Математическая модель ценообразования для европейского опциона на неполном рынке без транзакционных издержек (дискретное время). Часть II.

Зверев О. В.*, Хаметов В. М.**, Шелемех Е. А.***
(*zv-oleg@yandex.ru; **khametovvm@mail.ru; ***letis@mail.ru)

Аннотация

Это вторая часть статьи. Здесь модель общего характера, построенная в первой части, использована для построения моделей ценообразования в частных случаях одномерного неполного конечного рынка и рынка с компактным носителем.

Ключевые слова: европейский опцион, хеджирование, минимаксный портфель, неполный рынок, конечный рынок, компактный рынок.

Введение

Это вторая часть статьи. Здесь модель общего характера, построенная в первой части, использована для построения моделей ценообразования в частных случаях европейского опциона, обращающегося на одномерном неполном конечном рынке и на $(1, S)$-рынке с компактным носителем (в обоих случаях — с дискретным временем и без транзакционных издержек). Результаты приведены в параграфах 5 и 6. Так, в параграфе 5 построены суперхеджирующий и минимаксный портфели для европейского опциона, обращающегося на неполном конечном $(1, S)$-рынке, заданном соотношением (1). Рекуррентное соотношение (5) из теоремы 1 первой части статьи (т.е. [3]) позволило установить, что верхнее гарантированное значение в этом случае является марковской случайной функцией (теорема 16), и найти явные формулы для переходных вероятностей за один шаг случайной последовательности (1) относительно "наихудшей" меры Q^*. В параграфе 6 приведен пример расчета европейского опциона на неполном одномерном компактном $(1, S)$-рынке.

§5. Минимаксный хеджирующий портфель на конечном неполном $(1, S)$-рынке

Цель этого параграфа заключается в построении минимаксного хеджирующего портфеля европейского опциона на конечном $(1,S)$-рынке, т.е. в этом параграфе предполагается, что относительно базовой меры P динамика доходности рисковых активов описывается последовательность независимых в совокупности и одинаково распределенных случайных величин, принимающих конечное число значений.

5.1. В этом разделе дано описание конечного $(1,S)$-рынка.

Пусть задан стохастический базис $\left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in N_0},\mathsf{P}\right)$. Будем предполагать, что $\left\{S_t,\mathcal{F}_t^S\right\}_{t\in N_0}$ есть одномерная последовательность случайных величин, заданных на $\left(\Omega,\mathcal{F},(\mathcal{F}_t)_{t\in N_0},\mathsf{P}\right)$, таких, что для любого $t\in N_0$ последовательность допускает представление

$$S_t = S_{t-1}\left(1+\rho_t\right), \quad S_t|_{t=0} = S_0 > 0, \tag{1}$$

где S_0 не случайно, а $\{\rho_t\}_{t\in N_1}$ — последовательность случайных величин. В теории финансов ρ_t интерпретируется как доходность рискового актива в момент времени $t\in N_1$. Пусть $0<S_0\le c_5$. Будем также предполагать, что последовательность $\{\rho_t\}_{t\in N_1}$ удовлетворяет следующим условиям.

<u>*Conditions*</u> (ρ):

1) $\{\rho_t\}_{t\in N_1}$ — это последовательность независимых в совокупности и одинаково распределенных случайных величин;

2) при любом $t\in N_1$ случайная величина ρ_t принимает значение в $\Gamma\triangleq\{a_1,\dots,a_l\}$ с вероятностями $p_1,\dots,p_l$, где $p_i=\mathsf{P}\left(\rho_t=a_i\right)$, $i=\overline{1,l}$; причем

а) $2\le l<\infty$;

б) $\inf\limits_{1\le i\le l} a_i>-1$, $\sup\limits_{1\le i\le l} a_i<\infty$;

в) не существует $i\in\{2,\dots,l\}$ такого, что $a_i=0$;

г) найдутся такие $j,k\in\{1,\dots,l\}$, что $a_j<0$, $a_k>0$.

Из условий (ρ) вытекает, что

1) ρ_t есть l-значная случайная величина с мультиномиальным распределением и допускает представление

$$\rho_t=\sum_{i=1}^{l} a_i 1_{\{\rho_t=a_i\}},$$

где $1_{\{\rho_t=a_i\}}=\left\{\begin{array}{ll}1, & \rho_t=a_i\\ 0, & \rho_t\ne a_i\end{array}\right.$;

2) без потери общности можно предполагать, что $-1<a_1<a_2<\dots<a_l<\infty$;

3) при любом $t \in N_0$ случайная величина $S_t > 0$;

4) последовательность $\{S_t\}_{t \in N_0}$, заданная рекуррентным соотношением (1) является однородной марковской цепью относительно базовой меры P.

5.2. В дальнейшем нам потребуются следующие обозначения и замечания.

Ясно, что заданный $(1, S)$-рынок без транзакционных издержек является неполным при $l \geq 3$.

Пусть последовательность $\{\rho_t\}_{t \in N_1}$ удовлетворяет условиям (ρ), а $\Re^d_{N,l}$ — вероятностные меры, заданные на траекториях этой последовательности. Очевидно, что $\Re^d_{N,l} \neq \varnothing$. Для любых P и $\mathsf{Q} \in \Re^d_{N,l}$ определим $p_i \triangleq \mathsf{P}(\rho_t = a_i)$, $q_i \triangleq \mathsf{Q}(\rho_t = a_i)$.

<u>*Conditions*</u> $\left(\Re^d_{N,l}\right)$:

1) относительно любой меры $\mathsf{Q} \in \Re^d_{N,l}$ случайные величины $\{\rho_t\}_{t \in N_1}$ независимы в совокупности и одинаково распределены;

2) если $\mathsf{P}, \mathsf{Q} \in \Re^d_{N,l}$, то для любого $i \in \{1, ..., l\}$: $0 < p_i < 1$, $0 < q_i < 1$, а $\sum\limits_{i=1}^{l} p_i = \sum\limits_{i=1}^{l} q_i = 1$.

Тогда производная Родона-Никодима вероятностной меры Q относительно вероятностной меры P может быть записана так (см. [6]):

$$\frac{d\mathsf{Q}}{d\,\mathsf{P}}(\rho_1, \ldots, \rho_N) = \prod_{j=1}^{l} \left(\frac{q_j}{p_j}\right)^{\sum\limits_{t=1}^{N} 1_{\left\{\rho_t = a_j\right\}}}.$$

Отметим, что в рассматриваемом случае $\Re^d_{N,l}$ — выпуклое слабо компактное множество.

