СТРУКТУРЫ БЛИЗОСТИ И ПРОСТРАНСТВА СХОДИМОСТИ

Е. М. Беркович

Главный редактор журнала «Семь искусств»
redaktor@7iskusstv.com

Поступила 08.11.2020

В работе рассматриваются пространства сходимости, в которых за основу берутся сходящиеся последовательности, а другие топологические свойства множеств и функций выводятся из этого понятия. Предел последовательности при этом может быть неединственным. Построенные таким образом пространства обладают рядом специфических свойств, в них, в частности, известную теорему Вейерштрасса можно сформулировать как необходимое и достаточное условие существования решения экстремальной задачи. Обсуждается применение пространств сходимости в исследовании задач оптимального управления.
Ключевые слова: сходимость, счетная компактность, замкнутость, непрерывность, полунепрерывность снизу, экстремум, оптимальное управление, теорема Вейерштрасса.

УДК 517.972.4, 515.122.8, 517.977.57.
DOI: 10.31145/2224-8412-2020-21-1-5-18

В разнообразных задачах моделирования физических объектов и систем исследователь нередко сталкивается с необходимостью оценить, насколько изучаемые объекты и системы близки или похожи друг на друга. С античных времен близость точек на прямой или плоскости оценивалась расстоянием между ними. Обобщение понятия расстояния на произвольные множества позволило создать крупный раздел математики – теорию метрических (см., например, «Энциклопедический словарь расстояний» [1]), а затем и еще более общих – топологических пространств (см., например, популярное введение в общую топологию [2]). В этих пространствах исходными являются понятия метрики или топологии, т. е. категории близости, а из них уже строятся другие связанные с ними конструкции: сходящиеся последовательности, компактные, открытые и замкнутые множества, непрерывные функции и так далее. Однако не всегда такая логика построения теории адекватна рассматриваемой задаче. Есть немало прикладных задач, в которых естественнее начинать со сходящихся последовательностей, а связанные с категорией близости свойства множеств и функций выводить из них, не привлекая сюда никаких метрик или топологий.

Впервые такой подход применил французский математик Морис Фреше в работе 1906 года [3], а затем эта идея была развита Казимиром Куратовским и описана им в монографии [4]. Фреше обозначал введенные им пространства буквой $\mathscr{L}$. Куратовский, уточнив это понятие, добавил звездочку: $\mathscr{L}^*$. Нами в 1972 и 1975 годах предпринята попытка обобщить подход Куратовского, допустив неединственность предела у сходящихся последовательностей [5] и [6]. Соответствующие пространства мы обозначаем через $\mathscr{L}^+$. Общая теория пространств сходимости строится на базе понятия фильтра, введенного Анри Картаном в 1937 году [7]. Основополагающей в этом направлении следует считать работу Густава Шоке, опубликованную в томе «Анналов университета Гренобля», датированном 1947-1948 годами [8]. Обзор современного состояния этой ветви теории можно найти в работах Шимона Далецки [9] и коллектива авторов [10].

В настоящей работе мы развиваем подход работ [5] и [6] и приводим некоторые новые результаты о необходимых и достаточных условиях существования решений экстремальных задач.

Считаю приятным долгом поблагодарить доктора физико-математических наук, профессора В.М. Тихомирова, доктора технических наук, профессора Б.Т. Поляка, доктора физико-математических наук, профессора А.Б. Успенского, прочитавших первоначальный вариант статьи и сделавших ценные замечания.

Сходимость

Прежде чем мы приступим к изложению формальной части статьи, постараемся ответить на естественный вопрос: зачем вводить новую математическую структуру, когда давно имеются изученные с разных сторон метрические и топологические пространства, в которых вполне уютно себя чувствуют сходящиеся последовательности и все другие связанные с ними свойства множеств и функций? На этот вопрос есть, по меньшей мере, два ответа. Во-первых, с чисто математической точки зрения развитие новой структуры – пространства сходимости – сулит много изящных и неожиданных результатов. В таких пространствах все функции могут оказаться непрерывными, а все последовательности – сходящимися. Здесь легко дать необходимое и достаточное условие существования экстремума и многое другое. Второй ответ связан с практическими приложениями, где новая структура смотрится более адекватной, чем старые.

