N \times U_{t+1}^N$ *будем называть t-бистратегией,* $t \in N_1$*;* $\left(\mathsf{Q}, \gamma_1^N\right) \in \Re_N \times U_1^N$ *— это бистратегия, а* $\gamma_{t+1}^N \in \widetilde{U}_{t+1}^N$ *есть t-стратегия.*

Определение 2 *Оценкой t-бистратгии* $\left(\mathsf{Q}, \gamma_{t+1}^N\right)$, $t \in N_1$ *назовем $\mathcal{F}_t^S$-измеримую случайную величину (которую обозначим через* $I_t^{\mathsf{Q},\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right)$*), определенную равенством*

$$I_t^{\mathsf{Q},\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right) \triangleq \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\exp\left\{f_N\left(S_\bullet\right) - \sum_{i=t+1}^{N}\left(\gamma_i, \Delta S_i\right)\right\}|\mathcal{F}_t^S\right]. \qquad (1)$$

Здесь $(\bullet, \bullet)$ — это скалярное произведение в многомерном евклидовом пространстве, а $\Delta S_i \triangleq S_i - S_{i-1}$.

Определение 3 *Случайная величина* $f_N\left(S_\bullet\right)$ *и стратегия* γ_1^N *называются допустимыми, если* $\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} I_0^{\mathsf{Q},\gamma_1^N}\left(S_0\right) < \infty \quad \mathsf{Q} -$ *п.н.*

В силу Q-п.н. ограниченности f_N пара $\left(f_N, \gamma_1^N\right)$ допустима, если $\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\exp\left\{-\sum_{i=1}^{N}\left(\gamma_i, \Delta S_i\right)\right\} < \infty \quad \mathsf{Q} -$ п.н. Для заданной f_N через D_1^N будем обозначать множество всех соответствующих ей допустимых стратегий γ_1^N. Отметим, что $D_1^N \neq \varnothing$, поскольку тривиальная стратегия принадлежит допустимой паре $\left(f_N, \gamma_1^N\right)$ при любой Q-п.н. ограниченной f_N.

Определение 4 *Бистратгию* $\left(\mathsf{Q}, \gamma_1^N\right) \in \Re_N \times D_1^N$ *назовем допустимой.*

Будем рассматривать следующую задачу:

$$I_0^{\mathsf{Q},\gamma_1^N}\left(S_0\right) \longrightarrow \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_1^N \in D_1^N} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N}. \tag{2}$$

Определение 5 *Случайную величину* $\overline{V}_0 \triangleq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_1^N \in D_1^N} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} I_0^{\mathsf{Q},\gamma_1^N}\left(S_0\right)$ *назовем верхним гарантированным значением.*

Определения существенной нижней грани ess inf и существенной верхней грани ess sup относительно базовой меры P приведены, например, в [7], [10], [17], [18].

Отметим, что $\overline{V}_0$ является $\mathcal{F}_0^S$-измеримой.

Определение 6 *Тройка* $\left(\mathsf{Q}^*, \gamma_1^{*N}, \overline{V}_0\right)$*:*

$$\overline{V}_0 = I_0^{\mathsf{Q}^*,\gamma_1^{*N}}\left(S_0\right) \tag{3}$$

есть решение минимаксной задачи (2); соответствующую вероятностную меру Q^* *назовем "наихудший", стратегию* $\gamma_1^{*N} \in D_1^N$ *— минимаксной, а вместе* $\left(\mathsf{Q}^*, \gamma_1^{*N}\right)$ *— это минимаксная бистратегия.*

1.2. Чтобы решить задачу (2) будем применять стохастический вариант метода динамического программирования. Поэтому нам необходимо определить последовательность верхних гарантированных значений.

Определение 7 *Случайная величина*

$$\overline{V}_t \triangleq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} I_t^{\mathsf{Q},\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right) \tag{4}$$

называется верхним гарантированным значением в момент времени $t \in N_0$.

Согласно определениям верхней и нижней существенных граней и $I_t^{\mathsf{Q},\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right)$ величина $\overline{V}_t$ является $\mathcal{F}_t^S$-измеримой.

В этом подразделе приведено рекуррентное соотношение для последовательности $\left\{\overline{V}_t, \mathcal{F}_t^S\right\}_{t\in N_0}$.

Теорема 1 *Пусть* $f_N(S_\bullet)$ — $\mathcal{F}_N^S$*-измеримая ограниченная случайная величина. Тогда* $\left\{\overline{V}_t, \mathcal{F}_t^S\right\}_{t\in N_0}$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению* P*-п.н.*

$$\begin{cases} \overline{V}_t = \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma\in D_{t+1}} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{V}_{t+1}e^{-(\gamma,\Delta S_{t+1})}|\mathcal{F}_t^S\right], \quad 0\le t<N, \\ \overline{V}_t|_{t=N} = e^{f_N(S_\bullet)}. \end{cases} \tag{5}$$

Следствие 1 *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда справедливы неравенства* P*-п.н.*

(1) для любых $t\in N_1$ *и* $\mathsf{Q}\in\Re_N$*:*

$$\overline{V}_{t-1} \ge \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma\in D_t} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma,\Delta S_t)}|\mathcal{F}_{t-1}^S\right]; \tag{6}$$

(2) для любых $t\in N_1$ *и* $\gamma\in D_t$*:*

$$\overline{V}_{t-1} \le \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma,\Delta S_t)}|\mathcal{F}_{t-1}^S\right]. \tag{7}$$

1.3. Априори можно дать седующие оценки для верхнего гарантированного значения.

Теорема 2 *Пусть:*

1) выполнены условия теоремы 1;

2) существует константа c_2 *такая, что* $|f_N(S_\bullet)|\le c_2$ P*-п.н.;*

3) $\Re_N\cap\mathfrak{M}_N\ne\varnothing$.

Тогда для любого $t\in N_1$ *справедливы неравенства* P*-п.н.*

$$e^{-c_2}\le\overline{V}_t\le e^{c_2}. \tag{8}$$

1.4. Здесь приведены достаточные условия того, что внешняя существенная нижняя грань в (5) достигается.

Теорема 3 *Пусть:*

1) выполнены условия теоремы 1;

2) $\Re_N\cap\mathfrak{M}_N\ne\varnothing$.

Тогда существует стратегия $\{\gamma_t^*\}_{t\in N_1}\in D_1^N$ *такая, что для любого* $t\in N_1$ P*-п.н.*

$$\begin{aligned} \overline{V}_t &= \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma\in D_{t+1}} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{V}_{t+1}e^{-(\gamma,\Delta S_{t+1})}|\mathcal{F}_t^S\right] = \\ &= \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{V}_{t+1}e^{-\left(\gamma_{t+1}^*,\Delta S_{t+1}\right)}|\mathcal{F}_t^S\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Также для любых $t\in N_1$ *и* $\mathsf{Q}\in\Re_N$ *справедливо неравенство*

$$\overline{V}_{t-1}\ge\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*,\Delta S_t)}|\mathcal{F}_{t-1}^S\right] \quad \mathsf{P}-п.н. \tag{10}$$

Замечание 1 *Следствие 1 для любых $t \in N_0$ и $\mathsf{Q} \in \Re_N$ дает*

$$\overline{V}_t \geq I_t^{\mathsf{Q},\gamma_{t+1}^{*N}}\left(S_0^t\right) \quad \mathsf{Q}\left(\mathsf{P}\right) - п.н.,$$

где $\gamma_{t+1}^{*N} \in D_{t+1}^N$ удовлетворяет (9).

1.5. В этом подразделе, с помощью теоремы 3, получены условия, при которых любая $\mathcal{F}_N^S$-измеримая ограниченная случайная величина допускает представление, аналогичное опциональному разложению [10], [17].

Теорема 4 *Пусть $\left\{\overline{V}_t, \mathcal{F}_t^S\right\}_{t\in N_0}$ определена формулой (5). Предположим также, что существует стратегия $\{\gamma_t^*\}_{t\in N_1} \in D_1^N$, удовлетворяющая (9) для любого $t \in N_1$. Тогда для любых $t \in N_1$ и $\mathsf{Q} \in \Re_N$ последовательность*

$$\Delta C_t^* \triangleq \Delta \ln \overline{V}_t - (\gamma_t^*, \Delta S_t) \geq 0, \;\; C_0^* = 0 \quad \mathsf{Q} - п.н., \tag{11}$$

неубывает Q-п.н. и относительно любой $\mathsf{Q} \in \Re_N$ справедливо представление:

$$f_N\left(S_\bullet\right) = \ln \overline{V}_0 + \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i) - C_N^* \quad \mathsf{Q} - п.н. \tag{12}$$

Замечание 2 *1) Пусть $Y_t \triangleq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N\cap\mathfrak{M}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f|\mathcal{F}_t^S\right]$, где f — $\mathcal{F}_N^S$-измеримая ограниченная случайная величина. В [17] (теорема на стр. 674) доказано, что $\left\{Y_t, \mathcal{F}_t^S\right\}_{t\in N_0}$ является супермартингалом относительно любой $\mathsf{Q} \in \Re_N \cap \mathfrak{M}_N$.*

2) Согласно [10] (теорема 7.5 на стр. 330) следующие утверждения эквивалентны:

а) $\left\{Y_t, \mathcal{F}_t^S\right\}_{t\in N_0}$ — супермартингал относительно любой $\mathsf{Q} \in \Re_N \cap \mathfrak{M}_N$;

б) найдется неубывающая согласованная последовательность $\{C_t^*\}_{t\in N_0}$ и d-мерная предсказуемая последовательность $\{\gamma_t^*\}_{t\in N_1}$ такие, что Y_t допускает представление $Y_t = Y_0 + \sum\limits_{i=1}^t (\gamma_i^*, \Delta S_i) - C_t^*$ P-п.н. Это представление называют опциональным разложением или равномерным разложением Дуба [5, 8, 9, 10, 12].

Отличие теоремы 4 от указанных работ состоит в том, что она:

i) не требует, чтобы последовательность $\left\{\ln \overline{V}_t, \mathcal{F}_t^S\right\}_{t\in N_0}$ была супермартингалом относительно любой меры $\mathsf{Q} \in \Re_N \cap \mathfrak{M}_N$, $\Re_N \cap \mathfrak{M}_N \neq \varnothing$;

ii) дает конструктивный способ построения d-мерной предсказуемой минимаксной стратегии γ_1^{*N} и неубывающей согласованной последовательности $\{C_t^*\}_{t\in N_0}$ — компонент опционального разложения (12);

При доказательстве теоремы 4 результаты [5, 8, 9, 10, 12] не использовались.

3) Из теоремы 4 следует неравенство для любой $\mathsf{Q}\in\Re_N$:

$$f_N\left(S_\bullet\right)\leq\ln\overline{V}_0+\sum_{i=1}^{N}\left(\gamma_i^*,\Delta S_i\right)\quad \mathsf{Q}-\text{п.н.}$$

Таким образом, если последовательность $\left\{S_t,\mathcal{F}_t^S\right\}_{t\in N_0}$ — локальный мартингал относительно Q, то $\left\{\ln\overline{V}_t,\mathcal{F}_t^S\right\}_{t\in N_0}$ и $\left\{\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[f_N\left(S_\bullet\right)|\mathcal{F}_t^S\right]\right\}_{t\in N_0}$ — супермартингалы относительно любой меры $\mathsf{Q}\in\Re_N$.

4) Условие $\Re_N\cap\mathfrak{M}_N\neq\varnothing$ означает, что рассматриваемый $(1,S)$-рынок не полон.

1.6. Следующая теорема дает условия (технического характера) существования "наихудшей" вероятностной меры.

Теорема 5 *Для произвольной $\mathcal{F}_N$–измеримой P-п.н. ограниченной случайной величины ξ справедливы утверждения:*

1) существуют

заданная на $(\Omega,\mathcal{F})$ вероятностная мера λ такая, что $\lambda\gg\mathsf{Q}$ для любой $\mathsf{Q}\in\Re_N$, и

последовательность неотрицательных $\mathcal{F}$-измеримых случайных величин $\{X_k\}_{k\geq1}$, для которых: i) $\mathsf{E}^\lambda X_k=1$, $k\geq1$; ii) $\sup\limits_{\mathsf{Q}\in\Re}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\xi=\lim\limits_{k\to\infty}\mathsf{E}^\lambda X_k\xi$;

2) если $\{X_k\}_{k\geq1}$ относительно слабо компактно в $L^1(\Omega,\mathcal{F},\lambda)$, то найдется вероятностная мера Q^*, заданная на $(\Omega,\mathcal{F})$:

$$\sup_{\mathsf{Q}\in\Re_N}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\xi=\mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\xi. \tag{13}$$

Замечание 3 *1) Условие о относительной слабой компактности $\{X_k\}_{k\geq1}$ трудно проверить, поэтому теорема носит "технический" характер. Вместе с тем, она позволяет рассматривать далее свойства решения задачи (2).*

2) В отличие от [10], [17], теорема 5 дает достаточные условия того, что интеграл Лебега ограниченной измеримой случайной величины *достигнет своей верхней грани на множестве эквивалентных вероятностных мер. Известно [2], [16], что, как правило, верхняя грань достигается на конечно-аддитивной мере. В таком случае математическое ожидание не определено, что, в свою очередь, делает невозможным построение решения задачи расчета опциона. Поэтому теорема 5 существенна для наших построений. Отметим, что известны (например, [2], [16]) и другие, также трудно применимые на практике, условия счетной аддитивности "экстремальной" меры.*

3) В силу теоремы Данфорда-Петтиса [10] условие теоремы 5 об относительной слабой компактности множества $\{X_k\}_{k\geq 1}$ эквивалентно требованию об его ограниченности и равномерной интегрируемости в $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$. Также, если $\{X_k\}_{k\geq 1}$ слабо замкнуто и выпукло, то, согласно теореме Джеймса [10], относительная слабая компактность $\{X_k\}_{k\geq 1}$ является не только достаточным, но и необходимым условием достижения интегралом Лебега верхней грани.