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^1$ является ограниченной борелевской функцией, обозначаемой $\varphi(x)$. Мы предполагаем, что функция выплаты имеет вид $\varphi(S_N) = \varphi(x)\,|_{x = S_N}$.

В этом параграфе рассматривается проблема построения минимаксного хеджирующего портфеля для европейского платежного обязательства $\varphi(S_N)$ с горизонтом N на описанном неполном конечном $(1, S)$-рынке.

Легко видеть, что теоремы 10–15 из [3] в данном случае справедливы. Значит, существует вероятностная мера Q^*_l, относительно которой рассматриваемый $(1, S)$-рынок является "наихудшим" полным. Тем не менее, из результатов [3] не следуют непосредственно явные формулы для вероятности перехода за один шаг последовательности $(S_t, \mathcal{F}_t)_{t \in N_0}$ относительно меры Q^*. Чтобы получить такие формулы и построить минимаксный хеджирующий портфель, необходимо исследовать рекуррентное соотношение (5) из [3] с учетом сделанных выше предположений.

5.3. В этом разделе мы исследуем рекуррентное соотношение (5) из [3] с учетом приведенных выше предположений и сделанных замечаний.

Через $\overline{V}_t^l$ обозначим $\mathcal{F}_t^S$-измеримую случайную величину

$$\overline{V}_t^l \triangleq \inf_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \sup_{\mathsf{Q} \in \Re_{N,l}^d} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\exp\left\{ \varphi\left(S_N\right) - \sum_{i=t+1}^{N} \gamma_i \Delta S_i \right\} | \mathcal{F}_t^S \right]. \qquad (2)$$

Рассуждая аналогично тому, как это было сделано при доказательстве теоремы 1 из [3], можно показать, что в рассматриваемом случае последовательность $\left\{\overline{V}_t^l, \mathcal{F}_t^S\right\}_{t \in N_1}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} \overline{V}_{t-1}^l = \inf\limits_{\gamma \in D_t} \sup\limits_{\mathsf{Q} \in \Re_{N,l}^d} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}_t^l e^{-\gamma S_{t-1} \rho_t} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \\ \overline{V}_t^l|_{t=N} = e^{\varphi(S_N)}. \end{cases} \qquad (3)$$

Следующее утверждение является основным в этом разделе.

Т е о р е м а 16 *Пусть последовательность $\left\{S_t, \mathcal{F}_t^S\right\}_{t \in N_0}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (1) и выполнены условия (ρ) и $\left(\Re_{N,l}^d\right)$, а $\varphi(x)$ — ограниченная борелевская функция. Предположим также, что $\overline{V}_t^l$, определенные формулой (2), удовлетворяют рекуррентному соотношению (3).*

Тогда справедливы следующие утверждения.

1) $D_t = \mathbb{R}^1$ для любого $t \in N_0$.

2) Существует борелевская функция $\overline{V}_t^l(x)$, действующая из $N_0 \times \mathbb{R}^+$ в $\mathbb{R}^+$, и такая, что для любого $t \in N_0$: $\overline{V}_t^l = \overline{V}_t^l(x)|_{x=S_t}$.

Кроме того, для любых $t \in N_1$ и $x \in \mathbb{R}^+$ функция $\overline{V}_t^l(x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} \overline{V}_{t-1}^l(x) = \inf\limits_{\gamma \in \mathbb{R}^1} \sup\limits_{\substack{0 < q_i < 1, \quad i = \overline{1,l}, \\ \sum_{i=1}^{l} q_i = 1}} \left(\sum_{i=1}^{l} \overline{V}_t^l \left(x\left(1 + a_i\right)\right) e^{-\gamma x a_i} q_i \right) \\ \overline{V}_t^l|_{t=N} = e^{\varphi(x)} \end{cases} . \qquad (4)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о   т е о р е м ы 16. 1) Докажем сначала, что для любого $t \in N_1$ множество $D_t = \mathbb{R}^1$. Достаточно показать, что для любых $t \in N_1$ и $\gamma \in \mathbb{R}^1$

$$\sup_{\mathsf{Q} \in \Re^d_{N,l}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}^l_t e^{-\gamma S_{t-1}\rho_t} | \mathcal{F}^S_{t-1} \right] < \infty. \tag{5}$$

Отметим, что: а) из $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^1} |\varphi(x)| \leq c_6$, где $c_6 > 0$ — константа, следует для любого $t \in N_0$, что

$$0 < \overline{V}^l_t \leq e^{c_6}. \tag{6}$$

Обоснование, приведенное при доказательстве неравенства (52) в [3] (см. доказательство теоремы 2 в [3]), применимо и для (6). Поэтому доказательство (6) опущено.

б) Из представления (1) следует, что для любого $t \in N_0$ случайная величина S_t представима в виде

$$S_t = S_0 \prod_{i=1}^{t} (1 + \rho_i). \tag{7}$$

Если $\mathcal{F}^\rho_t \triangleq \sigma \{S_0, \rho_1, \ldots, \rho_t\}$, то (7) означает, что для любого $t \in N_1$: $\mathcal{F}^S_t = \mathcal{F}^\rho_t$. Далее, в силу (7) и условий (ρ) для любого $t \in N_0$ найдется константа $c_7 > 0$ такая, что

$$0 < S_t \leq c_5 (1 + a_l)^t \leq c_7. \tag{8}$$

Рассмотрим $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}^l_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}^S_{t-1} \right]$, где $t \in N_1$, $\mathsf{Q} \in \Re^d_{N,l}$, а $\gamma \in D_t$ произвольно. Применив лемму Дынкина-Евстигнеева [2], получим

$$0 \leq \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}^l_t e^{-\gamma S_{t-1}\rho_t} | \mathcal{F}^S_{t-1} \right] = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}^l_t e^{-\gamma x \rho_t} | \mathcal{F}^S_{t-1} \right] \Big|_{x = S_{t-1}}. \tag{9}$$

Поскольку $\{\rho_t\}_{t \in N_1}$ — семейство независимых в совокупности случайных величин относительно любой меры $\mathsf{Q} \in \Re^d_{N,l}$, то в силу (6) и (9), а также условий (ρ) получим, что для любых $t \in N_1$ и $x, \gamma \in \mathbb{R}^1$, справедливо неравенство

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\overline{V}^l_t e^{-\gamma x \rho_t} | \mathcal{F}^S_{t-1} \right] \leq e^{c_6} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[e^{-\gamma x \rho_t} | \mathcal{F}^S_{t-1} \right] = \tag{10}$$

$$= e^{c_6} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} e^{-\gamma x \rho_t} = e^{c_6} \sum_{i=1}^{l} e^{-\gamma x a_i} q_i \leq e^{c_6} l e^{|\gamma||x| a_l} < \infty.$$

Формула (10) и условия (ρ) дают неравенство (5) при любом $\gamma \in \mathbb{R}^1$. Поэтому для любого $t \in N_1$ получили $D_t = \mathbb{R}^1$.