Приведем простой пример: конструирование некоторой сложной системы, характеризующейся большим набором разнообразных технических параметров. Сравнивать близость различных конструкторских решений, опираясь только на эти параметры, малоперспективно. Трудно задать адекватную метрику на пространстве всех возможных решений, даже если каждый параметр решения задается конкретным числом. Поэтому сложно понять, в каком смысле некоторая последовательность конструкторских решений «сходится» к «оптимальному». Но можно пойти в другом направлении и определить последовательность решений сходящейся к какому-то «терминальному» решению, если последовательность значений критерия качества решений сходится, тогда задача приобретает смысл. Правда, предел некоторой последовательности решений, понимаемый в указанном смысле, перестает быть единственным. Ведь одно и то же значение критерия качества можно достичь на разных технических решениях. Так мы приходим к идее «пространств сходимости», в которых предел последовательностей может быть неединственным.

Мы будем обозначать введенные нами пространства $\mathscr{L}^+$, изначально допуская неединственность предела сходящейся последовательности. Приведем точное определение.

Определение. Пусть X – произвольное множество. Скажем, что оно является *пространством сходимости*, если среди всех последовательностей элементов множества X выделен класс так называемых *сходящихся последовательностей*, каждой из которых поставлено в соответствие непустое подмножество X, называемое *множеством ее пределов* (говорят также, что последовательность *сходится* к каждому элементу этого множества), причем выполнены следующие условия:

1) Если последовательность $\{x_n\}$, начиная с некоторого номера n_0, стационарна: $x_n = x_0$ при $n > n_0$[1], то она сходится, причем x_0 принадлежит множеству ее пределов.

2) Любая подпоследовательность сходящейся последовательности тоже сходится, причем множество пределов последовательности содержится в множестве пределов подпоследовательности.

3) Если последовательность не сходится к некоторому элементу множества X, то найдется такая ее подпоследовательность, никакая подпоследовательность которой не сходится к этому элементу.

---

[1] Такие последовательности будем называть квазистационарными.

Множество пределов последовательности $\{x_n\}$ будем обозначать выражением $LIMx_n$. Если x_0 – один из пределов последовательности $\{x_n\}$, то будем, как обычно, обозначать это так: $x_n \to x_0$.

В пространствах $\mathscr{L}^*$ Куратовского справедливы те же условия, но постулируется единственность предела каждой сходящейся последовательности [4 стр. 197]. Наше определение снимает это ограничение.

Сформулированные требования могут показаться непривычными, если сравнивать со сходящимися последовательностями в метрических или $\mathscr{L}^*$-пространствах. Там предел сходящейся последовательности единствен. И любая подпоследовательность сходящейся последовательности тоже сходится к тому же пределу, т. е. множества пределов последовательности и любой ее подпоследовательности совпадают – они состоят из одного и того же элемента.

Если последовательности составлены из элементов конечного множества X, то в метрических и $\mathscr{L}^*$-пространствах сходящимися могут быть только квазистационарные последовательности. В самом деле, предположим, что есть еще одна сходящаяся последовательность, в которой два элемента множества X встречаются бесконечное число раз. Если эта последовательность сходится к некоторому пределу, то к нему должна сходиться любая подпоследовательность. У рассматриваемой последовательности есть две стационарные подпоследовательности, каждая составленная из своего элемента множества X. К ним подпоследовательности и сходятся. Следовательно, у рассматриваемой последовательности минимум два предела. А этого быть не может. Следовательно, утверждение доказано.

В $\mathscr{L}^+$-пространствах положение другое. В них может быть случай, когда все последовательности, составленные из элементов конечного множества X, сходятся. Для этого достаточно назвать пределом любой последовательности произвольный элемент множества X. В этом случае несходящихся последовательностей просто нет, поэтому третье условие определения структуры сходимости выполняется автоматически, а первые два условия проверяются элементарно. Можно привести и другие примеры.

