

РЕЗОНАНСНЫЕ СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЛОВУШКИ ПЕННИНГА

Г.А. Сафьянов

gasafyanov@yandex.ru

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Поступила 05.08.2019

В работе рассмотрена цилиндрическая ловушка Пеннинга в случае трехчастотного резонанса в отношении . В условиях вторичного резонанса построены неприводимые представления вторичной алгебры симметрий. Найдена асимптотика спектра и собственные функции эффективного гамильтониана ловушки.

УДК 517.927.25:530.145

DOI: 10.31145/2224-8412-2020-20-1-86-104

1. Введение

Ловушка Пеннинга – устройство, использующее комбинацию статического электрического и магнитного полей для удержания заряженных частиц [1]. Ловушки могут использоваться для высокоточных измерений свойств заряженных частиц [2-8], или играть роль кубита [9]. Статическое электрическое поле седлового типа в идеальной ловушке создается системой трех электродов, имеющих форму гиперболоидов. Реальные ловушки

имеют конечный размер и различную геометрию управляющих электродов [1]. В данной работе рассматриваются цилиндрические ловушки с плоскими концевыми электродами. Такое устройство ловушки имеет некоторые преимущества, например, простоту изготовления [10,11], по сравнению с гиперболической формой.

Модель ловушки Пеннинга представляется трехчастотным осциллятором, частоты которого зависят от величины электрического и магнитных полей. Гамильтониан ловушки имеет бесконечное спектральное вырождение. При некотором резонансе частот увеличиваются щели между энергетическими уровнями вплоть до значений, различимых в эксперименте [12-16]. В случае резонанса алгебра симметрий основной части гамильтониана задается нелинейными коммутационными соотношениями. При этом можно подобрать резонансное условие на возмущение магнитного поля (вторичный резонанс), которое приведет к увеличению энергетических щелей, появляющихся от возмущений младших порядков [13]. В условиях вторичного резонанса эффективный гамильтониан ловушки может быть реализован дифференциальным оператором второго порядка.

Ловушка определяется тремя параметрами [12]: это размер конденсатора r , магнитная длина $l_0 = \sqrt{\frac{ch}{eB_0}}$ и размер неоднородности магнитного поля $L^{-1} = \nabla B / B_0$, через которые можно выразить следующие безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{\frac{r}{L}} - \text{малый параметр,} \\ h &= \sqrt{\frac{l_0}{r}} - \text{эффективная постоянная Планка.} \end{aligned} \tag{1}$$

В качестве возмущения порядка ε рассматривается малое отклонение магнитного поля. В качестве вторичного возмущения рассматривается линейная неоднородность магнитного поля (поле Иоффе).

В работе найдена алгебра симметрий усредненной поправки первого порядка к основному гамильтониану ловушки. По общим методам [17] построено ее неприводимое представление в пространстве антиголоморфных функций. Спектр и приближенные собственные функции выражены через собственные значения и собственные функции вторичного усреднения в неприводимом представлении.

2. Электрический потенциал цилиндрической ловушки

Пусть кольцевой электрод имеет форму цилиндра радиуса r и высотой h . Будем считать, что на его поверхности поддерживается потенциал U_0 . Кон-

цевые электроды имеют плоскую круглую форму и заземлены. Тогда потенциал внутри цилиндрической ловушки является решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 \\ \Phi|_{x^2+y^2=r^2} = U_0 \\ \Phi|_{z=\pm h} = 0, \end{cases}$$

здесь введена ортогональная система координат x, y, z с центром в центре ловушки и z , направленной вдоль оси цилиндра.

Лемма 1. *Электрический потенциал внутри цилиндрической ловушки Пеннинга задается функцией:*

$$\Phi(\rho, z) = U_0 \left(1 - \sum_k \frac{J_0\left(\frac{\mu_k}{r} \rho\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_k}{r} z\right)}{\mu_k J_1(\mu_k) \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_k}{r} h\right)} \right),$$

где $\rho^2 = x^2 + y^2$, J_0, J_1 — функции Бесселя первого рода порядка 0 и 1 соответственно, а μ_k — нули J_0 .

Действительно, положим $\Phi = \Psi + U_0$ и перейдем к цилиндрическим координатам (ρ, θ, z) . Заметим, что потенциал не должен зависеть от θ из-за наличия вращательной симметрии относительно оси цилиндра. В новых координатах имеем:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0, \\ \Psi|_{\rho=r} = 0, \quad \Psi|_{z=\pm h} = -U_0. \end{cases}$$

Полученное уравнение решаем разделением переменных. Положим $\Psi = R(\rho)Z(z)$. Получаем:

$$\begin{cases} \rho R'' + R' + \lambda \rho R = 0, & \begin{cases} Z'' + \lambda Z = 0, \\ Z(-h) = Z(h) = -U_0. \end{cases} \\ R(r) = 0, \end{cases}$$

Слева мы получили уравнение Бесселя нулевого порядка. Его решение — $R(\rho) = C J_0(\rho\sqrt{\lambda})$. Из граничного условия $R(r) = 0$ получим $C J_0(r\sqrt{\lambda}) = 0$, но $C \neq 0$ (иначе $R(\rho) \equiv 0$). Следовательно, $\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{r}\right)^2$, где μ_k — нули J_0 .

Из второго уравнения находим $Z_k(z) = C_{1k} e^{\frac{\mu_k z}{r}} + C_{2k} e^{-\frac{\mu_k z}{r}}$.

В итоге получаем

$$\Psi(\rho, z) = \sum_k \left(C_{1k} e^{\frac{\mu_k z}{r}} + C_{2k} e^{-\frac{\mu_k z}{r}} \right) J_0 \left(\frac{\mu_k}{r} \rho \right).$$

Из условия $\Psi(\rho, -h) = \Psi(\rho, h) = -U_0$ находим, что $C_{1k} = C_{2k} = C_k$, а значит, $-U_0 = \sum \gamma_k J_0 \left(\frac{\mu_k}{r} \rho \right)$, где $\gamma_k = 2C_k \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k}{r} h \right)$. Умножим последнее равенство на $\rho J_0 \left(\frac{\mu_n}{r} \rho \right)$ и проинтегрируем обе части от 0 до r учитывая, что

$$\int_0^r \rho J_0 \left(\frac{\mu_n}{r} \rho \right) J_0 \left(\frac{\mu_m}{r} \rho \right) d\rho = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{1}{2} r^2 J_1(\mu_n), & m = n, \end{cases}$$