2) Докажем теперь, что $\overline{V}_t^l$ является марковской случайной функцией, т.е. что существует борелевская функция $\overline{V}_t^l(x)$, действующая из $N_0 \times \mathbb{R}^+$ в $\mathbb{R}^+$, и такая, что для любого $t \in N_1$ имеет место представление $\overline{V}_t^l = \overline{V}_t^l(x)\,|_{x=S_t}$. Сделаем для этого несколько вспомогательных замечаний. Раз $\overline{V}_t^l$ является $\mathcal{F}_t^S$-измеримой, то из теоремы Бореля следует, что для любого $t \in N_0$ существует борелевская функция $\widetilde{V}_t(x_0, \ldots, x_t)$, действующая из $(\mathbb{R}^+)^{t+1}$ в $\mathbb{R}^+$, где $x_i \in \mathbb{R}^+$, $i = \overline{0,t}$, и такая, что

$$\overline{V}_t^l = \widetilde{V}_t(x_0, \ldots, x_t)\,\big|_{x_i = S_i \;\; i=\overline{0,t}} .$$

Тогда из (1), леммы Дынкина-Евстигнеева [2] и условий (ρ) следует, что для любых $t \in N_1$, $\mathsf{Q} \in \Re_{N,l}^d$ и $\gamma \in D_t$ справедливы соотношения

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{V}_t^l e^{-\gamma S_{t-1}\rho_t} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\widetilde{V}_t(S_0, \ldots, S_{t-1}, S_t)\, e^{-\gamma S_{t-1}\rho_t} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] =$$

$$= \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\widetilde{V}_t(S_0, \ldots, S_{t-1}, S_{t-1}(1+\rho_t))\, e^{-\gamma S_{t-1}\rho_t} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] =$$

$$= \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\widetilde{V}_t(x_0, \ldots, x_{t-1}, x_{t-1}(1+\rho_t))\, e^{-\gamma x_{t-1}\rho_t} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right]\Big|_{x_i = S_i \quad i=\overline{0,t-1}} =$$

$$= \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\widetilde{V}_t(x_0, \ldots, x_{t-1}, x_{t-1}(1+\rho_t))\, e^{-\gamma x_{t-1}\rho_t}\right]\Big|_{x_i = S_i \quad i=\overline{0,t-1}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \widetilde{V}_t(x_0, \ldots, x_{t-1}, x_{t-1}(1+a_i))\, e^{-\gamma x_{t-1}a_i} q_i\Bigg|_{x_i = S_i \quad i=\overline{0,t-1}} =$$

$$= \sum_{i=1}^{l} \widetilde{V}_t(S_0, \ldots, S_{t-1}, S_{t-1}(1+a_i))\, e^{-\gamma S_{t-1}a_i} q_i. \tag{11}$$

В свою очередь, из (11) получаем для любых $t \in N_1$ и $\gamma \in D_t$

$$\sup_{\mathsf{Q} \in \Re_{N,l}^d} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\overline{V}_t^l e^{-\gamma S_{t-1}\rho_t} | \mathcal{F}_{t-1}^S\right] = \tag{12}$$

$$= \sup_{\left\{\begin{array}{c} 0 < q_i < 1, \quad i = \overline{1,l}, \\ \sum\limits_{i=1}^{l} q_i = 1 \end{array}\right\}} \sum_{i=1}^{l} \widetilde{V}_t(S_0, \ldots, S_{t-1}, S_{t-1}(1+a_i))\, e^{-\gamma S_{t-1}a_i} q_i.$$

С учетом сделанных выше замечаний и (12), формулу (3) можно переписать следующим образом:

$$\widetilde{V}_t\left(S_0,\ldots,S_{t-1}\right)=$$
$$=\inf_{\gamma\in\mathbb{R}^1}\sup_{\left\{\begin{array}{c}0<q_i<1,\quad i=\overline{1,l},\\ \sum\limits_{i=1}^{l}q_i=1\end{array}\right\}}\sum_{i=1}^{l}\Big[\widetilde{V}_t\left(S_0,\ldots,S_{t-1},S_{t-1}\left(1+a_i\right)\right)\times$$
$$\times e^{-\gamma S_{t-1}a_i}q_i\Big].$$

Покажем теперь, что $\overline{V}_t^l$ — марковская случайная функция. Для начала докажем, что для любого $t\in N_0$ существует борелевская функция $\overline{V}_t^l\left(x\right)$ со значениями в $\mathbb{R}^+$, обозначаемая $\overline{V}_t^l\left(x\right)$, и такая, что $\overline{V}_t^l\left(S_t\right)\triangleq\overline{V}_t^l\left(x\right)|_{x=S_t}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (13). Воспользуемся методом обратной индукции. Поскольку $\overline{V}_t^l|_{t=N}=e^{\varphi(S_N)}$, то для $t=N$ утверждение верно.

Предположим, что $\overline{V}_t^l=\overline{V}_t^l\left(S_t\right)$. Требуется доказать, что $\overline{V}_{t-1}^l=\overline{V}_{t-1}^l\left(S_{t-1}\right)$. Из рекуррентного соотношения (13) имеем

$$\overline{V}_{t-1}^l=\inf_{\gamma\in\mathbb{R}^1}\sup_{\left\{\begin{array}{c}0<q_i<1,\quad i=\overline{1,l},\\ \sum\limits_{i=1}^{l}q_i=1\end{array}\right\}}\sum_{i=1}^{l}\overline{V}_t^l\left(S_{t-1}\left(1+a_i\right)\right)e^{-\gamma S_{t-1}a_i}q_i. \tag{13}$$

Поскольку правая часть (13) измерима относительно σ-алгебры $\sigma\left\{S_{t-1}\right\}$, порожденной случайной величиной S_{t-1}, то левая часть (13) также измерима относительно $\sigma\left\{S_{t-1}\right\}$. Значит, $\overline{V}_t^l$ — марковская. Значит, рекуррентное соотношение (13) примет вид (4). Доказательство завершено.