4) Очевидно, что если $\xi(\omega)$ принимает значения в конечном множестве или в не более чем счетном объединении компактных множеств, то: i) найдется $\omega^* \in \Omega$: $\xi(\omega^*) = \sup\limits_{\omega\in\Omega}$; ii) $\sup\limits_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\xi$ is attained on Q^*: $\mathsf{Q}^*(\{\omega^*\}) = 1$, $\mathsf{Q}^*(\Omega\setminus\omega^*) = 0$.

1.7. В этом разделе на основании теорем 3 и 5 получено новое рекуррентное соотношение для последовательности верхних гарантированных значений.

Теорема 6 *Пусть выполнены условия теорем 3 и 5. Тогда $\left(\overline{V}_t, \mathcal{F}_t^S\right)_{t\in N_1}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению Q^*-п.н.*

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{V}_{t-1} = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right], \\ \overline{V}_t|_{t=N} = \exp\{f_N\left(S_\bullet\right)\}. \end{array}\right. \tag{14}$$

1.8. Из теорем 4 и 5 вытекает следующее важное утверждение.

Следствие 2 *Если $\left(\overline{V}_t, \mathcal{F}_t^S\right)_{t\in N_1}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (14), то для любого $t \in N_0$ имеет место разложение (11) относительно Q^*, т.е.*

$$\Delta \ln \overline{V}_t = (\gamma_t^*, \Delta S_t) - \Delta C_t^* \quad \mathsf{Q}^* - \text{п.н.} \tag{15}$$

1.9. В этом разделе приведен критерий для "наихудшей" меры.

Определение 8 *Определим последовательность* $\left\{\overline{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S\right\}_{t\in N_0}$ *формулой*

$$\overline{\mu}_t \triangleq \overline{V}_t \exp\left\{-\sum_{i=1}^{t}\left(\gamma_i^*, \Delta S_i\right)\right\}, \tag{16}$$

где $\overline{V}_t$ *удовлетворяет рекуррентному соотношению (5), а* $\{\gamma_t^*\}_{t\in N_1} \in D_1^N$ *— минимаксная стратегия, определенная формулой (9). Последовательность* $\left\{\overline{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S\right\}_{t\in N_0}$ *называют верхней* S*-оценивающей.*

Замечание 4 *Из теоремы 3 (неравенство (10)), что верхняя* S*-оценивающая последовательность является супермартингалом относительно любой меры* $\mathsf{Q} \in \Re_N$.

Теорема 7 *Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(1) Q^* *— "наихудная" вероятностная мера;*

(2) для любого $t \in N_1$ *верны равенства (14);*

(3) верхняя S*-оценивающая последовательность* $\left\{\overline{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S\right\}_{t\in N_0}$ *является мартингалом относительно* Q^*.

1.10. Следующее утверждение, основное для этого параграфа, непосредственно следует из теорем 1–7.

Теорема 8 *Пусть выполнены условия теоремы 6. Тогда существует решение минимаксной задачи (2).*

§2 Минимаксное хеджирование европейского опциона на неполном рынке

В этом параграфе, на основании результатов параграфа 1, установлена связь задачи (2) и задачи расчета европейского опциона на неполном рынке без транзакционных издержек. Также здесь приведены условия существования минимального совершенного суперхеджирующего портфеля (теорема 10). А теорема 6 позволила сформулировать следующие утверждения: 1) "наихудшая" мера Q^* является мартингальной (теорема 11); 2) для любого ограниченного платежного обязательства существует S-представление [17] относительно Q^* (теорема 12). Далее, установлено, что "наихудшая" мера Q^* дискретна и, в общем случае, не принадлежит множеству $\Re_N$ (теорема 13). Поэтому $(1, S)$-рынок относительно Q^* правомерно назвать "наихудшим" полным, а соответствующий портфель — минимаксным хеджирующим. Наконец, приведен и обоснован метод нахождения цены европейского опциона, обращающегося на неполном рынке без транзакционных издержек (теорема 15).

2.1. В этом разделе приведены некоторые известные понятия теории расчета опцинов (см. [17], [10]); экономическую интерпретацию приведенных понятий можно найти, например, в [10].

2.1.1 Пусть $\{S_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in N_0}$ — d-мерная согласованная последовательность, определенная в разделе 1.1.1. Предполагается, что она описывает эволюцию цен d рисковых активов [17]. Также будем считать, что имеется один безрисковый актив [17] с нулевой доходностью и начальной стоимостью 1. Такой набор активов называют $(1, S)$-рынком [17]. Пусть $f_N(S_\bullet)$ — $\mathcal{F}_N^S$-измеримая случайная величина, имеющая смысл величины (в денежном выражении) платежного обязательства со сроком погашения $N \in \mathbb{N}^+$ [17]. Пусть $\{\beta_t\}_{t\in N_0}$ — $\mathcal{F}^S$-измеримая одномерная последовательность (элементы которой будем интерпретировать [17] как количество безрискового актива в соответствующие моменты времени), а $\{\gamma_t\}_{t\in N_1}$ — $\mathcal{F}^S$-предсказуемая d-мерная последовательность, введенная в разделе 1.1.2. Последнюю последовательность называют также стратегией. Компонента i $\left(i = \overline{1, d}\right)$ вектора γ_t интерпретируется [17] как количество i-ого рискового актива в момент времени $t \in N_1$. Последовательность пар $\pi \triangleq (\beta_t, \gamma_t)_{t\in N_0}$ называют портфелем. Капитал портфеля π в момент времени $t \in N_0$ [17] на $(1, S)$-рынке определяется как $\mathcal{F}_t^S$-измеримая случайная величина X_t^π:

$$X_t^\pi = \beta_t + (S_t, \gamma_t)\,. \tag{17}$$

Портфель π называют самофинансируемым [17], если для любого $t \in N_1$ имеем P-п.н.

$$\Delta\beta_t + (S_{t-1}, \Delta\gamma_t) = 0. \tag{18}$$

Множество самофинансируемых портфелей обозначим через SF.

Согласованную неубывающую последовательность $C \triangleq \left\{C_t, \mathcal{F}_t^S\right\}_{t\in N_0}$ с $C_t|_{t=0} = 0$ называют потреблением [17], а пару (π, C) — портфелем с потреблением [17]. Капитал портфеля с потреблением (π, C) в момент времени $t \in N_0$ обозначим $\widehat{X}_t^{(\pi)}$, он определяется равенством

$$\widehat{X}_t^\pi \triangleq X_t^\pi - C_t. \tag{19}$$

Из (17)–(19) получаем, что в любой момент $t \in N_0$ капитал $\widehat{X}_t^\pi$ самофинансируемого портфеля с потреблением (π, C) допускает представление P-п.н.

$$\widehat{X}_t^\pi = \widehat{X}_0^\pi + \sum_{i=1}^{t} (\gamma_i, \Delta S_i) - C_t. \tag{20}$$

2.1.2. Говорят, что $(1, S)$-рынок является безарбитражным, если для капитала любого портфеля $\pi \in SF$ равенство $\mathsf{P}\left(X_N^\pi \geq 0 | X_0^\pi = 0\right) = 1$ влечет $\mathsf{P}\left(X_N^\pi = 0 | X_0^\pi = 0\right) = 1$. Известно [17], что $(1, S)$-рынок, на котором имеется хотя бы одна мартингальная мера, является безарбитражным.

2.1.3. Напомним [17], что безарбитражный $(1, S)$-рынок называют полным относительно меры $\tilde{\mathsf{Q}} \in \Re_N \cap \mathfrak{M}_N$, если дл любого ограниченного $f_N\left(S_\bullet\right)$ найдется портфель $\pi \in SF$ с капиталом X_N^π такой, что $f_N\left(S_\bullet\right) = X_N^\pi \quad \tilde{\mathsf{Q}} -$ п.н.

Определение 9 *[17]. Говорят, что одномерный мартингал $\left(\Theta_t, \mathcal{F}_t^S\right)_{t \in N_0}$ допускает S-представление относительно d-мерного мартингала $\left(S_t, \mathcal{F}_t^S\right)_{t \in N_0}$ и меры $\tilde{\mathsf{Q}} \in \Re_N \cap \mathfrak{M}_N$, если найдется $\mathcal{F}^S$-предсказуемая d-мерная последовательность $\{\gamma_t\}_{t \in N_1}$ такая, что для любого $t \in N_0$,*

$$\Theta_t = \Theta_0 + \sum_{i=1}^{t} \left(\gamma_i, \Delta S_i\right) \quad \tilde{\mathsf{Q}} - \text{п.н.} \tag{21}$$

Известно следующее утверждение (см. [10], [17]).

Теорема 9 *Если $\tilde{\mathsf{Q}} \in \mathfrak{M}_N \cap \Re_N \, (\neq \varnothing)$, то следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $(1, S)$-рынок полон;

(2) $\mathfrak{M}_N \cap \Re_N = \left\{\tilde{\mathsf{Q}}\right\}$;

(3) любой локальный мартингал $\left(\Theta_t, \mathcal{F}_t^S\right)_{t \in N_0}$ допускает S-представление относительно меры $\tilde{\mathsf{Q}} \in \mathfrak{M}_N \cap \Re_N$.

Поэтому неполный рынок часто определяют [10], [17] следующим образом: безарбитражный $(1, S)$-рынок не полон, если $|\mathfrak{M}_N \cap \Re_N| > 1$.

2.1.4. Вообще говоря, определенный выше $(1, S)$-рынок (см. раздел 2.1.1) не полон. Поэтому возникает проблема выбора меры, относительно которой следует производить расчет стоимости европейского опциона. Выше отмечалось, что в статье для решения этой проблемы использован минимаксный подход, что позволило описать $(1, S)$-market посредством "наихудшей" вероятностной меры. Для этого потребуются результаты параграфа 1.

2.1.5. $(1, S)$-рынок называют неизбыточным [10], если для любых $t \in N_0$ и $\mathsf{Q} \in \Re_N$ из $(\gamma_t, \triangle S_t) = 0$ Q-п.н. следует $\gamma_t = 0$ Q-п.н. Отметим, что условие неизбыточности не является ограничительным: "лишние" активы можно просто исключить из рассмотрения.

2.2. Дадим теперь определение минимаксного суперхеджирующего портфеля с потреблением.

О п р е д е л е н и е 10 *[17]. Самофинансируемый портфель с потреблением (π, C) на $(1, S)$-рынке в задаче расчета европейского опциона с функцией выплаты $f_N(S_\bullet)$ называют суперхеджирующим с потреблением, если $f_N(S_\bullet) \le \widehat{X}_N^\pi \quad \mathsf{P}-$п.н.*

О п р е д е л е н и е 11 *[17]. Суперхеджирующий портфель с потреблением (π, C) называют совершенным, если*

$$f_N(S_\bullet) = \widehat{X}_N^\pi \quad \mathsf{P}-\text{п.н.} \tag{22}$$

Условия существования совершенного суперхеджирующего портфеля относительно меры $\mathsf{Q} \in \mathfrak{M}_N \cap \Re_N$ можно найти в [17] (см. теорему 2, с. 652) и в [10] (см. теорему 7.13, с. 335).

О п р е д е л е н и е 12 *Совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением (π^*, C^*) является минимальным, если для любого другого совершенного суперхеджирующего портфеля с потреблением (π, C) и для любого $t \in N_0$ справедливо неравенство P-п.н.:*

$$\widehat{X}_t^{\pi^*} \le \widehat{X}_t^\pi. \tag{23}$$

В этом разделе приведены условия существования минимального совершенного суперхеджирующего портфеля с потреблением, основанные на утверждении теоремы 4. Кроме того, приведенное утверждение устанавливает связь между задачей (2) и задачей минимаксного хеджирования европейского опциона на неполном $(1, S)$-рынке.

Т е о р е м а 10 *Пусть имеется $(1, S)$-рынок, и выполнены условия теоремы 4. Тогда существует портфель с потреблением (π^*, C^*) — минимальный совершенный суперхеджирующий относительно любой $\mathsf{Q} \in \Re_N$, а именно:*

1) самофинансируемый портфель $\pi^* = \{\beta_t^*, \gamma_t^*\}_{t \in N_1}$, где $\{\gamma_t^*\}_{t \in N_1} \in D_1^N$ — допустимая предсказуемая последовательность, удовлетворяющая (9), а последовательность $\{\beta_t^*\}_{t \in N_0}$ определена равенствами

$$\begin{cases} \Delta\beta_t^* + (S_{t-1}, \Delta\gamma_t^*) = 0, \\ \beta_t^*|_{t=0} = \beta_0^*, \end{cases} \tag{24}$$

где можно выбрать $\beta_0^* = \ln \overline{V}_0$ (соответствующее значение можно рассчитать из (5)) и $\gamma_0^* = 0$; для любого $t \in N_0$ капитал портфеля π^* допускает представление

$$X_t^{\pi^*} = \beta_t^* + (\gamma_t^*, S_t) \quad \mathsf{Q} - \text{п.н.} \tag{25}$$

2) для любых $t \in N_0$ и $\mathsf{Q} \in \Re_N$ капитал $\hat{X}_t^{\pi^*}$ суперхеджирующего портфеля с потреблением (π^*, C^*) допускает представление

$$\hat{X}_t^{\pi^*} = \ln \overline{V}_t \quad \mathsf{Q} - \text{п.н.}, \tag{26}$$

где $\overline{V}_t$ удовлетворяет (5), а потребление C_t^* в любой момент $t \in N_0$ допускает представление Q-п.н.

$$\begin{cases} \Delta C_t^* = (\gamma_t^*, \Delta S_t) - \Delta \hat{X}_t^{\pi^*} \geq 0, \\ C_t^*|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{27}$$

а также имеют место соотношения

(а) $\hat{X}_t^{\pi^*} = X_t^{\pi^*} - C_t^*$ Q-п.н.,

(б)

$$\hat{X}_t^{\pi^*} = \ln \overline{V}_0 + \sum_{i=1}^{t} (\gamma_i^*, \Delta S_i) - C_t^* \quad \mathsf{Q} - \text{п.н.} \tag{28}$$

3) (π^*, C^*) является совершенным суперхеджирующим портфелем с потреблением, т.е.

$$\hat{X}_N^{\pi^*} = f_N(S_\bullet) \quad \mathsf{Q} - \text{п.н.}; \tag{29}$$

4) (π^*, C^*) есть минимальный совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением.