а также

$$\int_0^r \rho J_0 \left(\frac{\mu_k}{r} \rho \right) d\rho = \frac{r^2}{\mu_k} J_1(\mu_k).$$

Находим $\gamma_k = -\frac{2U_0}{\mu_k J_1(\mu_k)}$, следовательно, $C_k = \frac{-U_0}{\mu_k J_1(\mu_k) \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k}{r} h \right)}$. Таким образом,

$$\Psi(\rho, z) = -U_0 \sum_k \frac{J_0 \left(\frac{\mu_k}{r} \rho \right) \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k}{r} z \right)}{\mu_k J_1(\mu_k) \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k}{r} h \right)},$$

и окончательно¹:

$$\Phi(\rho, z) = U_0 \left(1 - \sum_k \frac{J_0 \left(\frac{\mu_k}{r} \rho \right) \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k}{r} z \right)}{\mu_k J_1(\mu_k) \operatorname{ch} \left(\frac{\mu_k}{r} h \right)} \right). \quad (2)$$

¹ Может показаться, что потенциал не совпадает с расчетами для цилиндрических ловушек в работах [10,11]. Однако, на самом деле это разные записи одной и той же функции. Получить другой вид можно, поменяв порядок решения уравнений на R и Z .

Найдем разложение электрического потенциала (2) вблизи центра ловушки. В силу симметрии цилиндра и краевых условий, разложение будет иметь вид:

$$\Phi(\rho, z) = \Phi(0) + (A\rho^2 + Bz^2) + (C\rho^4 + D\rho^2z^2 + Ez^4) + (F\rho^6 + G\rho^4z^2 + H\rho^2z^4 + Iz^6) + O(q^8),$$

Подставляя это разложение в уравнение Лапласа, находим зависимости между коэффициентами

$$2A + B = 0; \quad \begin{cases} 8C + D = 0, \\ D + 3E = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 18F + G = 0, \\ 4G + 3H = 0, \\ 15I + 2H = 0. \end{cases}$$

Следовательно, можно представить потенциал (2) в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, z) = & \Phi(0) + \alpha(2z^2 - \rho^2) + \frac{\beta}{8}(3\rho^4 - 24\rho^2z^2 + 8z^4) + \\ & + \frac{\gamma}{5}(5\rho^6 - 90\rho^4z^2 + 120\rho^2z^4 - 16z^6) + O(q^8), \end{aligned}$$

где α, β, γ имеют вид:

$$\alpha = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}(0, 0); \quad \beta = \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4}(0, 0); \quad \gamma = \frac{1}{720} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \rho^6}(0, 0).$$

Для коэффициента α имеем:

$$\alpha = \frac{U_0}{r^2} \sum_k \frac{\mu_k}{J_1(\mu_k) \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_k}{r} h\right)}.$$

Похожая зависимость α от соотношения $\frac{h}{r}$ (Рис. 1) уже наблюдалась в работах [10,11].

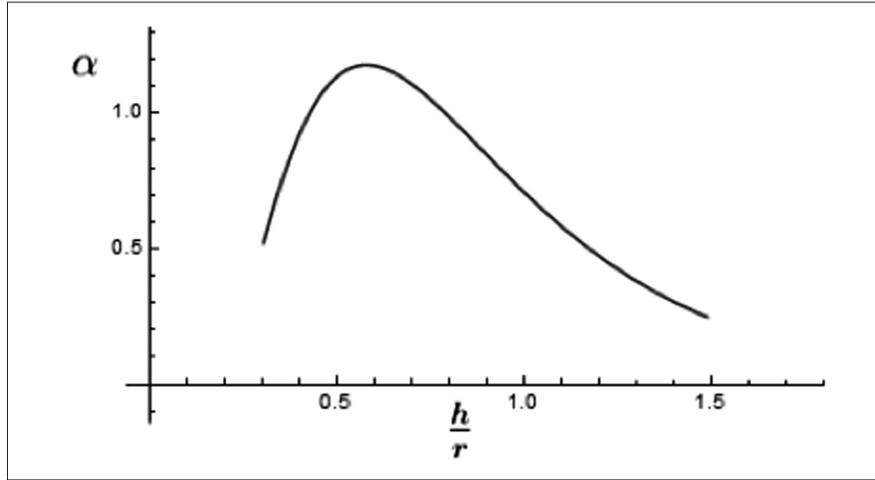


Рисунок 1. Зависимость коэффициента α от $\frac{h}{r}$.

3. Гамильтониан цилиндрической ловушки

Предположим, что магнитное поле в ловушке в главном является однородным и направлено вдоль оси z . В качестве возмущений будем рассматривать малое отклонение и линейную неоднородность магнитного поля. То есть, будем рассматривать поле \mathbf{B} вида

$$\frac{\mathbf{B}}{B_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \beta_2 - \beta_3 & 2\gamma_3 & 2\gamma_2 \\ 2\gamma_3 & \beta_3 - \beta_1 & 2\gamma_1 \\ 2\gamma_2 & 2\gamma_1 & \beta_1 - \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

С учетом возмущений, гамильтониан ловушки примет вид:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left(\hat{p}' - \frac{e}{c} (\hat{A}_0 + \varepsilon \hat{A}' + \varepsilon^2 \hat{A}'') \right)^2 + e\Phi,$$

где $\hat{p}' = \left(-ih \frac{\partial}{\partial x}, -ih \frac{\partial}{\partial y}, -ih \frac{\partial}{\partial z} \right)$, а ε определяется в (1).

$$A_0 = B_0 \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \frac{B_0}{2} \begin{pmatrix} B_2 z - B_3 y \\ B_3 x - B_1 z \\ B_1 y - B_2 x \end{pmatrix}, \quad A'' = B_0 \begin{pmatrix} \gamma_1(z^2 - y^2) - \beta_1 yz \\ \gamma_2(x^2 - z^2) - \beta_2 zx \\ \gamma_3(y^2 - x^2) - \beta_3 xy \end{pmatrix}.$$

Далее перейдем к безразмерным переменным

$$(q_1, q_2, q_3) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right)$$

и вынесем размерный множитель $e\Phi_0$, где $\Phi_0 = \frac{eB_0^2 r^2}{mc^2}$. В безразмерных координатах электрический потенциал примет вид $\Phi(q) = \frac{1}{2}\omega(2q_3^2 - q_1^2 - q_2^2) + O(q^4)$. Здесь и далее будем рассматривать гамильтониан без размерного множителя, то есть $\frac{\hat{H}}{e\Phi_0}$ а \hat{H} .