Рассмотренная структура в общем случае называется структурой тривиальной сходимости, или *тривиальной $\mathscr{L}^+$-структурой*.

Определение. *Структура тривиальной сходимости* на множестве X предполагает, что любая последовательность $\{x_n\} \subset X$ сходится, причем множество ее пределов совпадает со всем пространством: $LIMx_n = X$.

Очевидно, что в тривиальной структуре самое большое количество сходящихся последовательностей, которые можно построить из элементов заданного множества: ведь несходящихся последовательностей в ней вообще нет. Если ввести сравнение структур сходимости, как это сделано в нижеследующем определении, то тривиальная $\mathscr{L}^+$-структура – *самая слабая* из всех возможных структур сходимости на множестве X.

Определение. Пусть на множестве X заданы две $\mathscr{L}^+$-структуры τ и σ. Будем говорить, что структура сходимости τ *сильнее* структуры сходимости σ (или σ *слабее* τ), если каждый предел произвольной последовательности в смысле структуры τ (сокращенно τ-*предел*) является одновременно и σ-пределом. Другими словами, справедливо включение: $\tau\text{-LIM}x_n \subset \sigma\text{-LIM}x_n$.

Образно можно сказать, что сильносходящихся последовательностей *меньше*, чем слабосходящихся.

На шкале всех структур сходимости, определенных на заданном множестве X, тривиальная структура занимает один полюс – она самая слабая. А другой полюс представляет *самая сильная* структура, так называемая *структура дискретной сходимости*. В ней сходящимися являются только квазистационарные последовательности, причем сходятся они к тому элементу, из которого, начиная с некоторого номера, состоят. Первые два условия структуры сходимости очевидны. Покажем, что выполнено третье условие. Пусть последовательность $\{x_n\}$ не сходится к некоторому элементу $x_0 \in X$. Удалим из этой последовательности все элементы x_0, если они в ней присутствуют. Тогда должно остаться бесконечное число членов, иначе бы последовательность $\{x_n\}$ считалась бы квазистационарной и, по определению, сходилась бы к x_0. Никакая подпоследовательность оставшейся подпоследовательности не может сходиться к x_0, так как в ней нет ни одной квазистационарной подпоследовательности, состоящей из этого элемента. Таким образом, дискретная структура сходимости действительно определяет $\mathscr{L}^+$-пространство. Если x_0 – предел некоторой последовательности $\{x_n\}$ в смысле дискретной сходимости, то этот же элемент будет пределом и в смысле любой более слабой сходимости.

Отметим, что даже $\mathscr{L}^*$-пространство может не быть топологическим [4 стр. 199]. Тем более и $\mathscr{L}^+$-пространства не сводятся к топологическим.

А теперь рассмотрим, как в $\mathscr{L}^+$-пространствах вводится понятие непрерывности функций.

Непрерывность

Пусть заданы два $\mathscr{L}^+$-пространства X и Y и определена функция $f{:}X \to Y$. Обозначим через τ и σ структуры сходимости на множествах X и Y соответственно.

Определение. Функция f называется *непрерывной* относительно структур τ и σ (или τ,σ-*непрерывной*), если для любой сходящейся последовательности $\{x_n\} \subset X$ справедливо включение $f(\text{LIM}x_n) \subset \text{LIM}f(x_n)$.

Другими словами, из того, что элемент x_0 является одним из пределов последовательности $\{x_n\} \subset X$, следует, что $f(x_0)$ является одним из пределов последовательности $\{f(x_n)\} \subset Y$.

Непрерывность функции зависит от выбора структур сходимости на областях ее определения и значений. Если на множестве X задана структура дискретной сходимости, то любая функция, заданная на этом множестве, будет непрерывной независимо от структуры сходимости на множестве Y. В самом деле, для дискретной сходимости τ утверждение, что x_0 является одним из пределов последовательности $\{x_n\}\subset X$, означает, что $\{x_n\}$ – квазистационарная последовательность, состоящая, начиная с некоторого номера, из элемента x_0. Но тогда и последовательность $\{f(x_n)\}$ оказывается квазистационарной, и $f(x_0)$ является одним из ее пределов.