Замечание 5 *При применении теоремы 10 к расчету европейского опциона на неполном рынке возникает существенное препятствие: необходимо решить рекуррентное уравнение (9), что включает проблему расчета потребления $\{C_t^*\}_{t \in N_0}$.*

2.3. Получим некоторые полезные свойства решения задачи (2). Начнем с мартингального свойства "наихудшей" меры.

Теорема 11 *Если решение задачи (2) существует, то "наихудшая" мера Q^* является мартингальной.*

2.4. В этом разделе приведены условия, при которых любое ограниченное платежное обязательство допускает S-представление относительно Q^*. Приводимое утверждение основано на теореме 4.

Теорема 12 *Зафиксируем произвольное $\mathcal{F}_N$-измеримое платежное обязательство f_N. Предположим, что для f_N существует решение задачи (2). Тогда f_N допускает относительно меры Q^* представление*

$$f_N(S_\bullet) = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[f_N(S_\bullet)\,|\mathcal{F}_0^S\right] + \sum_{i=1}^{N} (\gamma_i^*, \Delta S_i) \quad \mathsf{Q}^* - \text{п.н.}, \tag{30}$$

где $\left\{\gamma_t^*, \mathcal{F}_{t-1}^S\right\}_{t\in N_1}$ *— d-мерная предсказуемая последовательность, удовлетворяющая (9).*

Замечание 6 *1) Возможно,* $\mathsf{Q}^* \notin \Re_N$*. В этом случае известные лемма 10 из [17] (см. стр. 611) и лемма 5.3.9 из [10] не влекут утверждение теоремы 11. В параграфе 4 для доказательства существования S-представления использованы утверждения теорем 4 и 6.*

2) Из следствия 2 и теоремы 12 вытекает, что для любого $t \in N_1$

$$\begin{cases} \Delta \ln \overline{V}_t = (\gamma_t^*, \Delta S_t) \\ \ln \overline{V}_t|_{t=0} = \ln \overline{V}_0, \quad \ln \overline{V}_t|_{t=N} = f_N\left(S_\bullet\right) \ \ \mathsf{Q}^* - \text{п.н.} \end{cases} \tag{31}$$

В силу мартингальности Q^* *из формулы (31) получаем*

$$\ln \overline{V}_0 = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[f_N\left(S_\bullet\right)|\mathcal{F}_0^S\right] \ \ \mathsf{Q}^* - \text{п.н.} \tag{32}$$

3) Формула (31) означает, что на неизбыточном $(1,S)$-рынке стратегия $\{\gamma_t^*\}_{t\in N_1}$ определяется единственным образом (т.е. из того, что $\{\tilde{\gamma}_t\}_{t\in N_1}$ удовлетворяет (31), следует, что $\tilde{\gamma}_t = \gamma_t^*$ Q^*-п.н. для любого $t \in N_1$).

4) Относительно меры Q^* потребление C_t^* тривиально при любом $t \in N_0$. Таким образом, $\hat{X}_t^{\pi^*} = X_t^{\pi^*}$ Q^*-п.н. Поэтому капитал портфеля $\pi^* \in SF$ в любой момент времени $t \in N_1$ допускает представление Q^*-п.н.

$$X_t^{\pi^*} = \ln \overline{V}_0 + \sum_{i=1}^{t} (\gamma_i^*, \Delta S_i) \tag{33}$$

Кроме того,

$$X_t^{\pi^*} = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[f_N\left(S_\bullet\right)|\mathcal{F}_t^S\right] = \ln \overline{V}_t \ \ \mathsf{Q}^* - \text{п.н.} \tag{34}$$

2.5.

Теорема 13 *Предположим, что $\{1,S\}$-рынок неизбыточен и существует решение задачи (2). Тогда найдется "наихудшая" вероятностная мера, у которой регулярные условные вероятности $\mathsf{Q}^*\left(\cdot|\mathcal{F}_{n-1}^S\right)$, $t \in N_1$, дискретны, а их носитель состоит из $d{+}1$ афинно-независимого предсказуемого вектора.*

Замечание 7 *Из утверждения теоремы 13 следует, что в случае неизбыточного рынка найдется дискретная "наихудшая" вероятностная мера Q^* такая, что не существует мартингальной вероятностной меры Q: $\mathsf{Q} \neq \mathsf{Q}^*$ и $\mathsf{Q} \sim \mathsf{Q}^*$ (противное не совместимо с афинно-независимостью элементов носителя "наихудшей" меры). Этот факт имеет два важных следствия: 1) в случае неполного рынка $\mathsf{Q}^* \notin \Re_N \cap \mathfrak{M}_N$, поэтому $\mathsf{Q}^* \notin \Re_N$; 2) Q^* определяет полный рынок.*

2.6. Из утверждений теорем 11–13 и замечания 10 следует, что рассматриваемый $(1, S)$-рынок можно отождествить с полным рынком относительно Q^*. Это замечание приводит к следующему определению.

Определение 13 *Зафиксируем $\mathcal{F}_N^S$-измеримое ограниченное платежное обязательство f_N. Неизбыточный $(1, S)$-рынок будем называть "наихудшим" полным для f_N, если найдутся:*

а) "наихудшая" мартингальная вероятностная мера Q^* такая, что из $\mathsf{Q} \in \mathfrak{M}_N$ и $\mathsf{Q} \sim \mathsf{Q}^*$ следует $\mathsf{Q}(A) = \mathsf{Q}^*(A)$ для любого $A \in \mathcal{F}_N^S$, и

б) портфель $\pi^* \in SF$

такие, что:

$$X_N^{\pi^*} = f_N \ \ \mathsf{Q}^* - \text{п.н.}$$

Соответствующий портфель π^* назовем минимаксным хеджирующим.

Из определения 13 и теорем 10–13 следует утверждение.

Теорема 14 *Пусть для $\mathcal{F}_N^S$-измеримой ограниченной f_N существует решение задачи (2). Тогда для f_N существует "наихудший" полный рынок, причем капитал соответствующего минимаксного хеджирующего портфеля совпадает с капиталом минимаьного совершенного суперхеджирующего портфеля с Q^*-п.н. тривиальным потреблением.*

2.7. Теорема 10 утверждает существование минимального совершенного суперхеджирующего портфеля относительно любой $\mathsf{Q} \in \Re_N$. Но эта теорема не дает метода построения такого портфеля и его капитала. Здесь, на основе теорем 11–14, приведен общий вид минимаксного хеджирующего портфеля и его капитала (совпадающего, как было сказано выше, с капиталом совершенного суперхеджирующего портфеля).

Теорема 15 *Пусть $\pi^* \in SF$ — минимаксный хеджирующий портфель. Предположим, что существует решение задачи (2). Тогда:*

1) минимаксный хеджирующий портфель π^* имеет вид:

а) для любого $t \in N_1$ существует $\mathcal{F}_{t-1}^S$-измеримая d-мерная γ_t^* такая, что

$$\begin{cases} \overline{V}_{t-1} = \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] \ \ \mathsf{Q}^* - \text{п.н.} \\ \overline{V}_t|_{t=N} = \exp\left\{f_N\left(S_\bullet\right)\right\}; \end{cases} \tag{35}$$

б) для любого $t \in N_1$ существует $\mathcal{F}_{t-1}^S$-измеримая β_t^* такая, что

$$\begin{cases} \beta_t^* = \beta_{t-1}^* - (\gamma_t^*, S_{t-1}) \\ \beta_t^*|_{t=0} = \beta_0^*, \end{cases} \tag{36}$$

где $\beta_0^* = \ln \overline{V}_0$*, а* $\gamma_0^* = 0$*;*

2) для любого $t \in N_0$ *капитал* $X_t^{\pi^*}$ *портфеля* $\pi^* \in SF$ *допускает представление* Q^**-п.н.:*

а) $X_t^{\pi^*} = \ln \overline{V}_t$*,*

б) $X_t^{\pi^*} = X_0^{\pi^*} + \sum\limits_{i=1}^{t} (\gamma_i^*, \Delta S_i)$*,* $X_N^{\pi^*} = f_N(S_\bullet)$ Q^**-п.н.,* $X_0^{\pi^*} = \ln \overline{V}_0 = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[f_N(S_\bullet) | \mathcal{F}_0^S\right]$*.*

З а м е ч а н и е 8 *Начальный капитал минимаксного хеджирующего портфеля* $X_0^{\pi^*} = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[f_N(S_\bullet) | \mathcal{F}_0^S\right]$*. Величина* $X_0^{\pi^*}$ *есть верхняя граница спреда для европейского опциона на неполном рынке.*

§3. Доказательства утверждений 1–9

3.1. Здесь приведены доказательства теоремы 1 и следствия 1. Сделаем сначала несколько предварительных замечаний.

3.1.1. Поскольку $\mathsf{Q} \in \Re_N$ — мера, то, в силу теоремы Родона-Никодима, существует единственная $\mathcal{F}_N$-измеримая положительная случайная величина z_N такая, что $z_N(\omega) = \dfrac{d\mathsf{Q}}{d\,\mathsf{P}}(\omega)$. Величину z_N называют плотностью меры Q относительно меры P. Пусть $\mathsf{Q}_t \triangleq \mathsf{Q}|_{\mathcal{F}_t}$ и $\mathsf{P}_t \triangleq \mathsf{P}|_{\mathcal{F}_t}$. Очевидно, что для любого $t \in N_0$ вероятностные меры Q_t и P_t эквивалентны. Значит, существует единственная $\mathcal{F}_t$-измеримая положительная случайная величина $z_t(\omega) \triangleq \dfrac{d\mathsf{Q}_t}{d\,\mathsf{P}_t}(\omega)$ такая, что:

1) для любого $t \in N_0$: $0 < z_t < \infty$ P-п.н.;

2) если $\mathsf{Q}_0 = \mathsf{P}_0$, то $z_t|_{t=0} = 1$;

3) для любого $t \in N_1$: $\mathsf{E}^{\mathsf{P}}(z_t | \mathcal{F}_{t-1}) = z_{t-1}$ P-п.н. Величина $z_t(\omega)$ — локальная плотность.

Для любого $t \in N_0$ через $\overline{Z}_t^N$ обозначим множество последовательностей $\left\{\overline{z}_s^{t,N}, \mathcal{F}_s^S\right\}_{s \in N_0}$ таких, что

$$\overline{z}_s^{t,N} \triangleq \begin{cases} 1, & 0 \le s \le t, \\ \dfrac{z_s}{z_t}, & t < s \le N. \end{cases} \qquad (37)$$

Будем писать $\overline{z}_t^N \triangleq \left\{\overline{z}_s^{t,N}\right\}_{s=N}$.

Очевидно, что последовательность $\left\{\overline{z}_s^{t,N}\right\}_{s \in N_0}$ — мартингал относительно меры P и фильтрации $\left\{\mathcal{F}_s^S\right\}_{s \in N_0}$.

Семейство множеств $\left\{\overline{Z}_t^N\right\}_{t\in N_0}$ обладает следующими свойствами (см. [17]):

1) $\overline{Z}_t^N \subseteq \overline{Z}_{t-1}^N \subseteq \cdots \subseteq \overline{Z}_0^N$;

2) для любого $t \in N_0$ множество $\overline{Z}_t^N$ выпукло.

Сужение множества $\overline{Z}_0^N$ на $\{t_1, \ldots, t_2\}$, где $t_1 < t_2$ и $t_1, t_2 \in N_0$, будем обозначать через $\overline{Z}_{t_1}^{t_2}$, а его элементы — через $\overline{z}_{t_1}^{t_2}$.

3.1.2. Рассмотрим оценку допустимой t-бистратегии $\left(\mathsf{Q}, \gamma_{t+1}^N\right)$. Из телескопического свойства условных математических ожиданий следует, что $I_t^{\mathsf{Q},\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению Q-п.н.

$$\begin{cases} I_t^{\mathsf{Q},\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right) = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[I_{t+1}^{\mathsf{Q},\gamma_{t+2}^N}\left(S_0^{t+1}\right)e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}|\mathcal{F}_t^S\right], \\ I_t^{\mathsf{Q},\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right)|_{t=N} = \exp\left\{f_N\left(S_\bullet\right)\right\}. \end{cases} \tag{38}$$

Раз Q, $\mathsf{P} \in \Re_N$, то, из определения оценки допустимой t-бистратегии $\left(\mathsf{Q}, \gamma_{t+1}^N\right)$ (обозначаемой через $I_t^{\mathsf{Q},\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right)$), на основании теоремы Гирсанова [18], имеем Q (P)-п.н.

$$I_t^{\mathsf{Q},\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right) = \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left[\overline{z}_t^N \exp\left\{f_N\left(S_\bullet\right) - \sum_{i=t+1}^{N}\left(\gamma_i, \Delta S_i\right)\right\}|\mathcal{F}_t^S\right]. \tag{39}$$

Обозначим правую часть равенства (39) через $I_t^{\mathsf{P},\overline{z}_t^N,\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right)$, где $\left(\overline{z}_t^N, \gamma_{t+1}^N\right) \in \overline{Z}_t^N \times D_{t+1}^N$. Из (38) и (39) следует, что для любых $t \in N_0$ и $\left(\overline{z}_t^N, \gamma_{t+1}^N\right) \in \overline{Z}_t^N \times D_{t+1}^N$ величина $I_t^{\mathsf{P},\overline{z}_t^N,\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению P-п.н.

$$I_t^{\mathsf{P},\overline{z}_t^N,\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right) = \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left[\overline{z}_{t+1}^{t,N} I_{t+1}^{\mathsf{P},\overline{z}_{t+1}^N,\gamma_{t+2}^N}\left(S_0^{t+1}\right)e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}|\mathcal{F}_t^S\right]. \tag{40}$$