Представим гамильтониан в виде $\hat{H} = \hat{H}_0 + \varepsilon\hat{H}_1 + \varepsilon^2\hat{H}_2 + O(\varepsilon^3)$, где

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2 + 2(\hat{p}_1\hat{q}_2 - \hat{p}_2\hat{q}_1) + (1 - \omega^2)(q_1^2 + q_2^2) + 2\omega^2q_3),$$

$$\hat{H}_1 = -((\hat{p}_1 + \hat{q}_2)(B_2\hat{q}_3 - B_3\hat{q}_2) + (\hat{p}_2 - \hat{q}_1)(B_3\hat{q}_1 - B_1\hat{q}_3) + \hat{p}_3(B_1\hat{q}_2 - B_2\hat{q}_1)),$$

$$\hat{H}_2 = -((\hat{p}_1 + \hat{q}_2)(\gamma_1(\hat{q}_3^2 - \hat{q}_2^2) - \beta_1\hat{q}_2\hat{q}_3) + (\hat{p}_2 - \hat{q}_1)(\gamma_2(\hat{q}_1^2 - \hat{q}_3^2) - \beta_2\hat{q}_3\hat{q}_1) + \hat{p}_3(\gamma_3(\hat{q}_2^2 - \hat{q}_1^2) - \beta_3\hat{q}_1\hat{q}_2)) + \frac{1}{8}((B_2\hat{q}_3 - B_3\hat{q}_2)^2 + (B_3\hat{q}_1 - B_1\hat{q}_3)^2 + (B_1\hat{q}_2 - B_2\hat{q}_1)^2).$$

Здесь $\hat{p}_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_j}$, а \hbar определено в (1).

Для дальнейшего исследования приведем главную часть гамильтониана к нормальной форме с помощью канонической замены

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-\omega^2}} (x_+ + x_-), & p_1 = \frac{\sqrt[4]{1-\omega^2}}{\sqrt{2}} (p_+ + p_-), \\ q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-\omega^2}} (p_+ - p_-), & p_2 = -\frac{\sqrt[4]{1-\omega^2}}{\sqrt{2}} (x_+ - x_-), \\ q_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}\sqrt{\omega}} x_0; & p_3 = \sqrt[4]{2}\sqrt{\omega} p_0. \end{cases}$$

После такой замены гамильтониан \hat{H}_0 примет вид

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}(\omega_+(\hat{p}_+^2 + \hat{x}_+^2) + \omega_-(\hat{p}_-^2 + \hat{x}_-^2) + \omega_0(\hat{p}_0^2 + \hat{x}_0^2)),$$

где $\omega_{\pm} = \sqrt{1-\omega^2} \pm 1$, $\omega_0 = \sqrt{2}\omega$. Тогда при выборе

$$\omega^2 = 8/9 \tag{3}$$

наступает трехчастотный резонанс в отношении $2:-1:2$. Аналогичный гамильтониан был рассмотрен в [12].

4. Усредняющее преобразование

Перепишем поправки \hat{H}_1, \hat{H}_2 в новых координатах и с учетом резонансного условия:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= B_3 \left(2(\hat{p}_+^2 + \hat{x}_+^2) + (\hat{p}_-^2 + \hat{x}_-^2) - 3\hat{p}_+\hat{p}_- + 3\hat{x}_+\hat{x}_- \right) - \frac{B_1}{\sqrt{2}} (2\hat{p}_0(\hat{p}_+ + \hat{p}_-) + \hat{x}_0(2\hat{x}_+ + \hat{x}_-)) + \\ &+ \frac{B_2}{\sqrt{2}} (2\hat{p}_0(\hat{x}_+ + \hat{x}_-) + \hat{x}_0(\hat{p}_- - 2\hat{p}_+)); \\ \hat{H}_2 &= \frac{3}{16} \left((B_1(\hat{p}_+ - \hat{p}_-) - B_2(\hat{x}_+ + \hat{x}_-))^2 + \left(B_3(\hat{x}_+ + \hat{x}_-) - \frac{B_1}{\sqrt{2}}\hat{x}_0 \right)^2 + \left(B_3(\hat{p}_+ - \hat{p}_-) - \frac{B_2}{\sqrt{2}}\hat{x}_0 \right)^2 \right) + \\ &+ \sqrt{3}\hat{p}_0 \left(\beta_3(\hat{p}_+ - \hat{p}_-)(\hat{x}_+ + \hat{x}_-) + \gamma_3 \left((\hat{p}_+ - \hat{p}_-)^2 - (\hat{x}_+ + \hat{x}_-)^2 \right) \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} (2\hat{p}_+ - \hat{p}_-) \left(\sqrt{2}\beta_1\hat{x}_0(\hat{p}_+ - \hat{p}_-) + \gamma_1 (\hat{x}_0^2 - 2(\hat{p}_+ - \hat{p}_-)^2) \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} (2\hat{x}_+ + \hat{x}_-) \left(\sqrt{2}\beta_2\hat{x}_0(\hat{x}_+ + \hat{x}_-) + \gamma_2 (2(\hat{x}_+ + \hat{x}_-)^2 - \hat{x}_0^2) \right). \end{aligned}$$

Воспользуемся методом алгебраического усреднения [19,20], чтобы привести поправки \hat{H}_1, \hat{H}_2 к коммутирующему с \hat{H}_0 виду. Найдется такое унитарное преобразование U , что $U^{-1}\hat{H}U = \hat{H}_0 + \varepsilon\hat{H}_1 + \varepsilon^2\hat{H}_2 + O(\varepsilon^3)$, где $[\hat{H}_0, \hat{H}_1] = [\hat{H}_0, \hat{H}_2] = 0$. Точные формулы для подсчета U, \hat{H}_1, \hat{H}_2 можно найти в [12,20].