Справедливо и симметричное утверждение. Если структура сходимости σ на множестве Y значений функции тривиальная, то любая функция $f:X\to Y$ становится непрерывной независимо от структуры сходимости на множестве X. В самом деле, в силу тривиальности структуры сходимости на множестве Y последовательность $\{f(x_n)\}\subset Y$ становится сходящейся, как и любая другая последовательность из Y, причем пределом ее является любой элемент множества Y, в том числе и $f(x_0)$, где x_0 – один из пределов произвольной последовательности $\{x_n\}\subset X$. Что и требовалось доказать.

Если на множестве X заданы две структуры сходимости τ_1 и τ_2, причем τ_1 сильнее, чем τ_2, то из слабой непрерывности функции $f:X\to Y$, т.е. из τ_2-непрерывности, следует ее сильная непрерывность, т.е. τ_1-непрерывность. В самом деле, пусть произвольная последовательность $\{x_n\}\subset X$ сходится к элементу x_0 в смысле структуры τ_1. В силу определения сильной и слабой сходимостей элемент x_0 является пределом последовательности $\{x_n\}$ и в силу более слабой структуры сходимости τ_2. А в силу слабой непрерывности функции f последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к элементу $f(x_0)$, поэтому функция f непрерывна и в отношении более сильной структуры τ_1.

Симметричные рассуждения справедливы и для пространства Y. Пусть на нем заданы две структуры сходимости σ_1 и σ_2, причем σ_1 слабее чем σ_2. Тогда из сильной непрерывности функции f следует ее слабая непрерывность. Действительно, пусть x_0 – предел последовательности $\{x_n\}$, тогда из σ_2-непрерывности функции f следует, что $f(x_0)$ есть σ_2-предел последовательности $\{f(x_n)\}$. Тогда и подавно $f(x_0)$ есть предел последовательности $\{f(x_n)\}$ в смысле более слабой сходимости σ_1, т.е. функция f – σ_1-непрерывна.

Сказанное можно выразить такими словами: с усилением структуры сходимости на множестве X и ослаблением структуры сходимости на множестве Y непрерывных функций $f:X\to Y$ становится больше (условия непрерывности ослабляются).

Если зафиксировать структуру сходимости σ на множестве Y, то можно поставить задачу: найти самую слабую структуру сходимости τ на множестве X, при которой функция $f:X\to Y$ остается непрерывной. Такой структурой является следующая. Последовательность $\{x_n\}\subset X$ сходится к элементу x_0 в смысле структуры τ тогда и только тогда, когда последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$ в смысле структуры σ. Иногда говорят о «*сходимости* *по функционалу*» и обозначают эту структуру так: $\tau=f^{-1}(\sigma)$. Легко проверить, что так определенная структура действительно определяет $\mathscr{L}^+$-структуру сходимости. В самом деле, рассмотрим произвольную квазистационарную последовательность $\{x_n\}\subset X$, состоящую, начиная с некоторого номера, из элемента x_0. Тогда последовательность $\{f(x_n)\}$ тоже будет квазистационарной и состоять из элемента $f(x_0)$, начиная с того же номера. Тогда последовательность $\{f(x_n)\}$ должна сходиться к этому элементу в смысле структуры σ. Это означает, что $\{x_n\}$ сходится к x_0 в смысле структуры τ. Т.е. выполнено первое условие в определении структуры сходимости. Второе условие тоже легко проверяется. Если последовательность $\{x_n\}\subset X$ сходится к элементу x_0 в смысле структуры τ, то последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x_0)$ в смысле структуры σ. Любой подпоследовательности последовательности $\{x_n\}$ соответствует подпоследовательность последовательности $\{f(x_n)\}$, которая обязана сходиться к $f(x_0)$ в смысле структуры σ. Это означает, что выбранная подпоследовательность сходится к x_0 в смысле структуры τ. Т. е. второе условие структуры сходимости выполнено. Рассмотрим третье условие. Пусть последовательность $\{x_n\}\subset X$ не сходится к элементу x_0. Это означает, что последовательность $\{f(x_n)\}$ не сходится к $f(x_0)$. Тогда существует ее подпоследовательность, никакая подпоследовательность которой не сходится к $f(x_0)$. Соответствующая подпоследовательность последовательности $\{x_n\}$ и будет обладать нужным для третьего условия свойством.