5.4. В этом разделе доказано, что внешняя верхняя и внутренняя нижняя грань в рекуррентном соотношении (4) достигаются. Здесь также установлено существование единственной "наихудшей" мартингальной меры на рассматриваемом $(1,S)$-рынке. Основные результаты этого раздела собраны в следующей теореме.

Теорема 17 *Пусть выполнены условия теоремы 16. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1) Для любых $t\in N_1$ и $x\in\mathbb{R}^+$ борелевская функция $\ln\overline{V}_t^l\left(x\right)$ удовле-

творяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} \ln \overline{V}_{t-1}^{l}(x) = \inf\limits_{\gamma\in\mathbb{R}^1}\max\limits_{1\le i\le l}\left[\ln \overline{V}_{t}^{l}(x(1+a_i)) - \gamma x a_i\right] \\ \ln \overline{V}_{t}^{l}(x)\,|_{t=N} = \varphi(x). \end{cases} \tag{14}$$

2) Существуют отображения $i^*: N_1\times\mathbb{R}^+\to\Gamma$; $j^*: N_1\times\mathbb{R}^+\to\Gamma$ и $\gamma^*: N_1\times\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^1$, обозначенные, соответственно, через $i_t^*(x)$, $j_t^*(x)$ и $\gamma_t^*(x)$, такие, что

$$\inf_{\gamma\in\mathbb{R}^1}\max_{1\le i\le l}\left[\ln \overline{V}_{t}^{l}(x(1+a_i)) - \gamma x a_i\right] = \ln \overline{V}_{t}^{l}\left(x\left(1+a_{i_t^*(x)}\right)\right) - \gamma_t^*(x)\, x a_{i_t^*(x)} =$$

$$= \ln \overline{V}_{t}^{l}\left(x\left(1+a_{j_t^*(x)}\right)\right) - \gamma_t^*(x)\, x a_{j_t^*(x)}, \tag{15}$$

причем для любых $t\in N_1$ и $x\in\mathbb{R}^+$:

а) $a_{i_t^*(x)}<0$, $a_{j_t^*(x)}>0$,

б) $\gamma_t^*(x)$ можно вычислить по формуле

$$\gamma_t^*(x) = \frac{1}{x\left(\left|a_{i_t^*(x)}\right| + a_{j_t^*(x)}\right)}\ln\frac{\overline{V}_{t}^{l}\left(x\left(1+a_{j_t^*(x)}\right)\right)}{\overline{V}_{t}^{l}\left(x\left(1+a_{i_t^*(x)}\right)\right)}. \tag{16}$$

3) Равенство (14) можно переписать в виде

$$\begin{cases} \ln \overline{V}_{t-1}^{l}(x) = (1-q_t^*(x))\ln \overline{V}_{t}^{l}\left(x\left(1+a_{i_t^*(x)}\right)\right) + q_t^*(x)\ln \overline{V}_{t}^{l}\left(x\left(1+a_{j_t^*(x)}\right)\right) \\ \ln \overline{V}_{t}^{l}(x)\,|_{t=N} = \varphi(x), \end{cases} \tag{17}$$

где

$$q_t^*(x) = \frac{\left|a_{i_t^*(x)}\right|}{\left|a_{i_t^*(x)}\right| + a_{j_t^*(x)}}. \tag{18}$$

4) Существует и единственна вероятностная мера Q_l^*, относительно которой: а) марковская случайная функция $\left\{\ln \overline{V}_{t}^{l}(S_t), \mathcal{F}_t^S\right\}_{t\in N_0}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (17), б) последовательность $\left(S_t, \mathcal{F}_t^S\right)_{t\in N_0}$, удовлетворяющая рекуррентному соотношению (1), есть неоднородная марковская цепь. Кроме того, при любом $t\in N_1$ случайная величина ρ_t принимает два значения: $a_{i_t^*(S_{t-1})}$ или $a_{j_t^*(S_{t-1})}$ с условными вероятностями

$$\mathsf{Q}^*\left(\rho_t = a_{i_t^*(S_{t-1})}|S_{t-1}\right) = 1 - q_t^*(S_{t-1}) \tag{19}$$

$$\left(\mathsf{Q}^*\left(\rho_t = a_{j_t^*(S_{t-1})}|S_{t-1}\right) = q_t^*(S_{t-1})\right),$$

где $q_t^*(S_{t-1}) \triangleq q_t^*(x)\,|_{x=S_{t-1}}$, а $q_t^*(x)$ определено с помощью (18), в) мера Q^* — мартингальная, т.е. для любого $t\in N_1$

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left(\rho_t|\mathcal{F}_{t-1}^S\right) = 0. \tag{20}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 17. 1) Отметим сначала, что для любых $t \in N_1$ и $x \in \mathbb{R}^+$ верно, что

$$\sup_{\left\{\begin{array}{c} 0 < q_i < 1, \quad i = \overline{1,l}, \\ \sum\limits_{i=1}^{l} q_i = 1 \end{array}\right\}} \sum_{i=1}^{l} \overline{V}_t^l \left(x\left(1+a_i\right)\right) e^{-\gamma x a_i} q_i =$$

$$= \max_{\left\{\begin{array}{c} 0 \le q_i \le 1, \quad i = \overline{1,l}, \\ \sum\limits_{i=1}^{l} q_i = 1 \end{array}\right\}} \sum_{i=1}^{l} \overline{V}_t^l \left(x\left(1+a_i\right)\right) e^{-\gamma x a_i} q_i.$$

Ясно, что

$$\max_{\left\{\begin{array}{c} 0 \le q_i \le 1, \quad i = \overline{1,l}, \\ \sum\limits_{i=1}^{l} q_i = 1 \end{array}\right\}} \sum_{i=1}^{l} \overline{V}_t^l \left(x\left(1+a_i\right)\right) e^{-\gamma x a_i} q_i = \tag{21}$$

$$= \max_{1 \le i \le l} \overline{V}_t^l \left(x\left(1+a_i\right)\right) e^{-\gamma x a_i}.$$

Вместе рекуррентное соотношение (4) и (21) дают

$$\overline{V}_{t-1}^l (x) = \inf_{\gamma \in \mathbb{R}^1} \max_{1 \le i \le l} \overline{V}_t^l \left(x\left(1+a_i\right)\right) e^{-\gamma x a_i}. \tag{22}$$

Поскольку для любых $t \in N_1$ и $x \in \mathbb{R}^+$ функция $\overline{V}_t^l (x) > 0$, то из формулы (22) следует, что $\ln \overline{V}_t^l (x)$ удовлетворяет (14).