Явный вид усредненных поправок:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= \left(B_3 \left(2\hat{z}_+\hat{z}_+^* + \hat{z}_-\hat{z}_-^* + \frac{3h}{2} \right) - \frac{B_1 - iB_2}{\sqrt{2}} \hat{z}_+\hat{z}_0^* - \frac{B_1 + iB_2}{\sqrt{2}} \hat{z}_+\hat{z}_0^* \right) \\ \hat{H}_2 &= \frac{3}{16} (B_1^2 + B_2^2 - 16B_3) \hat{z}_+\hat{z}_+^* - \frac{1}{4} (B_1^2 + B_2^2 + 12B_3) \hat{z}_-\hat{z}_-^* - \frac{5}{16} (B_1^2 + B_2^2) \hat{z}_0\hat{z}_0^* + \\ &\frac{3}{2} B_3 \left(\frac{B_1 - iB_2}{\sqrt{2}} \hat{z}_+\hat{z}_0^* + \frac{B_1 + iB_2}{\sqrt{2}} \hat{z}_+\hat{z}_0^* \right) - 2\sqrt{6} \left((\gamma_2 - i\gamma_1) \hat{z}_+^*(\hat{z}_-^*)^2 + (\gamma_2 + i\gamma_1) \hat{z}_+(\hat{z}_-)^2 \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2} \left((2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 - 4i\gamma_3) (\hat{z}_-)^2 \hat{z}_0 + (2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 + 4i\gamma_3) (\hat{z}_-^*)^2 \hat{z}_0^* \right) - \frac{3h}{16} (B_1^2 + B_2^2 + 16B_3), \end{aligned}$$

где введены обозначения $\hat{z}_j = \frac{\hat{x}_j + i\hat{p}_j}{\sqrt{2}}$, $j = +, -, 0$.

5. Алгебра симметрий главной части гамильтониана

Найдем операторы, составляющие алгебру симметрий \hat{H}_0 . С помощью введенных обозначений \hat{z}_i можно представить гамильтониан в виде:

$$\hat{H}_0 \sim \text{const} \sum_{l=\pm,0} \omega_l \hat{z}_l^* \hat{z}_l.$$

Из такой записи становится очевидно, что операторы вида $\hat{z}_l^* \hat{z}_l$, $l = \pm, 0$ коммутируют с \hat{H}_0 .

Будем искать другие симметрии в виде $\hat{z}_j^\alpha \hat{z}_k^\beta$, где $\alpha, \beta \in \Gamma$ и $j \neq k$, и отрицательный показатель степени $a < 0$ означает взятие сопряжения \hat{z}_j^a а $(\hat{z}_j^*)^{-a}$.

Рассмотрим коммутатор $[\sum \omega_l \hat{z}_l^* \hat{z}_l, \hat{z}_j^\alpha \hat{z}_k^\beta]$, который распадается на сумму трех коммутаторов, из которых два ненулевых. Посчитаем их значения, пользуясь свойствами коммутатора:

$$[\hat{z}_j^* \hat{z}_j, \hat{z}_j^\alpha \hat{z}_k^\beta] = -\hbar \alpha \hat{z}_j^\alpha \hat{z}_k^\beta; [\hat{z}_k^* \hat{z}_k, \hat{z}_j^\alpha \hat{z}_k^\beta] = -\hbar \beta \hat{z}_j^\alpha \hat{z}_k^\beta.$$

Откуда получаем, что коммутатор $[\hat{H}_0, \hat{z}_j^\alpha \hat{z}_k^\beta]$ с точностью до постоянного множителя это

$$[\hat{H}_0, \hat{z}_j^\alpha \hat{z}_k^\beta] \sim -\hbar (\alpha \omega_j + \beta \omega_k) \hat{z}_j^\alpha \hat{z}_k^\beta.$$

Отсюда получаем условие на α, β : $\alpha \omega_j + \beta \omega_k = 0$, пользуясь которым, находим еще 6 симметрий: $\hat{z}_+^* \hat{z}_0, \hat{z}_+ \hat{z}_0^*, \hat{z}_+ (\hat{z}_-^*)^2, \hat{z}_+^* (\hat{z}_-^*)^2, (\hat{z}_-^*)^2 \hat{z}_0, (\hat{z}_-^*)^2 \hat{z}_0^*$.

Найденные 9 операторов можно выбрать в качестве образующих алгебры симметрий² \hat{H}_0 (обозначения выбраны, как в [12]):

$$\begin{aligned} \hat{S}_+ &= \hat{z}_+^* \hat{z}_+, \hat{S}_- = \hat{z}_-^* \hat{z}_-, \hat{S}_0 = \hat{z}_0^* \hat{z}_0, \\ \hat{A}_\rho &= \hat{z}_+^* \hat{z}_0, \hat{A}_\sigma = \hat{z}_+^* (\hat{z}_-^*)^2, \hat{A}_\theta = (\hat{z}_-^*)^2 \hat{z}_0^*, \\ \hat{A}_\rho^* &= \hat{z}_+ \hat{z}_0^*, \hat{A}_\sigma^* = \hat{z}_+ (\hat{z}_-^*)^2, \hat{A}_\theta^* = (\hat{z}_-^*)^2 \hat{z}_0, \end{aligned} \quad (4)$$

между которыми имеются коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [\hat{S}_+, \hat{A}_\rho] &= \hbar \hat{A}_\rho, [\hat{S}_+, \hat{A}_\sigma] = \hbar \hat{A}_\sigma, [\hat{S}_-, \hat{A}_\theta] = 2\hbar \hat{A}_\theta, [\hat{S}_-, \hat{A}_\sigma] = 2\hbar \hat{A}_\sigma, \\ [\hat{S}_0, \hat{A}_\rho] &= -\hbar \hat{A}_\rho, [\hat{S}_0, \hat{A}_\theta] = \hbar \hat{A}_\theta, [\hat{A}_\rho, \hat{A}_\theta] = \hbar \hat{A}_\sigma, [\hat{A}_\sigma^*, \hat{A}_\rho] = \hbar \hat{A}_\theta^*, \\ [\hat{A}_\theta^*, \hat{A}_\sigma] &= 4\hbar \left(\hat{S}_- + \frac{\hbar}{2} \right) \hat{A}_\rho, [\hat{A}_\rho^*, \hat{A}_\rho] = \hbar (\hat{S}_0 - \hat{S}_+), \\ [\hat{A}_\theta^*, \hat{A}_\theta] &= \hbar (\hat{S}_-^2 + 4\hat{S}_- \hat{S}_0 + 3\hbar \hat{S}_- + 2\hbar \hat{S}_0 + 2\hbar^2), \\ [\hat{A}_\sigma^*, \hat{A}_\sigma] &= \hbar (4\hat{S}_+ \hat{S}_- + \hat{S}_+^2 + 2\hbar \hat{S}_+ + 3\hbar \hat{S}_- + 2\hbar^2). \end{aligned}$$

Таким образом, мы можем выразить усредненные поправки через образующие алгебры симметрий \hat{H}_0 :