Точно так же, как в метрических пространствах, вводится понятие полунепрерывных снизу функций.

Определение. Пусть в $\mathscr{L}^+$-пространстве X задана вещественная функция $f:X\to\mathbb{R}$. Она называется полунепрерывной снизу в точке $x_0\in X$, если для любой последовательности $\{x_n\}\subset X$, сходящейся к x_0, справедливо неравенство $f(x_0)\leq\underline{\lim}f(x_n)$.

Очевидно, что непрерывная в точке x_0 функция будет и полунепрерывной в этой точке, а обратное верно не всегда.

Замкнутость и счетная компактность

В топологических пространствах понятия открытых и замкнутых множеств являются первичными, и из них строится понятие сходимости последовательностей. Здесь мы идем встречным путем – опираясь на структуру сходимости строим открытые и замкнутые множества.

Определение. Пусть X – $\mathscr{L}^+$-пространство со структурой сходимости τ. Множество $U\subset X$ называется *замкнутым* относительно структуры τ (или τ-замкнутым), если для любой последовательности $\{x_n\}\subset U$ справедливо включение $\mathrm{LIM}x_n\subset U$.

Если последовательность не сходится, то множество ее пределов пусто, и включение автоматически выполняется. А если последовательность сходится, то любой ее предел должен принадлежать множеству U, в котором лежит вся последовательность.

Открытым множеством называют дополнение замкнутого множества.

Следующее определение задает еще одно свойство подмножеств пространств сходимости.

Определение. Множество $U \subset X$ называется *счетно-компактным* относительно структуры τ (или τ-счетно-компактным), если для любой последовательности $\{x_n\} \subset U$ существует ее сходящаяся подпоследовательность, хотя бы один предел которой принадлежит множеству U.

Можно сказать и так: пересечение множества пределов подпоследовательности с множеством U непусто.

Теорема. Любое замкнутое подмножество $U \subset X$ счетно-компактного пространства X счетно-компактно.

Для доказательства рассмотрим произвольную последовательность $\{x_n\} \subset U$. Так как пространство X счетно-компактно, то существует ее сходящаяся подпоследовательность. В силу замкнутости множества U все пределы этой подпоследовательности принадлежат U, т. е. множество U счетно-компактно.

В метрических и $\mathscr{L}^*$-пространствах с единственным пределом справедливо и обратное утверждение: счетно-компактное подмножество произвольного пространства замкнуто [4 стр. 203]. В $\mathscr{L}^+$-пространствах это не так.

Рассмотрим множество из двух элементов $X=\{a,b\}$, в котором структура сходимости тривиальна: любая последовательность сходится ко всему пространству X. Рассмотрим множество U, состоящее из одного элемента a. Очевидно, что это множество счетно-компактно: любая подпоследовательность стационарной последовательности тоже стационарна, причем один из ее пределов лежит в том же множестве – это элемент a. Но множество U не замкнуто: пределы стационарной последовательности, состоящей из элемента a, не лежат все в этом множестве: элемент b есть предел, но не принадлежит U.

Этот простой пример можно обобщить. Легко видеть, что в пространствах с тривиальной сходимостью любое непустое множество счетно-компактно, но замкнутым является только все пространство.

А на другом полюсе структур сходимости – в дискретной сходимости – замкнуто любое подмножество пространства, но счетно-компактны только конечные подмножества. В самом деле, если в множестве бесконечное число элементов, то можно построить последовательность, состоящую из различных элементов, а в ней не может быть квазистационарных подпоследовательностей, которые только и могут сходиться.