Для любого $t \in N_0$ имеем $I_t^{\mathsf{Q},\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right) = I_t^{\mathsf{P},\overline{z}_t^N,\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right)$ P-п.н. Значит, случайная величина $\overline{V}_t$ допускает представление

$$\overline{V}_t = \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \operatorname*{ess\,sup}_{\overline{z}_t^N \in \overline{Z}_t^N} I_t^{\mathsf{P},\overline{z}_t^N,\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right) \quad \mathsf{P}\text{ -п.н.} \tag{41}$$

3.1.3. Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Докажем сначала, что для любого $t \in N_0$ справедливо неравенство P-п.н.:

$$\overline{V}_t \geq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in D_{t+1}} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{V}_{t+1}e^{-(\gamma,\Delta S_{t+1})}|\mathcal{F}_t^S\right]. \tag{42}$$

По определению

$$\overline{I}_t^{\mathsf{P},\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right) \triangleq \operatorname*{ess\,sup}_{\overline{z}_t^N \in \overline{Z}_t^N} I_t^{\mathsf{P},\overline{z}_t^N,\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right). \tag{43}$$

Из определения существенной верхней грани следует $\mathcal{F}_t^S$-измеримость $\overline{I}_t^{\mathsf{P},\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$. Величины $I_t^{\mathsf{P},\overline{z}_t^N,\gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (40). Поэтому из свойств существенной верхней грани и теоремы Гирсанова следуют соотношения P-п.н.

$$\overline{I}_t^{\mathsf{P},\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right) = \operatorname*{ess\,sup}_{\overline{z}_t^N \in \overline{Z}_t^N} \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left[\overline{z}_{t+1}^{t,N} I_{t+1}^{\mathsf{P},\overline{z}_{t+1}^N,\gamma_{t+2}^N}\left(S_0^{t+1}\right) e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S\right] \geq$$

$$\begin{aligned}
&\geq \operatorname*{ess\,sup}_{\overline{z}_{t+1}^N \in \overline{Z}_{t+1}^N} \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left[\overline{z}_{t+1}^{t,N} I_{t+1}^{\mathsf{P},\overline{z}_{t+1}^N,\gamma_{t+2}^N}\left(S_0^{t+1}\right) e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S\right] = \\
&= \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left[\overline{z}_{t+1}^{t,N} \operatorname*{ess\,sup}_{\overline{z}_{t+1}^N \in \overline{Z}_{t+1}^N} I_{t+1}^{\mathsf{P},\overline{z}_{t+1}^N,\gamma_{t+2}^N}\left(S_0^{t+1}\right) e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S\right] = \\
&= \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left[\overline{z}_{t+1}^{t,N} \overline{I}_{t+1}^{\mathsf{P},\gamma_{t+2}^N}\left(S_0^{t+1}\right) e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S\right] = \qquad (44) \\
&= \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{I}_{t+1}^{\mathsf{P},\gamma_{t+2}^N}\left(S_0^{t+1}\right) e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S\right].
\end{aligned}$$

Отметим, что левая часть (44) не зависит от меры Q. Поэтому из (44) следует P-п.н.

$$\overline{I}_t^{\mathsf{P},\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right) \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{I}_{t+1}^{\mathsf{P},\gamma_{t+2}^N}\left(S_0^{t+1}\right) e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S\right].$$

Это неравенство можно усилить:

$$\overline{I}_t^{\mathsf{P},\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right) \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+2}^N \in D_{t+2}^N} \overline{I}_{t+1}^{\mathsf{P},\gamma_{t+2}^N}\left(S_0^{t+1}\right) e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S\right] \geq \tag{45}$$

$$\geq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}\in D_{t+1}} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+2}^N \in D_{t+2}^N} \overline{I}_{t+1}^{\mathsf{P},\gamma_{t+2}^N}\left(S_0^{t+1}\right) e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S\right]. \quad \mathsf{P}-\text{п.н.}$$

Применив формулу $\overline{V}_{t+1} = \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+2}^N \in D_{t+2}^N} \overline{I}_{t+1}^{\mathsf{P},\gamma_{t+2}^N}\left(S_0^{t+1}\right)$ к неравенству (45), получаем P-п.н.

$$\overline{I}_t^{\mathsf{P},\gamma_{t+1}^N}\left(S_0^t\right) \geq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}\in D_{t+1}} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{V}_{t+1} e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S\right]. \tag{46}$$

Правая часть (46) не зависит от $\gamma_{t+1} \in D_{t+1}$. Поэтому из (46) следует (42).

Теперь докажем, что для любого $t \in N_0$ имеет место неравенство P-п.н.:

$$\overline{V}_t \leq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in D_{t+1}} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_{t+1} e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right]. \tag{47}$$

Раз $I_{t+1}^{\mathsf{P}, \overline{z}_{t+1}^N, \gamma_{t+2}^N} \left(S_0^{t+1} \right) \leq \overline{I}_{t+1}^{\mathsf{P}, \gamma_{t+2}^N} \left(S_0^{t+1} \right)$ P-п.н., то с учетом теоремы Гирсанова для любого $\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N$ получаем неравенство P-п.н.

$$I_t^{\mathsf{P}, \overline{z}_t^N, \gamma_{t+1}^N} \left(S_0^t \right) \leq \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{I}_{t+1}^{\mathsf{P}, \gamma_{t+2}^N} \left(S_0^{t+1} \right) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right] \leq \tag{48}$$

$$\leq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{I}_{t+1}^{\mathsf{P}, \gamma_{t+2}^N} \left(S_0^{t+1} \right) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right].$$

Правая часть (48) не зависит от Q, поэтому для любого $\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N$ справедливо неравенство P-п.н.:

$$\overline{I}_t^{\mathsf{P}, \gamma_{t+1}^N} \left(S_0^t \right) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{I}_{t+1}^{\mathsf{P}, \gamma_{t+2}^N} \left(S_0^{t+1} \right) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right]. \tag{49}$$

Заметим, что: 1) для любого $\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N$ величина $\overline{V}_t \leq \overline{I}_t^{\mathsf{P}, \gamma_{t+1}^N} (S_0^t)$ P-п.н.; 2) из определения существенной нижней грани следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\overline{\gamma}_{t+1}^{\varepsilon, N} \triangleq \{\overline{\gamma}_s^{\varepsilon}\}_{s \in \{t+1, \dots, N\}} \in D_{t+1}^N$, где $\overline{\gamma}_s^{\varepsilon}$ есть $\mathcal{F}_{s-1}^S$-измеримый d-мерный вектор $\overline{\gamma}_{t+1}^{\varepsilon, N}$ (зависящий от выбора ε) такой, что для любого $t \in N_0$

$$\overline{V}_t \geq \overline{I}_t^{\mathsf{P}, \overline{\gamma}_{t+1}^{\varepsilon, N}} \left(S_0^t \right) - \varepsilon \quad \mathsf{P}-\text{п.н.}$$

Поэтому формулу (49) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
\overline{V}_t \quad &\leq \quad \overline{I}_t^{\mathsf{P}, \overline{\gamma}_{t+1}^{\varepsilon, N}} \left(S_0^t \right) \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{I}_{t+1}^{\mathsf{P}, \overline{\gamma}_{t+2}^{\varepsilon, N}} \left(S_0^{t+1} \right) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right] \leq \\
&\leq \quad \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\left(\overline{V}_{t+1} + \varepsilon \right) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right] \leq \\
&\leq \quad \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_{t+1} e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right] + \\
&\quad\quad + \varepsilon \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right].
\end{aligned} \tag{50}$$

Рассмотрим второе слагаемое левой части (50). Поскольку $\gamma_{t+1} \in D_{t+1}$, то для любого $t \in N_1$ имеем

$$0 \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right] < \infty.$$

В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем следующее неравенство для любых $\gamma_{t+1} \in D_{t+1}$ и $t \in N_1$:

$$\overline{V}_t \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_{t+1} e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S\right]. \qquad (51)$$

Левая часть (51) не зависит от $\gamma_{t+1} \in D_{t+1}$, поэтому из последнего неравенства немедленно следует (47).

Очевидно, что $\overline{V}_t|_{t=N} = e^{f_N(S_\bullet)}$. Тогда из неравенств (42), (47) следует рекуррентное соотношение (5). Этим завершается доказательство теоремы.

3.1.4. Доказательство следствия 1. 1) Для любой $\mathsf{Q} \in \Re_N$ имеем

$$\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] \geq \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] \quad \mathsf{P}-\text{п.н.}$$

Значит, для любых $t \in N_0$, $\gamma \in D_t$ и $\mathsf{Q} \in \Re_N$ справедливо неравенство

$$\operatorname*{ess\,inf}_{\gamma\in D_t} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] \geq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma\in D_t} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right]. \quad \mathsf{P}-\text{п.н.}$$

В совокупности (5) и последнее неравенство дают (6).

2) Второе неравенство немедленно следует из (5) и определения существенной верхней грани. Доказательство завершено.

3.2. Доказательство теоремы 2. Докажем, что для любого $t \in N_1$ справедливо неравенство

$$\overline{V}_t \leq e^{c_2} \quad \mathsf{P}-\text{п.н.} \qquad (52)$$

Будем доказывать по индукции. Из условий теоремы 2 сразу следует, что

$$\overline{V}_t|_{t=N} \leq e^{c_2}.$$

Чтобы доказать (52), необходимо показать, что для любого $t \in N_1$ из $\overline{V}_t \leq e^{c_2}$ следует $\overline{V}_{t-1} \leq e^{c_2}$. Пусть $\overline{V}_t \leq e^{c_2}$. Согласно следствию 1, для любого $\gamma \in D_t$ имеем P-п.н.

$$\overline{V}_{t-1} = \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma\in D_t} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] \leq$$

$$\leq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right].$$

Последнее неравенство можно усилить, воспользовавшись тем, что $0 \in D_t$. Получим P-п.н.

$$\overline{V}_{t-1} \leq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_t | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] \leq e^{c_2}.$$

Основной шаг индукции пройден, что доказывает справедливость (52) для любого $t \in N_1$.

Покажем теперь, что для любого $t \in N_1$,

$$\overline{V}_t \geq e^{-c_2} \quad \mathsf{P}-\text{п.н.} \tag{53}$$

Снова воспользуемся методом индукции. В силу условий теоремы

$$\overline{V}_t|_{t=N} \geq e^{-c_2} \quad \mathsf{P}-\text{п.н.}$$

Значит, необходимо доказать, что $\overline{V}_t \geq e^{-c_2}$ влечет $\overline{V}_{t-1} \geq e^{-c_2}$ для любого $t \in N_1$. Пусть $\overline{V}_t \geq e^{-c_2}$. Следствие 1 дает P-п.н.

$$\overline{V}_{t-1} = \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] \geq$$

$$\geq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] \geq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[e^{-c_2} e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] =$$

$$= e^{-c_2} \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right]. \tag{54}$$

Нам потребуется новое обозначение. Пусть

$$G_{\mathsf{Q}}\left(t, S_0^{t-1}, -\gamma\right) \triangleq \ln \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\exp\left\{-\left(\gamma, \Delta S_t\right)\right\} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right]$$

для любых $t \in N_1$, $\gamma \in \mathbb{R}^d$ и $\mathsf{Q} \in \Re_N$. Функцию $G_{\mathsf{Q}}\left(t, S_0^{t-1}, -\gamma\right)$ называют кумулянтой случайной величины ΔS_t относительно вероятностной меры Q и σ-алгебры $\mathcal{F}_{t-1}$ (см. [17], [18]).

Тогда (54) можно переписать в виде P-п.н.

$$\overline{V}_{t-1} \geq e^{-c_2} \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] = e^{-c_2} \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} e^{G_{\mathsf{Q}}\left(t, S_0^{t-1}, -\gamma\right)}, \tag{55}$$

где $\mathsf{Q} \in \Re_N$ — произвольная.

По условия теоремы $\Re_N \cap \mathfrak{M}_N \neq \varnothing$, поэтому существует мера $\widetilde{\mathsf{Q}} \in \Re_N \cap \mathfrak{M}_N$ такая, что для любого $\gamma \in D_t$ кумулянта удовлетворяет условию: $G_{\widetilde{\mathsf{Q}}}\left(t, S_0^{t-1}, -\gamma\right) \geq 0$ и является выпуклой функцией по γ. Тогда из (55) следует, что

$$\overline{V}_{t-1} \geq e^{-c_2} \quad \mathsf{P}-\text{п.н.}$$

Таким образом, основной шаг индукции пройден, неравенство (53) доказано для любого $t \in N_1$. Неравенства (53) и (54) в совокупности дают утверждение теоремы. Доказательство завершено.

3.3. При доказательстве теоремы 3 потребуются следующие два вспомогательных утверждения.

3.3.1.

Лемма 1 *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\mathsf{Q} \in \Re_N \cap \mathfrak{M}_N$*;*

2) $\{S_t\}_{0 \le t \le N}$ *есть последовательность* d*-мерных величин, причем для любого* $t \in N_1$ *величины* $\Delta S_n^{(i)}$ *линейно независимы,* $i = \overline{1, d}$*;*

3) γ_t *— нетривиальный ограниченный* d*-мерный вектор.*

Тогда Q*-п.н. справедливы неравенства*

$$\mathsf{Q}\left((\gamma_t, \Delta S_t) > 0 | \mathcal{F}_{t-1}^S\right) > 0, \quad \mathsf{Q}\left((\gamma_t, \Delta S_t) < 0 | \mathcal{F}_{t-1}^S\right) > 0. \tag{56}$$

Доказательство леммы 1. П условиям леммы мера Q — мартингальная, поэтому для любого $\gamma'_t \in \mathbb{R}^d$ справедливо неравенство $1 \le \exp\left\{G_{\mathsf{Q}}\left(t, S_0^{t-1}, -\gamma'_t\right)\right\} = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[e^{-(\gamma'_t, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}\right]$ Q-п.н., где $G_{\mathsf{Q}}\left(t, S_0^{t-1}, -\gamma'_t\right)$ — кумулянта относительно меры Q. Кумклянта G_{Q} — выпуклая собственная функция, поэтому существует $\gamma_t \in \mathbb{R}^d$, для которого $\exp\left\{G_{\mathsf{Q}}\left(t, S_0^{t-1}, -\gamma_t\right)\right\} > 1$ Q-п.н.