¹ Так как гамильтониан \hat{H}_0 действует в трехмерном пространстве, то максимальное число независимых симметрий – 5, а значит в этом представлении полученные 9 симметрий не являются независимыми.

$$\begin{aligned}
\hat{H}_1 &= \left(B_3 \left(2\hat{S}_+ + \hat{S}_- + \frac{3h}{2} \right) - \frac{B_1 - iB_2}{\sqrt{2}} \hat{A}_\rho^* - \frac{B_1 + iB_2}{\sqrt{2}} \hat{A}_\rho \right), \\
\hat{H}_2 &= \frac{3}{16} (B_1^2 + B_2^2 - 16B_3^2) \hat{S}_+ - \frac{1}{4} (B_1^2 + B_2^2 + 12B_3^2) \hat{S}_- - \frac{5}{16} (B_1^2 + B_2^2) \hat{S}_0 + \\
&+ \frac{3}{2} B_3 \left(\frac{B_1 - iB_2}{\sqrt{2}} \hat{A}_\rho^* + \frac{B_1 + iB_2}{\sqrt{2}} \hat{A}_\rho \right) + 2\sqrt{6} \left((\gamma_2 - i\gamma_1) \hat{A}_\sigma + (\gamma_2 + i\gamma_1) \hat{A}_\sigma^* \right) + \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{2} \left((2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 - 4i\gamma_3) \hat{A}_\theta^* + (2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 + 4i\gamma_3) \hat{A}_\theta \right) - \\
&- \frac{3h}{16} (B_1^2 + B_2^2 + 16B_3^2).
\end{aligned}$$

6. Вторичное усреднение

Так как усредненные поправки \hat{H}_1, \hat{H}_2 коммутируют с главной частью, то становится возможным перейти на собственное подпространство \hat{H}_0 и рассматривать на нем гамильтониан $\hat{H}_1 + \varepsilon \hat{H}_2$ [13]. Для дальнейшего исследования необходимо привести поправку \hat{H}_2 к коммутирующему с \hat{H}_1 виду.

Алгебра симметрий \hat{H}_1 нетривиальна при некоторых условиях на компоненты B_1, B_2, B_3 возмущающего поля (см. [12]). Рассмотрим простейший случай, когда:

$$B_1^2 + B_2^2 = 16B_3^2. \quad (5)$$

Тогда образующие имеют вид [12]:

$$\begin{aligned}
\hat{A}_0 &= \hat{S}_-, \\
\hat{A}_+ &= \frac{4}{3} \hat{S}_+ + \frac{2}{3} \hat{S}_0 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(e^{i\varphi} \hat{A}_\rho + e^{-i\varphi} \hat{A}_\rho^* \right), \\
\hat{A}_- &= \frac{2}{3} \hat{S}_+ + \frac{4}{3} \hat{S}_0 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \left(e^{i\varphi} \hat{A}_\rho + e^{-i\varphi} \hat{A}_\rho^* \right), \\
\hat{B} &= \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\frac{\varphi}{2}} \hat{A}_\sigma + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \hat{A}_\theta,
\end{aligned} \quad (6)$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}
[A_0, B] &= 2hB, [A_-, B] = 2hB, [A_+, B] = 0, \\
[B^*, B] &= 2h(A_0^2 + 2A_0A_- + 3hA_0 + hA_- + 2h^2),
\end{aligned} \quad (7)$$

где φ определяется соотношением $e^{i\varphi} = \frac{B_1 + iB_2}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}$.

Коммутационные соотношения (7) задают следующие элементы Казимира:

$$M = A_+ - A_- + A_0, C = A_+ + A_- - A_0, K = BB^* - A_0(A_0 - \hbar)A_-.$$

Через операторы (6) можно выразить \hat{H}_1 следующим образом:

$$\hat{H}_1 = B_3 \left(2\hat{A}_+ - \hat{A}_- + \hat{A}_0 + \frac{3\hbar}{2} \right)$$

или

$$\hat{H}_1 = B_3 \left(\hat{A}_+ + \hat{M} + \frac{3\hbar}{2} \right)$$

Будем усреднять \hat{H}_2 по схеме, описанной в [13], а именно, воспользуемся тем, что образующие (7) алгебры симметрий \hat{H}_0 можно выразить через операторы $\hat{A}_+, \hat{A}_-, \hat{A}_0, \hat{B}, \hat{B}_+, \hat{F}$, где

$$\begin{aligned} \hat{B}_+ &= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\varphi}{2}} \hat{A}_\sigma - \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \hat{A}_\theta, \\ \hat{F} &= \frac{2}{3} \left(\sqrt{2} (\hat{S}_+ - \hat{S}_-) + 2e^{i\varphi} \hat{A}_\rho - e^{-i\varphi} \hat{A}_\rho^* \right), \end{aligned}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{S}_- &= \hat{A}_0, \hat{S}_+ + \hat{S}_0 = \frac{1}{2} (\hat{A}_+ + \hat{A}_-), \\ \hat{S}_+ - \hat{S}_0 &= \frac{1}{6} (\hat{A}_+ - \hat{A}_- + 2\sqrt{2} (\hat{F} + \hat{F}^*)), \\ e^{i\varphi} \hat{A}_\rho + e^{-i\varphi} \hat{A}_\rho^* &= \frac{1}{6} (\hat{F} + \hat{F}^* - 2\sqrt{2} (\hat{A}_+ - \hat{A}_-)), \\ e^{i\varphi} \hat{A}_\rho - e^{-i\varphi} \hat{A}_\rho^* &= \frac{1}{2} (\hat{F} - \hat{F}^*), \\ \hat{A}_\sigma &= \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-i\frac{\varphi}{2}} (\sqrt{2}\hat{B}_+ + \hat{B}), \hat{A}_\theta = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i\frac{\varphi}{2}} (\sqrt{2}\hat{B} - \hat{B}_+). \end{aligned}$$