Теперь рассмотрим, как влияют усиление или ослабление структуры сходимости на свойства замкнутости и счетной компактности множеств. Так как из сильной сходимости следует слабая сходимость последовательностей, то из сильной счетной компактности множества следует его слабая счетная компактность. Другими словами, с усилением сходимости счетно-компактных множеств становится меньше.

Иначе реагирует на усиление сходимости замкнутость множеств. Если множество слабо замкнуто, то все слабые пределы любой его последовательности принадлежат этому множеству, а так как каждый сильный предел последовательности является одновременно ее слабым пределом, то и все сильные пределы тоже лежат в том же множестве. Значит, если множество слабо замкнуто, то оно и сильно замкнуто. Иначе говоря, с усилением сходимости замкнутых множеств становится больше.

Оптимизация

Рассмотрим $\mathscr{L}^+$-пространство X, на котором задано множество $U\subset X$ и вещественная функция (иногда говорят функционал) $f:X\to\mathbb{R}$. Мы хотим найти минимум функции f на множестве U, что сводится к двум задачам: поиску *оптимального значения функционала*, т.е. числа $f^*=\inf f(x)$, $x\in U$, и поиску *оптимального решения*, т.е. элемента $x^*\in U$, для которого $f(x^*)=f^*$. Здесь через $\inf f(x)$, $x\in U$ обозначена точная нижняя грань f на множестве U.

Достаточное условие существования оптимального решения дает известная

Теорема (Вейерштрасса). Пусть множество U счетно-компактно, а функция f полунепрерывна снизу. Тогда оптимальное решение задачи оптимизации существует.

Доказательство, по сути, такое же, как для метрических пространств. По определению точной нижней грани существует так называемая минимизирующая последовательность $\{x_n\}\subset U$, для которой $f(x_n)\to f^*$. В силу счетной компактности множества U найдется ее подпоследовательность $\{y_n\}$, сходящаяся к элементу $x^*\in U$. Из полунепрерывности снизу функции f следует неравенство $f(x^*)\leq\underline{\lim} f(y_n)$. Так как последовательность $f(x_n)$ сходится к числу f^*, то к этому же числу сходится любая ее подпоследовательность, в частности, $\{f(y_n)\}$. Поэтому $\underline{\lim} f(y_n)=\lim f(y_n)=f^*$. А так как $f(x^*)$ не может быть меньше точной нижней грани f^*, то $f(x^*)= f^*$. Другими словами, x^* есть искомое оптимальное решение рассматриваемой задачи оптимизации. Теорема доказана.

Наверно, можно и не повторять, что непрерывная функция автоматически является полунепрерывной снизу, поэтому в теореме Вейерштрасса можно было бы условие полунепрерывности снизу заменить на непрерывность.

Условие счетной компактности множества U в теореме Вейерштрасса можно немного ослабить и говорить не о свойствах всего множества, а только о свойствах минимизирующих последовательностей. Справедлива такая модификация теоремы Вейерштрасса.

Теорема. Пусть функция f полунепрерывна снизу и каждая минимизирующая последовательность имеет подпоследовательность, сходящуюся к элементу множества U. Тогда существует оптимальное решение исходной задачи оптимизации.

Оказывается, условия этой теоремы являются не только достаточными для существования оптимального решения, но и в некотором роде необходимыми.

Теорема (необходимое и достаточное условие). Для существования оптимального решения задачи оптимизации необходимо и достаточно, чтобы на множестве X существовала такая структура сходимости, относительно которой функция f полунепрерывна снизу и каждая минимизирующая последовательность имеет подпоследовательность, сходящуюся к элементу множества U.

Достаточность условий вытекает из приведенной выше модифицированной теоремы Вейерштрасса. Докажем, что сформулированные условия необходимы. Пусть $x^*\in U$ – оптимальное решение задачи оптимизации. Обозначим через σ структуру обычной сходимости числовых последовательностей в пространстве вещественных чисел. Тогда искомой структурой сходимости в пространстве X будет «сходимость по функционалу», т.е. $\tau=f^{-1}(\sigma)$. Мы уже убедились, что это действительно $\mathscr{L}^+$-структура. Функция f становится в этой структуре непрерывной. А каждая минимизирующая последовательность сходится к элементу x^*. Так же будет сходиться и каждая подпоследовательность минимизирующей последовательности. Теорема доказана.