Отметим, что Q-п.н.

$$\begin{aligned} e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} = e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} &\left[1_{\{(\gamma_t, \Delta S_t) < 0\}} + 1_{\{(\gamma_t, \Delta S_t) \ge 0\}}\right] \le \\ &\le e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} 1_{\{(\gamma_t, \Delta S_t) < 0\}} + 1. \end{aligned}$$

Таким образом, $1 < \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[1 + e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} 1_{\{(\gamma_t, \Delta S_t) < 0\}} | \mathcal{F}_{t-1}\right]$ Q-п.н. или, что то же Q-п.н.

$$0 < \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} 1_{\{(\gamma_t, \Delta S_t) < 0\}} | \mathcal{F}_{t-1}\right]. \tag{57}$$

Определим меру $\tilde{\mathsf{Q}}(A) \triangleq \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} 1_A(\omega) \exp\left\{\sum_{i=1}^{N}\left[-(\gamma_i, \Delta S_i) - G_{\mathsf{Q}}\left(i, S_0^{i-1}, -\gamma_i\right)\right]\right\}$, где $A \in \mathcal{F}_N^S$ — любое. Очевидно, что $\tilde{\mathsf{Q}} \sim \mathsf{Q}$. Тогда, в силу теоремы Гирсанова, неравенство (57) примет вид Q-п.н.

$$\begin{aligned} 0 &< \exp\left\{G_{\mathsf{Q}}\left(t, S_0^{t-1}, -\gamma_t\right)\right\} \mathsf{E}^{\tilde{\mathsf{Q}}}\left[1_{\{(\gamma_t, \Delta S_t) < 0\}} | \mathcal{F}_{t-1}\right] = \\ &= \exp\left\{G_{\mathsf{Q}}\left(t, S_0^{t-1}, -\gamma_t\right)\right\} \tilde{\mathsf{Q}}\left[(\gamma_t, \Delta S_t) < 0 | \mathcal{F}_{t-1}\right]. \end{aligned}$$

Последнее означает, что $0 < \tilde{\mathsf{Q}}\left[(\gamma_t, \Delta S_t) < 0 | \mathcal{F}_{t-1}\right]$ Q-п.н. Меры Q и $\tilde{\mathsf{Q}}$ эквивалентны, поэтому $0 < \mathsf{Q}\left[(\gamma_t, \Delta S_t) < 0 | \mathcal{F}_{t-1}\right]$ Q-п.н.

Аналогичные рассуждения доказывают, что $0 < \mathsf{Q}\left[(\gamma_t, \Delta S_t) > 0 | \mathcal{F}_{t-1}\right]$ Q-п.н. Утверждение доказано.

3.3.2.

Замечание 9 *1) Условие 2 леммы 1 не является существенным. Действительно, предположим, что для некоторого* $t' \in N_1$ *величины* $\Delta S_{t'}^{(i)}$*,* $i = \overline{1, d}$*, являются линейно зависимыми, а условная вероятность* $\mathsf{Q}\left((\bar{\gamma}_{t'}, \Delta S_{t'}) = 0 | \mathcal{F}_{t'-1}^S\right) = 1$ Q*-п.н. В силу произвольности* $\bar{\gamma}_{t'}$

имеем $\Delta S_{t'} = 0$ Q*-п.н. Очевидно, последнее означает, что* $\mathcal{F}^S_{t'} = \mathcal{F}^S_{t'-1}$ *и* $\overline{V}_{t'} = \overline{V}_{t'-1}$ Q*-п.н. Таким образом, момент* t' *можно исключить из рассмотрения.*

2) Предположим, что условия леммы 1 выполнены, а $\bar{\gamma}_t \triangleq \dfrac{\gamma_t}{|\gamma_t|}$, *где* γ_t *— нетривиальный ограниченный* d*-мерный предсказемый вектор. Тогда любая* $\mathsf{Q} \in \Re_N \cap \mathfrak{M}_N$ *имеет регулярную версию условного распределения* $\mathsf{Q}\left((\bar{\gamma}_t, \Delta S_t) \leq x | \mathcal{F}^S_{t-1}\right)$. *Последнее в совокупности с (56) означает, что для любого* $t \in N_1$ *найдутся положительные константы* c_3 *и* c_4, *для которых* Q*-п.н.*

$$\mathsf{Q}\left(-(\gamma_t, \Delta S_t) \geq c_3|\gamma_t| \big| \mathcal{F}^S_{t-1}\right) \geq c_4 > 0. \tag{58}$$

3.3.3. Обозначим

$$\Phi(t, \gamma, \omega) \triangleq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}^S_{t-1}\right], \tag{59}$$

где $t \in N_1$, $\gamma \in D_t$ — любые.

Лемма 2 *Пусть выполнены условия теоремы 2. Тогда для любого* $t \in N_1$ *справедливы следующие утверждения:*

1) найдутся неотрицательные константы c_3 *и* c_4 *такие, что* Q*-п.н.*

$$\Phi(t, \gamma, \omega) \geq c_3 e^{c_4|\gamma| - c_2}; \tag{60}$$

2) существует версия $\Phi(t, \gamma, \omega)$, *которая при любом* $\omega \in \Omega$ *является выпуклой непрерывной функцией от* γ.

Доказательство леммы 2. 1) Из (59), следствия 1 и теоремы 2 следует, что для любых $\gamma \in D_{t+1}$ и $\mathsf{Q} \in \Re_N \cap \mathfrak{M}_N$ справедливы неравенства Q-п.н.

$$\begin{aligned}\Phi(t, \gamma, \omega) &\geq \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_{t+1} e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}^S_t\right] \geq e^{-c_2} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}^S_t\right] \geq \\ &\geq e^{-c_2} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} 1_{\{-(\gamma, \Delta S_{t+1}) \geq c_3|\gamma|\}} | \mathcal{F}^S_t\right] \geq \\ &\geq e^{c_3|\gamma| - c_2} \mathsf{Q}\left(-(\gamma, \Delta S_{t+1}) \geq c_3|\gamma| \big| \mathcal{F}^S_t\right).\end{aligned} \tag{61}$$

Неравенство (60) следует из (61) и (58) (см. замечание 9).

2) В силу (59), следствия 1, теоремы 2, свойств существенной верхней грани и выпуклости $e^{-(\gamma, x)}$ получаем неравенство для любого $t \in N_1$, справедливое P-п.н.:

$$\Phi(t, \gamma^\alpha, \omega) \leq \alpha \Phi(t, \gamma_1, \omega) + (1 - \alpha) \Phi(t, \gamma_2, \omega), \tag{62}$$

где $\alpha \in [0, 1]$, $\gamma^\alpha \triangleq \alpha\gamma_1 + (1 - \alpha)\gamma_2$, $\gamma_1, \gamma_2 \in D_t$.

Очевидно, что $\Phi(t,\gamma,\omega)$ есть $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)\otimes\mathcal{F}_t^S$-измеримая случайная величина, конечная P-п.н. при любых $\gamma\in D_t$.

Обозначим: а) $L_\infty^t \triangleq L_\infty^t\left(\mathbb{R}^{dt},\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{dt}\right),P\right)$ — нормированное пространство, элементами которого являются P-п.н. конечные случайные величины;

б) $\mathfrak{L}_t^\infty \triangleq \mathfrak{L}_t^\infty\left(\mathbb{R}^{dt},\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{dt}\right)\right)$ — нормированное пространство, элементы которого — измеримые функции с конечной равномерной нормой.

Отображение $\rho_t : L_\infty^t \to \mathfrak{L}_t^\infty$ есть лифтинг [15], т.е. из $\varphi_t\in L_\infty^t$ следует, что:

а) $\rho_t(\varphi_t)=\varphi_t$ P-п.н.;

б) если $\varphi_t(\omega)=0$ P-п.н., то для любого ω имеем $\rho_t\big(\varphi_t(\omega)\big)=0$;

в) $\rho\left(1_{\{\mathbb{R}^{dt}\}}(\omega)\right)=1_{\{\mathbb{R}^{dt}\}}(\omega)$.

Известно [15], что: а) в рассматриваемом случае лифтинг существует, б) $||\rho_t||=1$ и $\rho_t^2=\rho_t$.

Очевидно, что для любых $t\in N_1$ и $\gamma\in D_t$ имеем $\Phi(t,\gamma,\omega)\in L_\infty^t$ и $\rho_t\left(\Phi(t,\gamma,\omega)\right)\in\mathfrak{L}_t^\infty$. Таким образом, из (60) следует, что для любых (t,ω) функция $\rho_t\left(\Phi(t,\gamma,\omega)\right)$ от γ выпукла и неотрицательна. Следовательно, для любых (t,ω) она непрерывна по γ. Доказательство завершено.

3.3.4. Доказательство теоремы 3. Из (58) (см. замечание 9) и леммы 2 следует, что:

(1) для любых t и ω функция $\Phi(t,\gamma,\omega)$ является $\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^d\right)$-измеримой функцией по γ, причем

$$\lim_{|\gamma|\to\infty}\Phi(t,\gamma,\omega)=\infty \quad \mathsf{P}\text{-п.н.}; \tag{63}$$

(2) для любых t и γ функция $\Phi(t,\gamma,\omega)$ является $\mathcal{F}_t^S$-измеримой.

Предварительно заметим, что в силу определения существенной нижней грани, теорем 1, 2 и определения последовательности $\{\Phi(t,\gamma,\omega)\}_{t\in N_1}$ существует минимизирующая последовательность $\{\gamma_{t+1}^{(k)}\}_{k\geq 1}$ такая, что P-п.н.

$$\begin{aligned} e^{-c_2}\leq \overline{V}_t &= \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}\in D_{t+1}}\ \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N}\ \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{V}_{t+1}e^{-(\gamma_{t+1},\Delta S_{t+1})}|\mathcal{F}_t^S\right]= \\ &=\lim_{k\to\infty}\ \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N}\ \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{V}_{t+1}e^{-\left(\gamma_{t+1}^{(k)},\Delta S_{t+1}\right)}|\mathcal{F}_t^S\right]\leq e^{c_2}. \end{aligned}\tag{64}$$

Будем доказывать теорему 3 методом "от противного т.е. (согласно (64)) предположим, что не существует $\mathcal{F}_t^S$-измеримого конечного d-мерного вектора γ_{t+1}^*, для которого имеет место (9). В этом случае

$$\lim_{k\to\infty}|\gamma_{t+1}^{(k)}|=\infty. \tag{65}$$

Тогда, в силу (64) и (63) получим P-п.н.

$$\begin{aligned} e^{c_2} \geq \overline{V}_t = \lim_{k\to\infty} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_{t+1} e^{-\left(\gamma_{t+1}^{(k)}, \Delta S_{t+1}\right)} | \mathcal{F}_t^S \right] = \\ = \lim_{k\to\infty} \Phi(t, \gamma_{t+1}^{(k)}, \omega) \geq \lim_{k\to\infty} c_4 e^{c_3 |\gamma_{t+1}^{(k)}| - c_2} = \infty. \end{aligned} \tag{66}$$

Пришли к противоречию, источником которого является наше предположение (65). Значит, это предположение не верно и из последовательности $\{\gamma_{t+1}^{(k)}\}_{k\geq 1}$ можно извлечь сходящуюся подпоследовательность $\{\gamma_{t+1}^{(k_l)}\}_{l\geq 1}$:

$$\gamma_{t+1}^* \triangleq \lim_{l\to\infty} \gamma_{t+1}^{(k_l)}. \tag{67}$$

Очевидно, что γ_{t+1}^* — $\mathcal{F}_t^S$-измеримый d-мерный случайный вектор. Действительно, пусть $B \subseteq \mathbb{R}^d$ — открытый шар. Для любых t и ω функция $\Phi(t, \gamma, \omega)$ непрерывна по γ, поэтому

$$\{\gamma_t^* \in B\} = \bigcup_{q\in Q^d \cap B} \bigcap_{q' \in Q^d \setminus B} \{\Phi(t, q, \omega) < \Phi(t, q', \omega)\},$$

где Q^d — пространство d-мерных векторов с рациональными компонентами.

Докажем, что $\gamma_{t+1}^* \in D_{t+1}$. Следствие 1, теорема 2, лемма 2 и лемма Фату дают P-п.н.

$$\begin{aligned} e^{c_2} \geq \overline{V}_t \geq \lim_{l\to\infty} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_{t+1} e^{-\left(\gamma_{t+1}^{(k_l)}, \Delta S_{t+1}\right)} | \mathcal{F}_t^S \right] \geq \\ \geq \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_{t+1} e^{-\left(\gamma_{t+1}^*, \Delta S_{t+1}\right)} | \mathcal{F}_t^S \right] \geq e^{-c_2} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[e^{-\left(\gamma_{t+1}^*, \Delta S_{t+1}\right)} | \mathcal{F}_t^S \right]. \end{aligned}$$

Из этих неравенств немедленно следует, что $e^{2c_2} \geq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[e^{-\left(\gamma_{t+1}^*, \Delta S_{t+1}\right)} | \mathcal{F}_t^S \right]$. Теорема доказана.

3.4. Доказательство теоремы 4. Воспользуемся утверждением теоремы 3, формулой (10), которая справедлива для любых $t \in N_1$ и $\mathsf{Q} \in \Re_N$. Меры Q и P эквивалентны. Поэтому, с учетом замечаний к разделу 3.1.1, применив теорему Гирсанова, можно переписать (10) в виде P-п.н.

$$\overline{V}_{t-1} \geq \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] = \mathsf{E}^{\mathsf{P}} \left[\frac{z_t}{z_{t-1}} \overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right], \tag{68}$$

где $z_t = \dfrac{d\mathsf{Q}_t}{d\,\mathsf{P}_t}(\omega)$.