Значит, \hat{H}_2 можно представить в виде линейной комбинации операторов $\hat{A}_+, \hat{A}_-, \hat{A}_0, \hat{B}, \hat{B}^*, \hat{B}_+, \hat{B}_+^*, \hat{F}, \hat{F}^*$:

$$\begin{aligned}
\hat{H}_2 = & -B_3^2 \left(\frac{5}{6} \hat{A}_+ + \frac{5}{3} \hat{A}_- + 7\hat{A}_0 + 6h \right) + \frac{13\sqrt{2}}{6} B_3^2 (\hat{F} + \hat{F}^*) + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 + 4i\gamma_3) e^{i\frac{\varphi}{2}} + 8(\gamma_2 - i\gamma_1) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right) \hat{B}_+ + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left((2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 - 4i\gamma_3) e^{-i\frac{\varphi}{2}} + 8(\gamma_2 + i\gamma_1) e^{i\frac{\varphi}{2}} \right) \hat{B}_+^* + \\
& + 2 \left((2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 + 4i\gamma_3) e^{i\frac{\varphi}{2}} + 4(\gamma_2 - i\gamma_1) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right) \hat{B} + \\
& + 2 \left((2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 - 4i\gamma_3) e^{-i\frac{\varphi}{2}} + 4(\gamma_2 + i\gamma_1) e^{i\frac{\varphi}{2}} \right) \hat{B}^*.
\end{aligned}$$

С помощью следующих коммутационных соотношений:

$$[\hat{H}_1, \hat{F}] = h \left(\frac{10\sqrt{2}}{9} (\hat{A}_+ - \hat{A}_-) + \frac{20}{3} \hat{F} \right), [\hat{H}_1, \hat{B}_+] = \frac{2h}{9} (13\hat{B}_+ + 4\sqrt{2}\hat{B}),$$

можно найти коммутатор \hat{H}_2 с группой оператора \hat{H}_1 , и далее посчитать усредненный оператор $\underline{\hat{H}}_2$:

$$\underline{\hat{H}}_2 = -B_3^2 \left(\frac{5}{6} \hat{A}_+ + \frac{5}{3} \hat{A}_- + 7\hat{A}_0 + 6h \right) + g\hat{B} + \bar{g}\hat{B}^*, \quad (8)$$

$$\text{где } g = 2 \left((2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 + 4i\gamma_3) e^{i\frac{\varphi}{2}} + 4(\gamma_2 - i\gamma_1) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right).$$

Теперь, когда поправки $\hat{H}_1, \underline{\hat{H}}_2$ коммутируют и с главной частью, и друг с другом, становится возможным найти асимптотику спектра гамильтониана ловушки.

Лемма 2. В условиях трехчастотного резонанса (3) и вторичного резонанса (5) спектр гамильтониана цилиндрической ловушки Пеннинга может быть с точностью до ε^3 представлен в виде:

$$\frac{2}{3} \left(n + \frac{3}{2} \right) h + \varepsilon \left(6m - n + \frac{3}{2} \right) B_3 h + \varepsilon^2 \lambda_{n,m,k} + O(\varepsilon^3),$$

где $\lambda_{n,m,k}$ – собственные значения $\underline{\hat{H}}_2$.

Рассмотрим операторы:

$$\begin{aligned}
\hat{b}_0 &= \hat{z}_-, \\
\hat{b}_+ &= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\varphi}{2} \hat{z}_+^*} - \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-i\frac{\varphi}{2} \hat{z}_0^*}, \\
\hat{b}_- &= \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\frac{\varphi}{2} \hat{z}_+^*} + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-i\frac{\varphi}{2} \hat{z}_0^*},
\end{aligned} \tag{9}$$

между которыми имеются следующие коммутационные соотношения:

$$[\hat{b}_0^*, \hat{b}_0] = \hbar, [\hat{b}_\pm^*, \hat{b}_\pm] = 2\hbar.$$

Обозначим $\psi_0 = C_0 e^{(x_+^2 + x_-^2 + x_0^2)/2\hbar}$.

Несложно заметить, что функции вида

$$\psi_{t_0, t_+, t_-} = C \hat{b}_0^{t_0} \hat{b}_-^{t_+} \hat{b}_+^{t_-} \psi_0, \tag{10}$$

где C, C_0 – некоторые нормировочные константы, а $t_0, t_\pm \in \Gamma_+$, будут являться собственными для операторов $\hat{b}_0 \hat{b}_0^*, \hat{b}_+ \hat{b}_+^*, \hat{b}_- \hat{b}_-^*$ с собственными значениями $\hbar t_0, 2\hbar t_+, 2\hbar t_-$ соответственно.

Заметим, что

$$\hat{S}_- = \hat{b}_0 \hat{b}_0^*, \quad 2(\hat{S}_+ + \hat{S}_0) = \hat{b}_+ \hat{b}_+^* + \hat{b}_- \hat{b}_-^*.$$

Следовательно, через операторы (9) может быть выражен гамильтониан \hat{H}_0 . А значит, функции (10) также будут являться собственными для \hat{H}_0 :

$$\hat{H}_0 \psi_{t_0, t_+, t_-} = \frac{2}{3} \left(2t_+ + 2t_- - t_0 + \frac{3}{2} \right) \hbar \psi_{t_0, t_+, t_-}.$$

Положим $2t_+ + 2t_- - t_0 = n$, $n \in \Gamma$. Как можно заметить, n -й энергетический уровень бесконечно вырожден.

Заметим также, что операторы (6) выражаются через (10) следующим образом:

$$\hat{A}_0 = \hat{b}_0 \hat{b}_0^*, \hat{A}_\pm = \hat{b}_\pm \hat{b}_\pm^*, \hat{B} = \left(\hat{b}_0 \right)^2 \hat{b}_-, \tag{11}$$

а значит и \hat{H}_1 выражается через операторы (6).

Тогда функция ψ_{t_0, t_+, t_-} является собственной для оператора \hat{H}_1 с собственным значением $\left(4t_+ - 2t_- + t_0 + \frac{3}{2} \right) \hbar$ или, обозначив $t_+ = m$, $\left(6m - n + \frac{3}{2} \right) \hbar$, где $m \in \Gamma_+$.

7. Неприводимые представления

Построим неприводимые представления алгебры (7) в пространстве антиголоморфных функций. Будем называть операторы A_0, A_{\pm} нейтральными, а B^* – оператором уничтожения, так как он зануляет вакуумную функцию ψ_0 .

В силу (11), ψ_0 будет собственной для нейтральных операторов в представлении (6), то есть $\hat{A}_0\psi_0 = a_0\psi_0, \hat{A}_{\pm} = a_{\pm}\psi_0$, где $a_0 = \hbar(2m + 2t_- - n), a_+ = 2\hbar m, a_- = 2\hbar t_-$.