2) По определению,

$$\psi(t, x, \gamma) \triangleq \max_{1 \le i \le l} \left[\ln \overline{V}_t^l \left(x\left(1+a_i\right)\right) - \gamma x a_i \right].$$

Для любых (t, x) функция $\psi(t, x, \gamma)$ есть верхняя огибающая [5] множества функций $\left\{ \ln \overline{V}_t^l \left(x\left(1+a_i\right)\right) - \gamma x a_i \right\}_{i=\overline{1,l}}$, рассматриваемых как функций по $\gamma \in \mathbb{R}^1$. Не трудно проверить, что для любых (t, x) функция $\psi(t, x, \gamma)$ непрерывная, кусочно-линейная, выпуклая, ограниченная снизу функция от $\gamma \in \mathbb{R}^1$. Кроме того,

$$\psi(t, x, \gamma) \underset{|\gamma| \to \infty}{\to} \infty.$$

Значит, существует борелевская функция $\gamma^* : N_0 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^1$, которую обозначим через $\gamma_t^*(x)$, такая, что

$$\inf_{\gamma\in\mathbb{R}^1} \psi(t,x,\gamma) = \psi(t,x,\gamma_t^*(x)).$$

Найдем явный вид $\gamma_t^*(x)$. Из свойств функции $\psi(t,x,\gamma)$ и условий (ρ) следует, что для каждой пары (t,x) существуют $i_t^*(x)$ и $j_t^*(x)$, принимающие значения в Γ, такие, что:

а) $a_{i_t^*(x)} < 0$ and

$$\psi(t,x,\gamma_t^*(x)) = \ln \overline{V}_t^l \left(x\left(1 + a_{i_t^*(x)}\right)\right) - \gamma_t^*(x)\, x a_{i_t^*(x)}, \tag{23}$$

б) $a_{j_t^*(x)} > 0$ and

$$\psi(t,x,\gamma_t^*(x)) = \ln \overline{V}_t^l \left(x\left(1 + a_{j_t^*(x)}\right)\right) - \gamma_t^*(x)\, x a_{j_t^*(x)}. \tag{24}$$

Очевидно, что для каждой пары (t,x) верно, что $i_t^*(x) < j_t^*(x)$. Согласно (23) и (24) величина $\gamma_t^*(x)$ удовлетворяет равенству

$$\ln \overline{V}_t^l \left(x\left(1 + a_{i_t^*(x)}\right)\right) - \gamma_t^*(x)\, x a_{i_t^*(x)} = \tag{25}$$

$$= \ln \overline{V}_t^l \left(x\left(1 + a_{j_t^*(x)}\right)\right) - \gamma_t^*(x)\, x a_{j_t^*(x)}.$$

Разрешив уравнение (25) относительно $\gamma_t^*(x)$, получим (16).

3) Применив (16), (24) и сделав несколько элементарных преобразований рекуррентного соотношения (14), можно получить (17) и (18).

4) Из формул (17) и (18) следует существование вероятностной меры Q^* такой, что: а) $\{S_t\}_{t\in N_0}$ — неоднородная марковская цепь, (ii) при любом $t \in N_1$ случайная величина ρ_t принимает значения $a_{i_t^*(S_{t-1})}$ и $a_{j_t^*(S_{t-1})}$ с условными вероятностями $\mathsf{Q}^*\left(\rho_t = a_{i_t^*(S_{t-1})} | S_{t-1}\right) = 1 - q_t^*(S_{t-1})$ и $\mathsf{Q}^*\left(\rho_t = a_{j_t^*(S_{t-1})} | S_{t-1}\right) = q_t^*(S_{t-1})$, соответственно, где $q_t^*(S_{t-1}) = q_t^*(x)\,|_{x=S_{t-1}}$ и $q_t^*(x)$ определено с помощью (18). Значит, получили (20). А из (20) следует, что мера Q^* — мартингальная. Доказательство завершено.

5.5. В этом разделе доказано, что мера Q^*, построенная в разделе 5.4, является "наихудшей".

Теорема 18 *Пусть выполнены условия теоремы 17. Тогда вероятностная мера Q^* является наихудшей.*

Доказательство теоремы 18. Предположим обратное, т.е. что Q^* не "наихудшая". Тогда, согласно (13), найдется $t \in N_0$ такой, что

$$\begin{aligned} 1 &= \inf_{\gamma\in\mathbb{R}^1} \sup_{\mathsf{Q}\in\Re^d_{N,l}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\left[\frac{\overline{V}^l_t}{\overline{V}^l_{t-1}} e^{-\gamma\Delta S_t} | \mathcal{F}^S_{t-1}\right] > \\ &> \inf_{\gamma\in\mathbb{R}^1} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\exp\left\{\Delta \ln \overline{V}^l_t - \gamma\Delta S_t\right\} | \mathcal{F}^S_{t-1}\right]. \end{aligned} \tag{26}$$

Выше было доказано (см. второе утверждение теоремы 17), что существует $\mathcal{F}_{t-1}$-измеримая случайная величина $\gamma^*_t \triangleq \gamma^*_t(x)|_{x=S_{t-1}}$:

$$\begin{aligned} &\inf_{\gamma\in\mathbb{R}^1} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\exp\left\{\Delta \ln \overline{V}^l_t - \gamma\Delta S_t\right\} | \mathcal{F}^S_{t-1}\right] = \\ &= \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\exp\left\{\Delta \ln \overline{V}^l_t - \gamma^*_t\Delta S_t\right\} | \mathcal{F}^S_{t-1}\right]. \end{aligned}$$

Неравенство (26) и последнее равенство позволяют записать

$$0 > \ln \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\exp\left\{\Delta \ln \overline{V}^l_t - \gamma^*_t\Delta S_t\right\} | \mathcal{F}^S_{t-1}\right]. \tag{27}$$

Применение неравенства Йенсена к (27) дает

$$0 > \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\Delta \ln \overline{V}^l_t - \gamma^*_t\Delta S_t | \mathcal{F}^S_{t-1}\right]. \tag{28}$$

С другой стороны, из (20) следует мартингальное свойство последовательности $\{S_t, \mathcal{F}_t\}_{t\in N_0}$ with относительно меры Q^*. Поэтому, применив (17) и (20), получим

$$0 = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\Delta \ln \overline{V}^l_t | \mathcal{F}^S_{t-1}\right] = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\Delta \ln \overline{V}^l_t - \gamma^*_t\Delta S_t | \mathcal{F}^S_{t-1}\right]. \tag{29}$$

При сравнении (28) и (29) очевидно противоречие. Значит, наше предположение не верно и Q^* — "наихудшая". Теорема доказана.