Пусть $\{g_t\}_{t\in N_1}$ — последовательность случайных величин, элементы которой g_t есть произвольные $\mathcal{F}_t^S$-измеримые ограниченные. Тогда $\left\{z_t, \mathcal{F}_t^S\right\}_{t\in N_0}$ допускает представление

$$z_t = z_{t-1}\frac{g_t}{\mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left(g_t|\mathcal{F}_{t-1}^S\right)}, \quad z_t|_{t=0} = 1. \tag{69}$$

Очевидно, что $\{z_t\}_{t\in N_0} \in \overline{Z}_0^N$ и для любого $t \in N_0$ случайная величина z_t является $\mathcal{F}_t^S$-измеримой, $0 < z_t < \infty$ P-п.н. Значит, по совокупности (68) и (69) получим

$$\overline{V}_{t-1}\mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left[g_t|\mathcal{F}_{t-1}^S\right] \geq \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left[g_t\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*,\Delta S_t)}|\mathcal{F}_{t-1}^S\right] \ \mathsf{P}-\text{п.н.}$$

Отсюда имеем

$$0 \geq \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left[g_t\left(\frac{\overline{V}_t}{\overline{V}_{t-1}}e^{-(\gamma_t^*,\Delta S_t)} - 1\right)|\mathcal{F}_{t-1}^S\right] \ \mathsf{P}-\text{п.н.} \tag{70}$$

Поскольку

$$\exp\left\{\Delta\ln\overline{V}_t - (\gamma_t^*,\Delta S_t)\right\} - 1 - \left[\Delta\ln\overline{V}_t - (\gamma_t^*,\Delta S_t)\right] \geq 0 \ \mathsf{P}-\text{п.н.},$$

то из (70) следуют неравенства P-п.н.

$$0 \geq \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left\{g_t\left[e^{\Delta\ln\overline{V}_t-(\gamma_t^*,\Delta S_t)} - 1 - \left(\Delta\ln\overline{V}_t - (\gamma_t^*,\Delta S_t)\right) + \Delta\ln\overline{V}_t -\right.\right.$$

$$\left.\left. - (\gamma_t^*,\Delta S_t)\right]|\mathcal{F}_{t-1}^S\right\} \geq \mathsf{E}^{\mathsf{P}}\left\{g_t\left[\Delta\ln\overline{V}_t - (\gamma_t^*,\Delta S_t)\right]|\mathcal{F}_{t-1}^S\right\}.$$

Произвольность g_t позволяет записать P-п.н.

$$-\Delta C_t^* \triangleq \Delta\ln\overline{V}_t - (\gamma_t^*,\Delta S_t) \leq 0. \tag{71}$$

Из (71) следует существование $\mathcal{F}_t^S$-измеримой случайной величины ΔC_t^*, определенной формулой (11), для любого $t \in N_1$. Из (71) также получаем, что для любого $t \in N_1$ величина $\Delta C_t^* \geq 0$ P-п.н. Поэтому $C_t^* \geq C_s^*$ P-п.н. для любого $t \geq s$. Из (11) и наших замечаний получаем, что P-п.н.

$$\begin{aligned} C_N^* &= \sum_{i=1}^N \Delta C_i^* = \sum_{i=1}^N \left[(\gamma_i^*,\Delta S_i) - \Delta\ln\overline{V}_i\right] = \\ &= \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*,\Delta S_i) - \ln\overline{V}_N + \ln\overline{V}_0. \end{aligned} \tag{72}$$

Поскольку $\ln \overline{V}_N = f_N(S_\bullet)$, то из последнего равенства получаем (12). Доказательство завершено.

3.5. Доказательство теоремы 5. По условиям теоремы величина ξ ограничена P-п.н., поэтому для любой $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ математическое ожидание $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\xi$ также ограничено, а, значит, $\sup\limits_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\xi$ конечна. Тогда существует последовательность $\{\mathsf{Q}_k\}_{k \geq 1}$, где $\mathsf{Q}_k \in \mathfrak{R}_N$ для любого $k \geq 1$: $\sup\limits_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\xi = \lim\limits_{k \to \infty} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}_k}\xi$.

Для любого $A \in \mathcal{F}$ определим $\lambda(A) \triangleq \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{\mathsf{Q}_k(A)}{2^i}$. Очевидно, что λ есть вероятностная мера, причем $\mathsf{Q}_k \ll \lambda$ для любого $k \geq 1$. Поэтому при любом $k \geq 1$ найдется случайная величина $0 \leq X_k \triangleq \frac{d\mathsf{Q}_k}{d\lambda}$, называемая плотностью меры Q_k относительно λ, $\mathsf{E}^{\lambda}X_k = 1$ [18]. Тогда $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}_k}\xi = \mathsf{E}^{\lambda}X_k\xi$, $k \geq 1$.

Предположим, что $\{X_k\}_{k \geq 1}$ относительно слабо компактно в $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$. В этом случае теорема Эберлейна-Шмульяна [3] утверждает, что существует подпоследовательность $\{X_{k_m}\}_{m \geq 1}$, имеющая слабый предел в топологии $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$, т.е. существует $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$ такой, что для любого $Y \in L^{\infty}(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$:

$$\lim_{m \to \infty} \mathsf{E}^{\lambda} X_{k_m} Y = \mathsf{E}^{\lambda} XY. \tag{73}$$

Определим $\mathsf{Q}^*(A) \triangleq \mathsf{E}^{\lambda}X1_{\{A\}}$, $A \in \mathcal{F}$. Формула (73) верна и для P-п.н. ограниченной ξ, поэтому

$$\lim_{m \to \infty} \mathsf{E}^{\lambda} X_{k_m}\xi = \mathsf{E}^{\lambda}X\xi = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\xi = \lim_{m \to \infty} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}_{k_m}}\xi. \tag{74}$$

Раз $\left\{\mathsf{E}^{\mathsf{Q}_k}\xi\right\}_{k \geq 1}$ имеет предел, то и $\left\{\mathsf{E}^{\mathsf{Q}_{k_m}}\xi\right\}_{m \geq 1}$ имеет тот же предел. Таким образом, получили

$$\sup_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\xi = \lim_{k \to \infty} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}_k}\xi = \lim_{m \to \infty} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}_{k_m}}\xi = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\xi. \tag{75}$$

Теорема доказана.

3.6. В этом разделе приведено доказательство теоремы 6.

3.6.1. Доказательство теоремы 6 использует следующее утверждение.

Лемма 3 *пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда верны следующие утверждения:*

(1)

$$0 \leq \exp\left\{ f_N(S_\bullet) - \sum_{i=1}^{N} (\gamma_i^*, \Delta S_i) \right\} \leq e^{c_2} \quad \mathsf{P}-\text{п.н.}; \tag{76}$$

(2) для любого $t \in N_1$,

$$0 \leq \overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} \leq e^{c_2} \quad \mathsf{P} - п.н.; \tag{77}$$

Доказательство леммы 3. 1) Докажем сначала (76). Формула (12) дает

$$\overline{V}_0 e^{-C_N^*} = \exp\left\{ f_N\left(S_\bullet\right) - \sum_{i=1}^{N} \left(\gamma_i^*, \Delta S_i\right) \right\} \quad \mathsf{Q} - \text{п.н.} \tag{78}$$

Поскольку $e^{-c_2} \leq \overline{V}_0 \leq e^{c_2}$ и $C_N^* \geq 0$ Q-п.н., то (76) немедленно следует из (78).

2) Докажем неравенство (77). Левое неравенство в (77) очевидно, поэтому необходимо доказать только правое. Из (11) следует, что $\frac{\overline{V}_t}{\overline{V}_{t-1}} e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t) + \Delta C_t^*} = 1$ Q-п.н. для любых $t \in N_1$ и $\mathsf{Q} \in \Re_N$. Известно, что $\Delta C_t^* \geq 0$ Q-п.н., откуда $\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} \leq \overline{V}_{t-1}$ Q-п.н. Поэтому теорема 2 дает правую часть неравенства (77). Утверждение доказано.

3.6.2. Доказательство теоремы 6. Докажем равенство (14). Пусть

$$\xi_t\left(\omega\right) = \eta_{t-1} \overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)},$$

где η_{t-1} — $\mathcal{F}_{t-1}^S$-измеримая ограниченная случайная величина, $\left(\overline{V}_t, \mathcal{F}_t^S\right)_{t \in N_0}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (5) и $\left(\gamma_t^*, \mathcal{F}_{t-1}^S\right)_{t \in N_1}$ определена формулой (9). Из второго утверждения леммы 3 следует, что для любого $t \in N_1$ случайные величины $\overline{V}_t$ и $\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)}$ $\mathcal{F}_t^S$-измеримы и ограничены. Рассмотрим $\sup\limits_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \eta_{t-1} \overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)}$. С одной стороны, свойства существенной верхней грани и условного математического ожидания $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\bullet | \mathcal{F}_{t-1}^S\right]$, а также теорема 3 дают

$$\sup_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \eta_{t-1} \overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} = \sup_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \eta_{t-1} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] =$$

$$= \sup_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \eta_{t-1} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] = \sup_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \eta_{t-1} \overline{V}_{t-1}. \tag{79}$$

Далее, воспользовавшись (75), получим равенства

$$\sup_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \eta_{t-1} \overline{V}_{t-1} = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*} \eta_{t-1} \overline{V}_{t-1}, \tag{80}$$

$$\sup_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \eta_{t-1} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] = \tag{81}$$

$$= \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*} \left\{ \eta_{t-1} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \right\}.$$

В силу произвольности η_{t-1} из (79), (80) и (81) следует, что для любых $t \in N_1$

$$\overline{V}_{t-1} = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \quad \mathsf{Q}^* - \text{п.н.} \tag{82}$$

С другой стороны, из (74)–(75) и из свойств условного математического ожидания следуют равенства

$$\sup_{\mathsf{Q} \in \Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \eta_{t-1} \overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} = \lim_{n \to \infty} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^{(n)}} \eta_{t-1} \overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \mathsf{E}^{\lambda} \eta_{t-1} \overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} \frac{d\mathsf{Q}^{(n)}}{d\lambda} (\omega) =$$
$$= \mathsf{E}^{\lambda} \eta_{t-1} \overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} \chi(\omega) = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*} \eta_{t-1} \overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} = \tag{83}$$
$$= \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*} \eta_{t-1} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right].$$

Используем (79), (80) и (83) и получим

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*} \eta_{t-1} \overline{V}_{t-1} = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*} \eta_{t-1} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right]. \tag{84}$$

Произвольность η_{t-1} с учетом (84) дают для любого $t \in N_1$ равенство

$$\overline{V}_{t-1} = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \quad \mathsf{Q}^* - \text{п.н.} \tag{85}$$

Очевидно, что $\overline{V}_t|_{t=N} = \exp\{f_N(S_\bullet)\}$. Отсюда и из рекуррентного соотношения (85) следует равенство для любых $t \in N_1$

$$\overline{V}_t = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*} \left[\exp\left\{ f_N(S_\bullet) - \sum_{i=t+1}^{N} (\gamma_i^*, \Delta S_i) \right\} | \mathcal{F}_t^S \right] = I_t^{\mathsf{Q}^*, \gamma_{t+1}^{*N}} (S_0^t) \quad \mathsf{Q}^* - \text{п.н.}$$

Таким образом, доказали (3). Значит, найдутся "наихудшая" мера Q^* и минимаксная стратегия $\{\gamma_t^*\}_{t \in N_1}$, т.е. существует минимаксная бистратегия $(\mathsf{Q}^*, \gamma_1^{*N})$. Доказательство завершено.

3.7. Доказательство следствия 2. Для удобства изложения обозначим $G_t \triangleq \left\{ \omega \in \Omega : \triangle \ln \overline{V}_t(\omega) = (\gamma_t^*, \triangle S_t)(\omega) - \triangle C_t^*(\omega) \right\}$. Очевидно, что множество G_t является $\mathcal{F}_t^S$-измеримым. Из доказательства теоремы 5 следует существование последовательности $\{\mathsf{Q}^{(n)}\}_{n \geq 1}$, $\mathsf{Q}^{(n)} \in \Re_N$, и вероятностной меры Q^* таких, что для любого $A \in \mathcal{F}_N^S$ вероятность $\mathsf{Q}^*(A) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathsf{Q}^{(n)}(A)$. В силу теоремы 4 $\mathsf{Q}^{(n)}(G_t) = 1$ для всех $n \geq 1$. Значит, $\mathsf{Q}^*(G_t) = \lim\limits_{n \to \infty} \mathsf{Q}^{(n)}(G_t) = 1$. Доказательство завершено.

3.8. Доказательство теоремы 7. 1) Покажем, что утверждение 1 влечет утверждение 2. Пусть Q^* есть "наихудшая" вероятностная мера. Необходимо доказать равенство (14). Предположим противное, а именно, что найдется момент $t \in N_1$, в который имеет место неравенство:

$$\mathsf{Q}^* \left\{ \overline{V}_{t-1} > \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*} \left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \right\} > 0.$$

Значит, $\overline{V}_t > I_t^{\mathsf{Q}^*, \gamma_{t+1}^{*N}} (S_0^t)$. Но последнее противоречит тому, что мера Q^* является "наихудшей". Полученное противоречие доказывает импликацию.

2) Докажем теперь, что из утверждения 2 следует утверждение 3. Умножим обе части (14) на $\exp\left\{ -\sum\limits_{i=1}^{t-1} (\gamma_i^*, \Delta S_i) \right\}$. С учетом определения последовательности $\left\{ \overline{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S \right\}_{t \in N_0}$ и свойств условного математического ожидания получаем, что

$$\overline{\mu}_{t-1} = \overline{V}_{t-1} \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{t-1} (\gamma_i^*, \Delta S_i) \right\} =$$

$$= \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*} \left[\overline{V}_t \exp\left\{ -\sum_{i=1}^{t} (\gamma_i^*, \Delta S_i) \right\} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*} \left[\overline{\mu}_t | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \quad \mathsf{Q} - \text{п.н.}$$

Из леммы 3 и теоремы 3 следует, что $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*} \overline{\mu}_t < \infty$. Значит, $\left\{ \overline{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S \right\}_{t \in N_0}$ — мартингал относительно Q^*.