Далее воспользуемся тем, что элемент Казимира K алгебры (7) зануляется на нашем представлении (6). Подействуем им на вакуумный вектор, чтобы получить дополнительные условия на t_- :

$$\left(\hat{B}\hat{B}^* - \hat{A}_0(\hat{A}_0 - \hbar)\hat{A}_- \right)\psi_0 = 0,$$

а значит, $(2m + 2t_- - n)(2m + 2t_- - n - 1)t_- = 0$. Так как $t_- \in \Gamma_+$, то первые две скобки в последнем выражении зануляются только при $n > 2m$. Тогда получаем следующее условие на t_- :

$$t_- = \begin{cases} 0, & n \leq 2m, \\ \frac{n}{2} - m, & n > 2m, \text{ } n \text{ – четное,} \\ \frac{n+1}{2} - m, & n > 2m, \text{ } n \text{ – нечетное.} \end{cases}$$

Или

$$t_- = \begin{cases} 0, & n \leq 2m, \\ \left[\frac{n+1}{2} \right] - m, & n > 2m, \end{cases}$$

где квадратные скобки означают целую часть числа.

Тогда имеем в случае $n \leq 2m$:

$$a_+ = 2\hbar m, a_- = 0, a_0 = \hbar(2m - n),$$

а в случае $n > 2m$:

$$a_+ = 2\hbar m, a_- = 2\hbar \left(\left[\frac{n+1}{2} \right] - m \right), a_0 = \hbar \left(\frac{1 - (-1)^n}{2} \right).$$

Построим неприводимое представление по общей схеме, описанной в [17]. Перепишем коммутационные соотношения (7) в виде:

$$[B^*, B] = f(A), B^* A = \varphi(A)B^*, AB = B\varphi(A),$$

где $A = (A_0, A_+, A_-)$, φ – векторнозначная функция векторного аргумента, f – скалярная функция.

Определим на Γ_+ следующие функции:

$$A_a(k) = \varphi(\dots(\varphi(a))\dots), \quad F_a(k) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k f(A_a(j)),$$

где $a = (a_0, a_+, a_-)$.

В нашем случае, получим функции:

$$A_a(k) = \begin{pmatrix} A_0(k) \\ A_+(k) \\ A_-(k) \end{pmatrix},$$

где $A_0 = a_0 + 2kh$, $A_+(k) = a_+$, $A_-(k) = a_- + 2kh$.

$$F_a(k) = 8h^3 \left(k^2 + \left(\frac{a_0}{h} + \frac{a_-}{2h} + \frac{3}{2} \right) k + \frac{3a_0}{4h} + \frac{a_-}{4h} + \frac{a_0 a_-}{2h^2} + \frac{a_0^2}{4h^2} + \frac{1}{2} \right).$$

Последняя может быть представлена в виде $F_a(k) = V(k)C(k)$ следующим образом:

при $n \leq 2m$:

$$V(k) = 2h \left(k + m - \frac{n}{2} - 1 \right), \quad C(k) = 4h^2 \left(k + m - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right),$$

при $n > 2m$:

$$V(k) = 2h \left(k + -\frac{(-1)^n}{2} + 1 \right), \quad C(k) = 4h^2 \left(k - m + \left[\frac{n+1}{2} \right] + 1 \right).$$

Теперь определим гильбертово пространство P_s антиголоморфных функций. Введем числа s_j :

$$s_j = \frac{j! F_a(j-1) \cdot \dots \cdot F_a(0)}{|B_a(j-1)|^2 \cdot \dots \cdot |B_a(0)|^2} = \begin{cases} (2h)^j j! \frac{\left(k + m - \frac{n}{2} - 1 \right)_j}{\left(k + m - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right)_j}, & n \leq 2m, \\ (2h)^j j! \frac{\left(k + -\frac{(-1)^n}{2} + 1 \right)_j}{\left(k - m + \left[\frac{n+1}{2} \right] + 1 \right)_j}, & n > 2m, \end{cases}$$

где $(\cdot)_j$ – символ Похгаммера.

Тогда $g(\bar{z}) = \sum_l g_l \bar{z}^l$ принадлежит P_s , если $\sum_l s_l |g_l|^2 < \infty$. Скалярное произведение в P_s задается как $(g', g) = \sum_l s_l g'_l \bar{g}_l$.

Лемма 3. Операторы

$$\overset{\circ}{B} = \bar{z} B \left(\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right),$$

$$\overset{\circ}{C} = C \left(\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right) \frac{d}{d\bar{z}},$$

$$\overset{\circ}{A}_j = A_j \left(\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right), \quad (j = 0, +, -).$$

задают неприводимое эрмитово представление алгебры (7) в гильбертовом пространстве антиголоморфных функций P_s с вакуумным вектором 1, то есть, $C1 = 0$ [17].

Таким образом, $\overset{\circ}{B}, \overset{\circ}{C}, \overset{\circ}{A}_0, \overset{\circ}{A}_\pm$ – дифференциальные операторы порядка не выше 2.

при $n \leq 2m$:

$$\overset{\circ}{B} = 2h\bar{z} \left(\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} + m - \frac{n}{2} - 1 \right), \quad \overset{\circ}{C} = 4h^2 \left(\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} + m - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{d}{d\bar{z}},$$

$$\overset{\circ}{A}_0 = h \left(2m - n + 2\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right), \quad \overset{\circ}{A}_+ = 2hm, \quad \overset{\circ}{A}_- = 2h\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}},$$

при $n > 2m$:

$$\overset{\circ}{B} = 2h\bar{z} \left(\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} + -\frac{(-1)^n}{2} + 1 \right), \quad \overset{\circ}{C} = 4h^2 \left(\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} - m + \left[\frac{n+1}{2} \right] + 1 \right) \frac{d}{d\bar{z}},$$

$$\overset{\circ}{A}_0 = h \left(\frac{1 - (-1)^n}{2} + 2\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right), \quad \overset{\circ}{A}_+ = 2hm, \quad \overset{\circ}{A}_- = 2h \left(\left(\frac{n+1}{2} \right) - m + \bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right).$$

8. Семейство когерентных состояний

Зададим семейство когерентных состояний следующим образом:

$$p(z) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j! \left(m - \frac{n}{2} - 1 \right)_j} \left(\frac{z\hat{B}}{2h} \right)^j p(0), \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j! \left(1 - \frac{(-1)^n}{2} \right)_j} \left(\frac{z\hat{B}}{2h} \right)^j p(0), \end{cases}$$

здесь $p(0) = \psi_0$.