5.6. В этом разделе доказано, что платежное обязательство допускает S-представление относительно меры Q^*. Соответствующее утверждение составляет суть следующей теоремы.

Теорема 19 *Пусть выполнены условия теоремы 18. Тогда любое платежное обязательство $\varphi(S_N)$ допускает S-представление относительно мартингальной меры Q^*, т.е.,*

$$\varphi(S_N) = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\varphi(S_N) | \mathcal{F}_0\right] + \sum_{i=1}^N \gamma^*_i(S_{i-1}) S_{i-1}\rho_i, \tag{30}$$

где $\gamma^*_i(S_{i-1})$ определено формулой (16).

Доказательство теоремы 19. Из теорем 17 и 18 следует, что рекуррентное соотношение (14) можно переписать в виде

$$1 = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\exp\left\{\Delta \ln \overline{V}^l_t - \gamma^*_t \Delta S_t\right\} | \mathcal{F}^S_{t-1}\right]. \qquad (31)$$

Докажем, что случайная последовательность $\left\{\ln \overline{V}^l_t, \mathcal{F}_t\right\}_{t\in N_0}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} \Delta \ln \overline{V}^l_t = \gamma^*_t \Delta S_t, \\ \ln \overline{V}^l_t|_{t=0} = \ln \overline{V}^l_0, \quad \ln \overline{V}^l_t|_{t=N} = \varphi\left(S_N\right) \end{cases} \qquad (32)$$

относительно меры Q^*.

Действительно, с одной стороны, формула (31) и неравенство Йенсена дают для любого $t \in N_1$,

$$\begin{aligned} 0 &= \ln \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\exp\left\{\Delta \ln \overline{V}^l_t - \gamma^*_t \Delta S_t\right\} | \mathcal{F}^S_{t-1}\right] \geq \\ &\geq \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\Delta \ln \overline{V}^l_t - \gamma^*_t \Delta S_t | \mathcal{F}^S_{t-1}\right]. \end{aligned} \qquad (33)$$

С другой стороны, при доказательстве теоремы 18 было установлено равенство (29). Очевидно, что неравенство (33) становится равенством тогда и только тогда, когда случайная величина $\left(\Delta \ln \overline{V}^l_t - \gamma^*_t \Delta S_t\right)$ является $\mathcal{F}^S_{t-1}$-измеримой. Таким образом, получили рекуррентное соотношение (32). Также легко видеть, что $\ln \overline{V}^l_t|_{t=0} = \ln \overline{V}^l_0$ и $\ln \overline{V}^l_t|_{t=N} = \varphi\left(S_N\right)$. Поскольку мера Q^* — мартингальная, то из (32) следует S-представление (30) и равенство

$$\ln \overline{V}^l_0 = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[\varphi\left(S_N\right) | \mathcal{F}_0\right]$$

относительно Q^*. Доказательство завершено.

5.7. В этом разделе построен минимаксный хеджирующий портфель европейского опциона на конечном $(1, S)$-рынке.

Теорема 20 *Пусть $\varphi\left(S_N\right)$ — ограниченное платежное обязательство и выполнены условия теоремы 19. Тогда конечный неполный $(1, S)$-рынок, заданный рекуррентным соотношением (1), является "наихудшим" полным, т.е. существуют мера Q^* и минимаксный хеджирующий самофинансирующий портфель $\pi^* = \left(\beta^*_t, \gamma^*_t\right)_{t\in N_0}$ такие, что:*

1) для любого $t \in N_1$ предсказуемая последовательность $\left(\gamma^*_t\right)_{t\in N_0}$ определяется формулой (16), а γ^*_0 можно выбрать равным нулю;

2) предсказуемая последовательность $(\beta_t^*)_{t\in N_0}$ определяется рекуррентным соотношением

$$\beta_t^* = \beta_{t-1}^* - S_{t-1}\Delta\gamma_t^*, \quad \beta_t^*|_{t=0} = \beta_0^*, \tag{34}$$

а β_0^* можно выбрать равным $\ln \overline{V}_0^l(S_0)$;

3) капитал $X_t^{\pi^*}$ портфеля π^* в любой момент $t \in N_0$ допускает представления

$$X_t^{\pi^*} = \beta_t^* + \gamma_t^* S_t \tag{35}$$

$$X_t^{\pi^*} = X_0^{\pi^*} + \sum_{i=1}^{t} \gamma_i^* S_{i-1}\rho_i, \tag{36}$$

причем $X_0^{\pi^*} = \ln \overline{V}_0^l(S_0)$;

$$X_t^{\pi^*} = \ln \overline{V}_t^l(S_t),$$

где $\ln \overline{V}_t^l(S_t)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (17), а $X_N^{\pi^*} = \varphi(S_N)$.

Доказательство теоремы 20. Поскольку количество рискового актива γ_t^* в любой момент $t \in N_1$ определено посредством (16), то можно использовать условие самофинансируемости (18) из [3], чтобы получить рекуррентное соотношение (34) для количество безрискового актива β_t^*. Поэтому капитал $X_t^{\pi^*}$ портфеля $\pi^* = (\beta_t^*, \gamma_t^*)_{t\in N_0}$ допускает представление (35) для любых $t \in N_0$. Формулы (35) и (18) из [3] дают представление для $\Delta X_t^{\pi^*}$:

$$\Delta X_t^{\pi^*} = \gamma_t^* \Delta S_t = \gamma_t^* S_{t-1}\rho_t. \tag{37}$$

Сравнив (32)с (37), получим для любого $t \in N_1$

$$\Delta X_t^{\pi^*} = \Delta \ln \overline{V}_t^l. \tag{38}$$

Выберем $X_0^{\pi^*} = \ln \overline{V}_0^l$. Из (38) видно, что для любого $t \in N_0$ выполняется: $X_t^{\pi^*} = \ln \overline{V}_t^l$. Поэтому $X_N^{\pi^*} = \ln \overline{V}_N^l = \varphi(S_N)$. Таким образом, $(1, S)$-рынок, заданный рекуррентным соотношением (1), является "наихудшим" полным, а портфель π^*, заданный соотношениями (16), (17) и (34), является минимаксным хеджирующим относительно меры Q^*. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е 11 *1) Условие* $\left(\rho_{c)}\right)$ *можно опустить, но это приведет к усложнению формул для начальной цены опциона и компонент портфеля.*

2) Пусть имеется биномиальный $(1, S)$*-рынок с* $q^* = \mathsf{Q}^*(\rho_t = a) = \frac{b}{|a|+b}$, $p^* = \mathsf{Q}^*(\rho_t = b) = \frac{|a|}{|a|+b}$, *где* $-1 < a < 0 < b < \infty$. *Рассуждая аналогично тому, как это было сделано выше, легко показать, что такой рынок является "наихудшим".*

§6. Пример

В этом параграфе приведен пример расчета минимаксного хеджирующего портфеля европейского опциона на $(1, S)$-рынке в предположении, что доходность рискового актива описывается последовательностью независимых в совокупности одинаково распределенных случайных величин (относительно базовой меры P) с компактным носителем распределения вероятностей.