3) Наконец, докажем, что утверждение 3 влечет справедливость утверждения 1. Из определения S-оценивающей последоватеьности $\left\{ \overline{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S \right\}_{t \in N_0}$ и предположений теоремы следует, что Q^*-п.н.

а) $\overline{\mu}_N = \exp\left\{ f_N(S_\bullet) - \sum\limits_{i=1}^{N} (\gamma_i^*, \Delta S_i) \right\}$;

б) $\overline{\mu}_0 = \overline{V}_0 = \operatorname*{ess\,inf}\limits_{\gamma_1^N \in D_1^N} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\mathsf{Q} \in \Re_N} I_0^{\mathsf{Q}, \gamma_1^N} (S_0)$;

в) $\left\{ \overline{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S \right\}_{t \in N_0}$ — мартингал относительно Q^*.

Значит, получили (14), откуда

$$\overline{V}_t = I_t^{\mathsf{Q}^*, \gamma_{t+1}^{*N}} \left(S_0^t \right) \quad \mathsf{Q}^* - \text{п.н.} \tag{86}$$

Согласно замечанию 4 для любых $t \in N_0$ и $\mathsf{Q} \in \Re_N$ имеем

$$\overline{\mu}_t \geq \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{\mu}_{t+1} | \mathcal{F}_t^S \right] \quad \mathsf{Q} - \text{п.н.} \tag{87}$$

Поэтому из (10), (86), (87), замечания 1 и рекуррентного соотношения (38) следует, что для любых $t \in N_0$ и $\mathsf{Q} \in \Re_N$

$$I_t^{\mathsf{Q}^*, \gamma_{t+1}^{*N}} \left(S_0^t \right) = \overline{V}_t \geq \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_{t+1} e^{-\left(\gamma_{t+1}^*, \Delta S_{t+1} \right)} | \mathcal{F}_t^S \right] \geq$$

$$\geq \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[I_{t+1}^{\mathsf{Q},\gamma_{t+2}^{*N}}\left(S_0^{t+1}\right)e^{-\left(\gamma_{t+1}^{*},\Delta S_{t+1}\right)}|\mathcal{F}_t^S\right] = I_t^{\mathsf{Q},\gamma_{t+1}^{*N}}\left(S_0^t\right) \quad \mathsf{Q}^* - \text{п.н.}$$

Следовательно, Q^* — "наихудшая" мера. Утверждение доказано.

3.9. Доказательство теоремы 8. Теорема непосредственно следует из утверждений 1–7.

§4. Доказательства утверждений 10–15

4.1. В этом разделе доказана теорема 10, которая связывает задачу (2) и задачу расчета европейского опциона на неполном $\left(1, S^{(1)}, \ldots, S^{(d)}\right)$-рынке.

4.1.1. Доказательство теоремы 10. Теорема 3 утверждает существование стратегии $\{\gamma_t^*\}_{t\in N_1} \in D_1^N$, удовлетворяющей (9). Значит, согласно (18), для любого $t \in N_1$ найдется последовательность предсказуемых величин $\{\beta_t^*\}_{t\in N_0}$ таких, что

$$\Delta\beta_t^* = -\left(S_{t-1}, \Delta\gamma_t^*\right), \quad \beta_t^*|_{t=0} = \beta_0^*. \tag{88}$$

Значение β_0^* будет определено ниже. Таким образом, мы только что построили самофинансируемый портфель $\pi^* = (\beta_t^*, \gamma_t^*)_{t\in N_0}$. Как следует из (17) для любого $t \in N_0$ капитал $X_t^{\pi^*}$ портфеля π^* определен формулой

$$X_t^{\pi^*} = \beta_t^* + \left(\gamma_t^*, S_t\right). \tag{89}$$

Поэтому для любого $t \in N_1$ справедливо равенство Q-п.н.:

$$\Delta X_t^{\pi^*} \triangleq X_t^{\pi^*} - X_{t-1}^{\pi^*} = \Delta\beta_t^* + \Delta\left(\gamma_t^*, S_t\right). \tag{90}$$

Совместив (90) и (88), получим

$$\Delta X_t^{\pi^*} \triangleq \left(\gamma_t^*, \Delta S_t\right) \quad \mathsf{Q} - \text{п.н.} \tag{91}$$

Из теоремы 4 (см. (11)) следует, что для любого $t \in N_1$,

$$\left(\gamma_t^*, \Delta S_t\right) = \Delta \ln \overline{V}_t + \Delta C_t^* \;\; \mathsf{Q} - \text{п.н.}, \tag{92}$$

где $\left(C_t^*, \mathcal{F}_t\right)_{t\in N_0}$ таково, что

1) $C_0^* = 0$;

2) для любых $t \in N_0$ и $\mathsf{Q} \in \Re_N$ верно неравенство $\Delta C_t^* \geq 0$ Q-п.н. По совокупности (91) и (92) имеем

$$\Delta\left(X_t^{\pi^*} - \ln\overline{V}_t - C_t^*\right) = 0 \;\; \mathsf{Q} - \text{п.н.}$$

Из последнего равенства для любого $t \in N_0$ следует, что

$$X_t^{\pi^*} - \ln \overline{V}_t - C_t^* = X_0^{\pi^*} - \ln \overline{V}_0 - C_0^* \ \ \mathsf{Q} - \text{п.н.} \tag{93}$$

Пусть

$$X_0^{\pi^*} = \ln \overline{V}_0 \ \ \mathsf{Q} - \text{п.н.} \tag{94}$$

Тогда из (93), (94) и равенства $C_0^* = 0$ получаем, что для любых $t \in N_0$ и $\mathsf{Q} \in \Re_N$

$$X_t^{\pi^*} - C_t^* = \ln \overline{V}_t \ \ \mathsf{Q} - \text{п.н.} \tag{95}$$

Поскольку $\left(C_t^*, \mathcal{F}_t^S\right)_{t \in N_0}$ есть неубывающая последовательность с $C_0^* = 0$, то из (19) вытекает, что $\widehat{X}_t^{\pi^*} = X_t^{\pi^*} - C_t^*$ является капиталом самофинансируемого портфеля π^* с потреблением C_t^* в момент времени $t \in N_0$. Кроме того, из (95) заключаем, что $\widehat{X}_t^{\pi^*} = \ln \overline{V}_t$ есть капита самофинансируемого портфеля с потреблением (π^*, C^*). Раз $X_0^{\pi^*} = \ln \overline{V}_0$, то без потери общности можно предположить, что $\beta_0^* = \ln \overline{V}_0$, а $\gamma_0^* = 0$.

Из теоремы 4 (см. (11)) следует, что $\widehat{X}_N^{\pi^*} = \ln \overline{V}_N = f_N\left(S_\bullet\right)$ Q-п.н. относительно любой $\mathsf{Q} \in \Re_N$. Значит, получили, что

$$f_N\left(S_\bullet\right) = \ln \overline{V}_N = \ln \overline{V}_0 + \sum_{t=1}^{N} \left(\gamma_t^*, \Delta S_t\right) - C_N^* \ \ \mathsf{Q} - \text{п.н.}$$

Таким образом, доказали, что самофинансируемый портфель с потреблением (π^*, C^*) является совершенным суперхеджирующим. Осталось доказать, что (π^*, C^*) — минимальный совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением. Для этого потребуется следующая лемма.

4.1.2.

Лемма 4 *Пусть $f_N\left(S_\bullet\right)$ — ограниченное $\mathcal{F}_N^S$-измеримое платежное обязательство, а (π^*, C^*) — совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением, определенный формулами (9), (11) и (18). Если (π, C) — любой другой совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением (т.е. $(\pi, C) \neq (\pi^*, C^*)$), то для любых $t \in N_0$ и $\mathsf{Q} \in \Re_N$ справедливо неравенство Q-п.н.:*

$$1 \geq \exp\left\{\widehat{X}_t^{\pi^*} - \widehat{X}_t^{\pi}\right\}. \tag{96}$$

Доказательство леммы 4. В соответствии с теоремой 4 и по предположениям леммы платежное обязательство допускает представление относительно любой меры $\mathsf{Q} \in \Re_N$:

$$\begin{aligned} f_N(S_\bullet) &= \widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} + \sum_{i=t_0+1}^{N} (\gamma_i^*, \Delta S_i) - \left(C_N^* - C_{t_0}^*\right) = \\ &= \widehat{X}_{t_0}^{\pi} + \sum_{i=t_0+1}^{N} (\gamma_i, \Delta S_i) - (C_N - C_{t_0}) \ \ \mathsf{Q} - \text{п.н.}, \end{aligned}$$

где $t_0 \in N_0$ — любое. Отсюда получаем неравенство для любой меры $\mathsf{Q} \in \Re_N$:

$$\begin{aligned} \widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi} - \sum_{i=t_0+1}^{N} \Delta C_i^* = \sum_{i=t_0+1}^{N} (\gamma_i - \gamma_i^*, \Delta S_i) - \\ - (C_N - C_{t_0}) \ \ \mathsf{Q} - \text{п.н.} \end{aligned} \tag{97}$$

Поскольку $C_N - C_{t_0} \geq 0$ Q-п.н., то из (97) получаем

$$\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi} - \sum_{i=t_0+1}^{N} \Delta C_i^* \leq \sum_{i=t_0+1}^{N} (\gamma_i - \gamma_i^*, \Delta S_i) \ \ \mathsf{Q} - \text{п.н.} \tag{98}$$

Для любого $t \in \{t_0 + 1, \ldots, N\}$ капитал совершенного суперхеджирующего портфеля с потреблением (π^*, C^*) допускает представление $\widehat{X}_t^{\pi*} = \ln \overline{V}_t$ Q-п.н. Тогда, применив (14), получаем

$$\Delta \widehat{X}_t^{\pi^*} = (\gamma_t^*, \Delta S_t) - \Delta C_t^* \ \ \mathsf{Q} - \text{п.н.}$$

Применив последнее равенство к (98), получим

$$\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi} + \sum_{i=t_0+1}^{N} \left[\Delta \widehat{X}_i^{\pi^*} - (\gamma_i, \Delta S_i)\right] \leq 0 \ \ \mathsf{Q} - \text{п.н.}$$

Отсюда, очевидно, следует, что

$$\exp\left\{\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi} + \sum_{i=t_0+1}^{N} \left[\Delta \widehat{X}_i^{\pi^*} - (\gamma_i, \Delta S_i)\right]\right\} \leq 1 \ \ \mathsf{Q} - \text{п.н.} \tag{99}$$

Возьмем условное математическое ожидание $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\bullet|\mathcal{F}_{t_0}^S\right]$ от обеих частей неравенства (99) относительно любой меры $\mathsf{Q} \in \Re_N$. Учитывая, что

$\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} = \ln \overline{V}_{t_0}$, $\widehat{X}_N^{\pi^*} = f_N(S_\bullet)$, и воспользовавшись (1), получаем неравенство Q-п.н.

$$
\begin{aligned}
1 &\geq \exp\left\{\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi}\right\} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\exp\left\{\widehat{X}_N^{\pi^*} - \ln \overline{V}_{t_0} - \sum_{i=t_0+1}^{N}(\gamma_i, \Delta S_i)\right\} |\mathcal{F}_{t_0}^S\right] = \\
&= \frac{\exp\left\{\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi}\right\}}{\overline{V}_{t_0}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\exp\left\{f_N(S_\bullet) - \sum_{i=t_0+1}^{N}(\gamma_i, \Delta S_i)\right\} |\mathcal{F}_{t_0}^S\right] = \\
&= \exp\left\{\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi}\right\} \frac{I_{t_0}^{\mathsf{Q},\gamma_{t_0+1}^N}\left(S_0^{t_0}\right)}{\overline{V}_{t_0}}.
\end{aligned}
$$

Поскольку левая часть последнего неравенства не зависит от выбора $\mathsf{Q} \in \Re_N$, то для любого $\gamma_{t_0+1}^N \in D_{t_0+1}^N$ справедливо неравенство

$$
1 \geq \exp\left\{\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi}\right\} \frac{\operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} I_{t_0}^{\mathsf{Q},\gamma_{t_0+1}^N}\left(S_0^{t_0}\right)}{\overline{V}_{t_0}} \quad \mathsf{Q} - \text{п.н.} \tag{100}
$$

В свою очередь, неравенство (100) означает, что для любых $t \in N_0$ и $\mathsf{Q} \in \Re_N$ справедливо неравенство Q-п.н.:

$$
1 \geq \exp\left\{\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi}\right\} \frac{\operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t_0+1}^N \in D_{t_0+1}^N} \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} I_{t_0}^{\mathsf{Q},\gamma_{t_0+1}^N}\left(S_0^{t_0}\right)}{\overline{V}_{t_0}} = \exp\left\{\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi}\right\}.
$$

Доказательство завершено.

4.1.3. Завершим доказательство теоремы 10: докажем, что совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением (π^*, C^*) является минимальным. Преположим противное, т.е. что найдутся момент $t_0 \in N_0$, вероятностная мера $\mathsf{Q} \in \Re_N$ и совершенный суперхеджирующий портфель с потреблением (π, C) такие, что $\mathsf{Q}\left(\widehat{X}_{t_0}^{(\pi^*)} > \widehat{X}_{t_0}^{(\pi)}\right) > 0$. Но из (96) следует, что $\mathsf{Q}\left(\widehat{X}_{t_0}^{(\pi^*)} > \widehat{X}_{t_0}^{(\pi)}\right) = 0$. Пришли к противоречию, что доказывает минимальность совершенного суперхеджирующего портфеля с потреблением (π^*, C^*). Теорема доказана.