Когерентные состояния позволяют связать разные представления алгебры [17]:

$$\hat{A}_j p(z) = A_j p(z), \hat{B} p(z) = C p(z), \hat{B}^* p(z) = B p(z).$$

Скалярное произведение двух когерентных состояний есть воспроизводящее ядро [17]:

$$(p(z), p(w))_{P_s} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z\bar{w})^j}{s_j} = K(z, \bar{w}).$$

Определим аналог оператора \hat{H}_2 в пространстве P_s :

$$\underline{\underline{H}}_2 = -B_3^2 \left(\frac{5}{6} A_+ + \frac{5}{3} A_- + 7 A_0 + 6h \right) + g B + \bar{g} C. \quad (12)$$

Как видно, $\underline{\underline{H}}_2$ – обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка.

Лемма 4. Собственные функции гамильтониана ловушки в условиях резонансов (3), (5) с точностью до постоянного множителя приближаются:

$$\psi_{n,m,k} \sim \left(g(\bar{z}), \hat{U} \hat{U}_1 p(\bar{z}) \right)_{P_s},$$

где $g(\bar{z})$ – собственные функции дифференциального оператора второго порядка (12), \hat{U}, \hat{U}_1 – усредняющие преобразования.

Соответствующие им собственные значения:

$$\frac{2}{3} \left(n + \frac{3}{2} \right) h + \varepsilon \left(6m - n + \frac{3}{2} \right) B_3 h + \varepsilon^2 \lambda_{n,m,k} + O(\varepsilon^3),$$

где $\lambda_{n,m,k}$ – собственные значения оператора (12).

Благодарности

Данная работа выполнена в лаборатории «Математические методы естествознания» ЦФИ НИУ ВШЭ при поддержке Научного фонда Национального исследовательского университета Высшая школа экономики.

Список литературы:

1. *M. Vogel* Particle Confinement in Penning Traps. An Introduction // Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics, 2018.
2. *F. Kohler et al.* Isotope dependence of the Zeeman effect in lithium-like calcium // Nature Communications volume 7 (10246), 2016.
3. *Z. Harman et al.* The g factor of highly charged ions // J. Phys.: Conf. Ser. 1138, 2018.
4. *A. Mooser, S. Ulmer, K. Blaum, K. Franke, H. Kracke, C. Leiteritz, W. Quint, C. Rodegheri, C. Smorra, J. Walz* Direct high-precision measurement of the magnetic moment of the proton // Nature, 509, 2014.
5. *S. Sturm, F. Köhler, J. Zatorski, A. Wagner, Z. Harman, G. Werth, W. Quint, C. Keitel, K. Blaum* High-precision measurement of the atomic mass of the electron // Nature, 506, 2014.
6. *S. Ulmer, C. Smorra, A. Mooser, K. Franke, H. Nagahama, T. Higuchi, S. Van Gorp, K. Blaum, Y. Matsuda, W. Quint, J. Walz, G. Schneider* High-Precision Comparison of the Antiproton-to-Proton Charge-To-Mass Ratio // Nature, 2015, p.196-199.
7. *C. Smorra, S. Sellner, M. Borchert, J.A. Harrington, T.Higuchi, H. Nagahama, T. Tanaka, A. Mooser, G. Schneider, M. Bohman, K. Blaum, Y. Matsuda, C. Ospelkaus, W. Quint, J. Walz, Y. Yamazaki, S. Ulmer* A parts-per-billion measurement of the antiproton magnetic moment // Nature, 550, 2017, p.371-374.
8. *M. Kretzschmar* Single Particle Motion in a Penning Trap: Description in the Classical Canonical Formalism // Phys. Scripta, 46, 1992, p.544–554.
9. *J. Goldman, G. Gabrielse* Optimized planar Penning traps for quantum information studies // Hyperfine Interact., 199, 2011, p.279-289.
10. *G. Gabrielse, F. C. Mackintosh* Cylindrical Penning Traps With Orthogonalized Anharmonicity Compensation // Internat. J. Mass Spectrom. Ion Processes, 57 (1), 1984.
11. *Kumar S. , Quint W., Ringleb S., Safvan C., Stallkamp N., Stöhlker T., Vogel M.* Properties of a cylindrical Penning trap with conical endcap openings. // Physica Scripta., 94 (7), 2019.
12. *Karasev M.V., Novikova E. M.* Secondary Resonances in Penning Traps. Non-Lie Symmetry Algebras and Quantum States. // RJMP, 20 (3), 2013, p.283-294.
13. *Karasev M.V., Novikova E.M.* Eigenstates of Quantum Penning–Ioffe Nanotrap at Resonance. // Theoret. and Math. Phys., 179 (3), 2014, p.729–746.
14. *Karasev M.V., Novikova E.M., and Vybornyi E.V.* Instantons via Breaking Geometric Symmetry in Hyperbolic Traps. // Mathematical Notes, 102 (6), 2017.
15. *Karasev M.V., Novikova E.M., and Vybornyi E.V.* Non-Lie Top Tunneling and Quantum Bilocalization in Planar Penning Trap. // Mathematical Notes, 100 (6), 2016.
16. *Blagodyreva O., Karasev M.V., Novikova E.M.* Cubic Algebra and Averaged Hamiltonian for the Resonance $3 : (-1)$ Penning-Ioffe Traps // RJMP, 19 (4), 2012, p. 441–450.
17. *Karasev M.V., Novikova E.M.* Non-Lie Permutation Relations, Coherent States, and Quantum Embedding, Coherent Transform, Quantization, and Poisson Geometry, Ed. by M. V. Karasev // AMS, Providence, RI, 187, 1998, p. 1–202.
18. *Karasev M.V., Новикова Е.М.* Устойчивые двумерные торы в ловушке Пеннинга при комбинированном частотном резонансе // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 13 (2), 2015, p.55-92.
19. *Karasev M.V. and Maslov V.P.* Asymptotic and Geometric Quantization // Uspekhi Mat. Nauk, 39 (6), 1984, p.115–173.
20. *Karasev M.V.* Noncommutative Algebras, Nano-Structures, and Quantum Dynamics Generated by Resonances // Part I: AMS Translations, Ser. 2, AMS, Providence, RI, 216, 2005, p.1-18.
Part II: Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 11, 2005.
Part III: RJMP, 13 (2), 2006, p.131-150.

CYLINDRICAL PENNING TRAP RESONANCE STATES

Safyanov G.A.

gasafyanov@yandex.ru

National Research University Higher School of Economics

Received 05.08.2019

We considered a cylindrical Penning trap under resonance. In case of secondary resonance we constructed the irreducible representation of the secondary symmetry algebra. We found asymptotics of the Hamiltonian spectrum and built an approximation for eigenfunctions.