6.1. Пусть $\left\{S_t, \mathcal{F}_t^S\right\}_{t \in N_0}$ — согласованная случайная последовательность, заданная на стохастическом базисе $\left(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in N_0}, \mathsf{P}\right)$. Будем предполагать, что $\left\{S_t, \mathcal{F}_t^S\right\}_{t \in N_0}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению (1), а случайная последовательность $\left\{\rho_t, \mathcal{F}_t^S\right\}_{t \in N_1}$ обладает следующими свойствами (относительно базовой меры P):

1) $\left\{\rho_t, \mathcal{F}_t^S\right\}_{t \in N_1}$ — последовательность независимых в совокупности и одинаково распределенных случайных величин;

2) носителем распределения ρ_t является отрезок $[a, b]$, где $-1 < a < 0 < b < \infty$.

В описанной ситуации при любом $t \in N_0$ случайная величина $S_t > 0$ P-п.н. Из сделанных предположений также следует, что последовательность $\{S_t\}_{t \in N_0}$ является однородной марковской цепью относительно меры P.

Пусть $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^1$ — ограниченная борелевская функция, которую будем обозначать через $\varphi(x)$, а $\varphi(S_N) = \varphi(x)|_{x=S_N}$ — платежное обязательство.

Через $\mathbb{M}[a, b]$ обозначим множество вероятностных мер, носителем которых является отрезок $[a, b]$. По определению, $\mathbb{M}^N[a, b] \triangleq \underbrace{\mathbb{M}[a, b] \times \cdots \times \mathbb{M}[a, b]}_{N}$. Известно (см. [1]), чтot $\mathbb{M}[a, b]$ и $\mathbb{M}^N[a, b]$ есть выпуклые множества (в топологии слабой сходимости $\sigma\left(\mathbb{M}^N, \left(\mathbb{M}^N\right)^*\right)$).

Пусть $\Re_N^c$ — подмножество $\Re_N$ такое, что: 1) случайные величины $\{\rho_t\}_{t \geq 1}$ независимы в совокупности и одинаково распределены относительно каждой меры $\mathsf{Q}_N \in \Re_N^c$; 2) любая мера $\mathsf{Q}_N \in \Re_N^c$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега.

Приведем некоторые свойства множества $\Re_N^c$:

1) $\Re_N^c \neq \varnothing$ и $\Re_N^c \subset \mathbb{M}^N[a,b]$;

2) $\Re_N^c$ выпуклое слабо компактное множество;

3) последовательность, определенная с помощью (1), является однородной марковской цепью относительно каждой из мер $\mathsf{Q}_N \in \Re_N^c$.

Легко проверить, что введенный $(1,S)$-рынок не полон.

6.2. Заметим, что в рассматриваемом случае справедливы все предположения теорем 5, 11, 13–15 из [3]. Значит, существуют: 1) "наихудшая" (мартингальная и дискретная) вероятностная мера Q_N^* такая, что относительно нее рассматриваемый $(1,S)$-рынок является "наихудшим" полным; 2) минимаксный хелжирующий портфель π^*. При этом $\mathsf{Q}_N^* \in \left(\mathbb{M}^N[a,b]\setminus\Re_N^c\right)\cap\mathfrak{M}_N$ — единственная (в смысле замечания 7 из [3]) мартингальная мера. Поэтому Q_N^* является экстремальной точкой множества. Изложенное позволяет применить теорему Шоке [4, **?**], чтобы определить вид распределения случайных величин ρ_t (относительно Q_N^*) и построить минимаксный хеджирующий портфель π^*.

6.3. В этом разделе доказано, что двуточечное множество $\{a,b\}^N$ является носителем меры Q_N^*.

Поскольку $\mathsf{Q}_N^* \in \left(\mathbb{M}^N[a,b]\setminus\Re_N^c\right)\cap\mathfrak{M}_N$, то $\mathsf{Q}_N^* = \underbrace{\mathsf{Q}_1^*\times\cdots\times\mathsf{Q}_1^*}_{N}$, где $\mathsf{Q}_1^* \in \mathbb{M}[a,b]$. А в силу мартингальности Q_N^*, имеем

$$\mathsf{E}^{\mathsf{Q}_N^*}\rho_t = 0.$$

Таким образом, ноль является барицентром [4] меры Q_1^*. Очевидно, что мера Q_1^* удовлетворяет предположениям теоремы Шоке [4, **?**]. Значит, носитель Q_1^* является подмножеством множества экстремальных точек отрезка $[a,b]$. Понятно, что случайная величина ρ_1 принимает значения a и b относительно Q_1^* с вероятностями $q^* = \mathsf{Q}_1^*(\rho_1 = a)$ и $p^* = 1 - q^*$, соотвенственно. А раз ноль является барицентром меры Q_1^*, то $q^* = \frac{b}{b+|a|}$. Таким образом, показали, что двуточечное множество $\{a,b\}^N$ является носителем меры Q_N^*.