4.2. Доказательство теоремы 11. 1) В силу следствия 1 и теоремы 6 следующее неравенство имеет место Q^*-п.н. для любых $\gamma \in D_t$:

$$
\begin{aligned}
\overline{V}_{t-1} &\leq \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\Re_N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma,\Delta S_t)} |\mathcal{F}_{t-1}^S\right] = \\
&= \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma,\Delta S_t)} |\mathcal{F}_{t-1}^S\right].
\end{aligned} \tag{101}
$$

Рассмотрим $\gamma = \gamma_t^* + h\overline{\gamma}_t$, где $h \in (0,1]$ — произвольное, а $\overline{\gamma}_t$ — $\mathcal{F}_{t-1}^S$-измеримый вектор. Без потери общности можно предполагать, что $|\overline{\gamma}_t| \leq 1$. Тогда из (101) следует неравенство Q^*-п.н.

$$\begin{aligned} \overline{V}_{t-1} &\leq \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\overline{V}_t e^{-(\gamma_t^*,\Delta S_t)} e^{-h(\overline{\gamma}_t,\Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] = \\ &= \overline{V}_{t-1}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\exp\left\{\Delta \ln \overline{V}_t - (\gamma_t^*, \Delta S_t)\right\} e^{-h(\overline{\gamma}_t,\Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right]. \end{aligned} \tag{102}$$

Согласно следствию 2

$$\Delta \ln \overline{V}_t - (\gamma_t^*, \Delta S_t) = -\Delta C_t^* \leq 0 \;\; \mathsf{Q}^* - \text{п.н.}.$$

Поэтому (102) можно усилить Q^*-п.н.

$$\begin{aligned} 1 &\leq \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\exp\left\{-\Delta C_t^* - h\left(\overline{\gamma}_t, \Delta S_t\right)\right\} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] \leq \\ &\leq \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[e^{-h(\overline{\gamma}_t,\Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right]. \end{aligned} \tag{103}$$

По формуле Ньютона-Лейбница формулу (103) можно переписать при любом $h \in (0,1]$ следующим образом:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\frac{1}{h}\int_0^h \frac{d}{du} e^{-u(\overline{\gamma}_t,\Delta S_t)} du | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] = \\ &= -\mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\left(\overline{\gamma}_t, \Delta S_t\right) \frac{1}{h}\int_0^h e^{-u(\overline{\gamma}_t,\Delta S_t)} du | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] \;\; \mathsf{Q}^* - \text{п.н.} \end{aligned} \tag{104}$$

Переходя к пределу по $h \to 0$ и воспользовавшись леммой Фату, получим Q^*-п.н.

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{h\downarrow 0}\mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\left(\overline{\gamma}_t, \Delta S_t\right) \frac{1}{h}\int_0^h e^{-u(\overline{\gamma}_t,\Delta S_t)} du | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] \geq \\ &\geq \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\left(\overline{\gamma}_t, \Delta S_t\right) \lim_{h\downarrow 0}\frac{1}{h}\int_0^h e^{-u(\overline{\gamma}_t,\Delta S_t)} du | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\left(\overline{\gamma}_t, \Delta S_t\right) | \mathcal{F}_{t-1}^S\right]. \end{aligned}$$

Произвольность $\overline{\gamma}_t$ означает, что

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\Delta S_t | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] = 0 \;\; \mathsf{Q}^* - \text{п.н.}$$

Значит, последовательность $\{S_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in N_0}$ есть локальный мартингал относительно меры Q^*, а сама мера Q^* — мартингальная. Доказательство завершено.

4.3. Доказательство теоремы 12. С одной стороны, из утверждения следствия 2 вытекает, что для любых $t \in N_1$ вероятность $\mathsf{Q}^* \left\{\Delta C_t^* \geq 0\right\} = 1$. Поэтому для любого $t \in N_1$ имеем

$$1 - e^{-\Delta C_t^*} \geq 0 \;\; \mathsf{Q}^* - \text{п.н.} \tag{105}$$

С другой стороны, теоремы 6 и (14) дают для любого $t \in N_1$

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[1 - e^{-\Delta C_t^*} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] = 0 \;\; \mathsf{Q}^* - \text{п.н.} \tag{106}$$

По совокупности (105) и (106) получаем для любого $t \in N_1$

$$\Delta C_t^* = 0 \;\; \mathsf{Q}^* - \text{п.н.} \tag{107}$$

Поскольку $C_0^* = 0$, то из (107) следует, что для любого $t \in N_0$ верно утверждение: $\mathsf{Q}^* \left\{C_t^* = 0\right\} = 1$.

Докажем (30). Согласно теореме 4 (см. (11)) и (107) для любого $t \in N_1$ имеет место равенство Q^*-п.н.

$$\Delta \ln \overline{V}_t = \left(\gamma_t^*, \Delta S_t\right).$$

Просуммировав эти равенства, получим Q^*-п.н. для любого $0 \leq k \leq N$:

$$\ln \overline{V}_k = \ln \overline{V}_0 + \sum_{i=1}^{k} \left(\gamma_i^*, \Delta S_i\right) \tag{108}$$

В частности, ввиду $\ln \overline{V}_t|_{t=N} = f_N\left(S_\bullet\right)$, имеем Q^*-п.н.

$$\ln \overline{V}_t|_{t=N} = f_N\left(S_\bullet\right) = \ln \overline{V}_0 + \sum_{i=1}^{N} \left(\gamma_i^*, \Delta S_i\right) \tag{109}$$

Взяв условное математическое ожидание $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\bullet | \mathcal{F}_0^S\right]$ от обеих частей (109), учитывая мартингальность Q^*, получим

$$\ln \overline{V}_0 = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[f_N\left(S_\bullet\right) | \mathcal{F}_0^S\right].$$

Отсюда и из (109) следует (30). Утверждение доказано.

Замечание 10 *Пусть мартингал $\{\ln \overline{V}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$ допускает представление (108) относительно вероятностной меры Q^*, принадлежащей замыканию множества $\mathfrak{R}_N$ (в топологии слабой сходимости вероятностных мер). Не трудно видеть, что в этом случае тройка $\left(\mathsf{Q}^*, \gamma_1^{*N}, \overline{V}_0\right)$ принадлежит решению задачи (2). Действительно, (109) равносильно равенству: $\ln \overline{V}_0 = f_N - \sum\limits_{i=1}^{N} \left(\gamma_i^*, \Delta S_i\right) \quad \mathsf{Q}^* -$ п.н. Взяв от обеих частей последовательно сначала экспоненту, а потом — условное математическое ожидание $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\cdot | \mathcal{F}_0^S\right]$, получим (3) из определения решения задачи (2).*

4.4.

Замечание 11 *Пусть имеется тройка* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ *и множество эквивалентных (базовой мере* P*) вероятностных мер* $\Re$. *Тогда мера Дирака элемента* $\hat{\omega} \in \Omega$ *(принадлежащего носителю меры* P*) принадлежит замыканию множества* $\Re$. *Действительно, определим вероятностную меру* $\hat{\mathsf{Q}}_n$ *так, чтобы ее носителем была окрестность элемента* $\hat{\omega}$ *с радиусом* $\frac{1}{n}$, *а числовая последовательность* $\{\alpha_n\}_{n \leq 1}$ *такова, что* $\alpha_n > 0$, $\alpha_n \uparrow 1$ *при* $n \to \infty$. *Тогда* $\mathsf{Q}_n \triangleq \alpha_n \hat{\mathsf{Q}}_n + (1 - \alpha_n)\mathsf{Q}$ *принадлежит* $\Re$ *для любого* $n \geq 1$ *и слабо сходится к мере Дирака элемента* $\hat{\omega}$ *(т.е.* $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}_n} g(\omega) \to g(\hat{\omega})$ *для любой ограниченной непрерывной* g*).*

Доказательство теоремы 13. Пусть существует решение задачи (2), а именно тройка $\left(\mathsf{Q}^*, \gamma_1^{*N}, \overline{V}_0\right)$. Отметим, что неизбыточность исходного $(1, S)$-рынка (относительно меры P) гарантирует его неизбыточность относительно "наихудшей" вероятностной меры Q^* (этот факт доказывается аналогично тому, как было доказано следствие 2). Значит, для любого $t \in N_1$ базис носителя регулярной мартингальной условной вероятности $\mathsf{Q}^* \left[\cdot | \mathcal{F}_t^S\right]$ состоит из d элементов, а его базис — из по крайней мере $d+1$ элемента (следует из мартингальности меры Q^*). Если эти носители (каждый) состоит из $d+1$ элемента, то мы сразу получаем утверждение теоремы.

Рассмотрим дискретную функцию множеств $\hat{\mathsf{Q}}$, определенную следующим образом:

1) $\hat{\mathsf{Q}}_0(A) \triangleq \mathsf{Q}^*(A)$ для любого $A \in \mathcal{F}_0^S$;

2) $p_{t,i} \triangleq \hat{\mathsf{Q}}\left(\triangle S_t = \triangle x_{t,i} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right)$, $t \in N_1$, $j = 1, ..., d+1$, где:

i) для любого $t \in N_1$ элементы множества $\{\triangle \hat{x}_{t,j}\}_{t \in N_1, 1 \leq j \leq d+1}$ афинно-независимые $\mathcal{F}_{t-1}^S$-измеримые и принадлежат носителю регулярной условной вероятности $\mathsf{Q}^* \left[\cdot | \mathcal{F}_{t-1}^S\right]$, причем для любого $t \in N_1$ следующая система (относительно d-мерного γ и 1-мерного z) несовместна:

$$(\triangle \hat{x}_{t,j}, \gamma) \geq -z, -z > 0 \quad 1 \leq j \leq d+1; \tag{110}$$

(существование такого множества гарантировано тем, что: (а) носитель $\mathsf{Q}^* \left[\cdot | \mathcal{F}_t^S\right]$ имеет полный базис в силу неизбыточности рынка; (б) если система для $j \in \{1, ..., d\}$ совместна, то, как следует из леммы 1, всегда существует $\triangle \hat{x}_{t,d+1}$ такой, что $(\triangle \hat{x}_{t,d+1}, \gamma) < 0$).

ii) для любого $t \in N_1$ элементы множества $\{\hat{p}_{t,j}\}_{t \in N_1, 1 \leq j \leq d+1}$ определены как решение задачи:

$$\sum_{j=1}^{d+1} \hat{p}_{t,j} \triangle \hat{x}_{t,j} = 0, \quad \sum_{i \geq 1} p_{t,i} = 1. \tag{111}$$

Из теории решения систем линейных уравнений известно [14], что система (111) имеет неотрицательное решение тогда и только тогда, когда система (110) несовместна.

Отметим, что построенная вероятностная мера $\hat{\mathsf{Q}}$ принадлежит замыканию $\mathfrak{R}_N$ в топологии слабой сходимости вероятностных мер (см. замечание 11).

Раз $\{\triangle\hat{x}_{t,j}\}_{t\in N_1, 1\leq j\leq d+1}$ есть подмножество носителя регулярной условной вероятности $\mathsf{Q}^*\left[\cdot|\mathcal{F}_{t-1}^S\right]$, $t \in N_1$, то $(\gamma_t^*, \triangle\hat{x}_{t,j}) = \ln \overline{V}_t(S_0, ..., S_{t-1}, S_{t-1} + \triangle\hat{x}_{t,j})$, $j = 1, ..., d+1$.

Таким образом, как следует из замечания 10, тройка $\left(\hat{\mathsf{Q}}, \gamma_1^{*N}, \overline{V}_0\right)$ является решением задачи (2) на неизбытоном $(1, S)$-рынке, где регулярные условные вероятности $\hat{\mathsf{Q}}\left(\cdot|\mathcal{F}_{n-1}^S\right)$, $t \in N_1$, дискретны, а их носители состоят из $d+1$ афинно-независимого предсказуемого вектора.

4.5. Доказательство теорем 14 и 15. Утверждения этих теорем сразу следуют из теорем 10–13.

Литература

1. Bertsekas D P., Shreve S. E. Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case. Academic Press, Orlando, 1978.

2. Biagini S., Frittelli M. A unified framework for utility maximization problems: an Orlicz space approach // Annals of Applied Probability. 2008. Vol. 18. No. 3. P. 929–966.

3. Богачев В. И. Основы теории меры. Тома I, II. Москва-Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика 2003.

4. Boyarintseva N. S., Khametov V. M. A New Martingale Representation Theorem (Discrete Time) // Math. Notes. Vol. 75. No. 1. P. 40–54.

5. El Karoui N., Quenez M. C. Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market // SIAM Journal on Control and Optimization. 1995. Vol. 33. No. 1. P. 29–66.

6. Elliott R. Stochastic Calculus and Applications. Springer-Verlag, Heidelberg, 1983.

7. Dunford N., Schwartz J. T. Linear Operators. Part I. General Theory. Wiley-Interscience, 1988.

8. Föllmer H., Kabanov Yu. M. Optional decomposition and Lagrange multipliers // Finance Stoch. 1998. Vol. 2. P. 69–81.

9. Föllmer H., Kramkov D. Optional decomposition under constraints // Prolab. Theory and Related Fields. 1997. Vol. 109. P. 1–25.

10. Föllmer H., Schied A. Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time. Walter de Gruyter, Berlin, 2004.

11. Гущин А. А. О верхней цене хеджирования неотрицательных платежных обязательств // Современные проблемы математики и механики. Том VIII. Математика. Выпуск 3. К 80-летию механико-математического факультета МГУ им. М. В. Ломоносова, ред. А. Н. Ширяев, А. В. Лебедев, Изд-во Моск. ун-та, Москва. 2013. С. 60–72.

12. Kramkov D. O. Optional Decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets // Probability Theory and Related Fields. 1996. Vol. 105. No. 4. P. 459–479.

13. Krylov N. V. Controlled Diffusion Processes. Springer, Berlin, 2009.

14. Куликов Л. Я. Алгебра и теория чисел: Учеб. пособие для педагогических институтов. М.: Высш. школа, 1979.

15. Левин В. Л. Выпуклый анализ в пространствах измеримых функций и его применение в математике и экономике. М.: Наука, 1985.

16. Rokhlin D. B. Equivalent supermartingale densities and measures in discrete time infinite horizon market models // Theory Probab. Appl. Vol. 53. No. 4. P. 626–647.

17. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 2. Теория. М: ФАЗИС, 1998.

18. Ширяев А. Н. Вероятность. Кн. 1-2. М.: МЦНМО, 2004.

19. Волков С. Н., Крамков Д. О. О методологии хеджирования опционов // Обозрение прикл. и промышл. матем. 1998. Т. 4. Вып. 1. С. 18-65.