6.4. Обозначим

$$\overline{V}_t^c \triangleq \operatorname*{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N\in D_{t+1}^N}\ \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}_N\in\Re_N^c} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}_N}\left[\exp\left\{\varphi\left(S_N\right) - \sum_{i=t+1}^N \gamma_i S_{i-1}\rho_i\right\}|\mathcal{F}_t^S\right]. \tag{39}$$

Поскольку Q_N^* — "наихудшая" мера, при том мартингальная, то (39) можно переписать в виде

$$\overline{V}_t^c \triangleq \inf_{\gamma_{t+1}^N\in D_{t+1}^N} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}_N^*}\left[\exp\left\{\varphi\left(S_N\right) - \sum_{i=t+1}^N \gamma_i S_{i-1}\rho_i\right\}|\mathcal{F}_t^S\right].$$

Тогда из теорем 4 и 6 работы [3] следует, что $\left(\overline{V}^c_t, \mathcal{F}^S_t\right)_{t\in N_0}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{V}^c_t = \inf\limits_{\gamma\in D_t} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*_N}\left[\overline{V}^c_{t+1} e^{-\gamma S_t \rho_{t+1}} | \mathcal{F}^S_t\right] \\ \overline{V}^c_t|_{t=N} = e^{\varphi(S_N)}. \end{array}\right. \tag{40}$$

Согласно выводам раздела 6.3, для любого $t \in N_0$ множество $\{a, b\}$ является носителем условного распределения вероятностей $\mathsf{Q}^*_N(\cdot|\mathcal{F}^S_t)$. Рассуждения, аналогичные приведенным в разделах 5.2 и 5.3, позволяют сделать вывод, что для любого $t \in N_0$,

1) $D_t = \mathbb{R}^1$,
2) существует борелевская функция $\overline{V}^c_t(x)$ такая, что
а) $\overline{V}^c_t = \overline{V}^c_t(x)\,|_{x=S_t}$,
б) $\overline{V}^c_t(x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{V}^c_{t-1}(x) = \inf\limits_{\gamma\in\mathbb{R}^1}\left[\overline{V}^c_t(x(1+a))\, e^{\gamma x|a|} q^* + \overline{V}^c_t(x(1+b))\, e^{-\gamma x b} p^*\right] \\ \overline{V}^c_t(x)\,|_{t=N} = e^{\varphi(x)}. \end{array}\right. \tag{41}$$

Отметим, что $\left[\overline{V}^c_t(x(1+a))\, e^{\gamma x|a|} q^* + \overline{V}^c_t(x(1+b))\, e^{-\gamma x b} p^*\right]$ строго выпукла по $\gamma \in \mathbb{R}^1$. Значит, существует и единственна функция $\gamma^*_t(x)$, действующая из $N_1 \times \mathbb{R}^+$ в $\mathbb{R}^1$, такая, что

$$\inf_{\gamma\in\mathbb{R}^1}\left[\overline{V}^c_t(x(1+a))\, e^{\gamma x|a|} q^* + \overline{V}^c_t(x(1+b))\, e^{-\gamma x b} p^*\right] = \tag{42}$$

$$= \overline{V}^c_t(x(1+a))\, e^{\gamma^*_t(x) x|a|} q^* + \overline{V}^c_t(x(1+b))\, e^{-\gamma^*_t(x) x b} p^*.$$

Из (42) следует равенство

$$\gamma^*_t(x) = \frac{1}{x(b+|a|)} \ln \frac{\overline{V}^c_t(x(1+b))}{\overline{V}^c_t(x(1+a))}. \tag{43}$$

Применив к (41), (42) и (43) некоторые элементарные преобразования, легко получить, что

$$\left\{\begin{array}{l} \overline{V}^c_{t-1}(x) = \left(\overline{V}^c_t(x(1+a))\right)^{q^*}\left(\overline{V}^c_t(x(1+b))\right)^{p^*} \\ \overline{V}^c_t(x)\,|_{t=N} = e^{\varphi(x)}. \end{array}\right. \tag{44}$$

Отсюда вытекает рекуррентное соотношение

$$\left\{\begin{array}{l} \ln \overline{V}^c_{t-1}(x) = q^* \ln \overline{V}^c_t(x(1+a)) + p^* \ln \overline{V}^c_t(x(1+b)) \\ \ln \overline{V}^c_t(x)\,|_{t=N} = \varphi(x). \end{array}\right. \tag{45}$$

Легко проверить, что решение рекуррентного уравнения (45) допускает представление

$$\ln \overline{V}_t^c(x) = \sum_{i=0}^{N-t} \varphi\left(x(1+a)^i (1+b)^{N-t-i}\right) C_{N-t}^i (q^*)^i (p^*)^{N-t-i}. \qquad (46)$$

Последнее выражение совпадает с хорошо известной формулой (3) из [6] (см. стр. 744).

Формулы (43) и (46) — это явный вид количества рискового актива $\gamma_t^* = \gamma_t^*(x)|_{x=S_{t-1}}$ в любой момент $t \in N_1$.

Условие самофинансируемости (18) из [3] означает, что количество безрискового актива β_t^* в любой момент $t \in N_0$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$\begin{cases} \beta_t^* = \beta_{t-1}^* - S_{t-1}\Delta\gamma_t^*, \\ \beta_t^*|_{t=0} = \beta_0^*. \end{cases}$$

Без потери общности можно взять β_0^* равным $\ln \overline{V}_0^c$, а $\gamma_0^* = 0$. Итак, построили самофинансируемый портфель $\pi^* = (\beta_t^*, \gamma_t^*)_{t\in N_0}$. В силу теоремы 15 из [3] для любого $t \in N_0$ капитал $X_t^{\pi^*}$ портфеля $\pi^* \in SF$ допускает представление

$$X_t^{\pi^*} = \ln \overline{V}_t^c,$$

где $\ln \overline{V}_t^c = \ln \overline{V}_t^c(x)|_{x=S_t}$. Кроме того,

1) $X_t^{\pi^*}|_{t=N} = \varphi(S_N)$,

2) начальный капитал $X_0^{\pi^*} = \ln \overline{V}_0^c$,

3) $X_t^{\pi^*} = X_0^{\pi^*} + \sum\limits_{i=1}^{t} \gamma_i^* S_{i-1}\rho_i$.

Согласно теоремам 14–15 из [3] рассматриваемый $(1, S)$-рынок является "наихудшим" полным, а π^* — минимаксный хеджирующий портфель.

Литература

1. Bertsekas D.P., Shreve S.E. Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case. Academic Press, Orlando, 1978.

2. Дынкин Е. Б., Евстигнеев И. В. Регулярные условные математические ожидания соответствий // Теория вероятностей и ее применения. 1976. Том 21. Вып. 2. С. 334–347.

3. Зверев О.В., Хаметов В.М., Шелемех Е.А. Математическая модель ценообразования для европейского опциона на неполном рынке без транзакционных издержек (дискретное время). Часть I.

4. Мейер П.А. Вероятность и потенциалы. М.: МИР, 1973.

5. Rockafellar R.T. Convex Analysis. Princeton University Press, Princeton, 1997.

6. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Том 2. Теория. М: ФАЗИС, 1998.