Стоит напомнить, что с усилением структуры сходимости на множестве X требования к непрерывности функции ослабевают, а требование существования у каждой последовательности сходящейся подпоследовательности, наоборот, усиливается. Когда решается вопрос о существовании оптимального решения конкретной задачи оптимизации, следует выбирать структуру сходимости, учитывая ее влияние на условия теоремы Вейерштрасса.

Оптимальное управление

Рассмотрим простой модельный пример задачи оптимального управления. Представим себе тележку единичной массы, которая может двигаться по прямым рельсам. Положение тележки в каждый момент времени описывается координатой $s_1(t)$. На тележку действует сила u(t), которая может быть положительной или отрицательной в зависимости от направления ее действия. Величина приложенной силы ограничена по модулю некоторым числом, которое мы выберем за единицу измерения. В начальный момент t=0 тележка покоится в начале координат. Фиксирован некоторый достаточно большой максимальный промежуток времени $[0,T_{max}]$, на котором определены рассматриваемые ниже функции. Требуется как можно скорее перевести тележку в точку с координатой a так, чтобы тележка в ней остановилась.

Попробуем формализовать задачу, дать ее математическую формулировку. Управлением здесь является приложенная к тележке сила, т.е. функция $u(t)$, $0\leq t\leq T$, ограниченная по величине: $|u(t)| \leq 1$, $0\leq t\leq T$ (здесь и ниже $T\in[0,T_{max}]$). Обозначим множество всех достаточно гладких (например, непрерывных) функций через E. Каждому управлению $u\in E$ соответствует траектория тележки, которую можно найти из Второго закона Ньютона $F=ma$, где сила F – это управление $u(t)$, $0\leq t\leq T$, а ускорение *a* – это вторая производная от координаты тележки. Если через s_1 обозначить координату тележки, а через s_2 – ее скорость, задача определения траектории сводится к простой системе дифференциальных уравнений: $\dot{s}_1(t)=s_2(t)$, $\dot{s}_2(t)=u(t)$, $0\leq t\leq T$. Состояние тележки в каждый момент времени t задается двумерным вектором $s(t)=(s_1(t), s_2(t))$. Начальное положение тележки задается равенствами $s_1(0)=0$; $s_2(0)=0$.

Обозначим через D пространство всех таких двумерных функций на отрезке $0\leq t\leq T$. Из теории дифференциальных уравнений следует, что каждому управлению $u\in E$ соответствует траектория $s\in D$.

Конечное положение определяется такими условиями: $s_1(T)=a$; $s_2(T)=0$. Требуется выбрать такую функцию $u(t)$, $0\leq t\leq T$, которая обеспечивает минимальное значение T среди всех возможных. Это так называемая *задача оптимального быстродействия*.

В этом простом примере мы имеем все составные части общей постановки *задачи оптимального управления*. Во-первых, определено множество E всех возможных управлений (множество всех непрерывных функций) и множество D всех возможных траекторий (множество двумерных вектор-функций). Между управлениями и траекториями установлено отношение $S:E\rightarrow D$, ставящее каждому управлению $u\in E$ траекторию $s=S(u)\in D$. В нашем случае такое отношение задается системой дифференциальных уравнений с начальными условиями. На управление наложены явные ограничения, т. е. выделено подмножество U множества E. В нашем случае это подмножество задается неравенством $|u(t)| \leq 1$, $0\leq t\leq T$. Кроме того, есть ограничения на траектории, т. е. в множестве D задано подмножество $H\subset D$, в котором должны лежать допустимые траектории. В рассматриваемом примере это ограничение на траектории $s(t)=(s_1(t), s_2(t))$ выглядит так: $s_1(T)=a$; $s_2(T)=0$. И наконец, задан функционал $f(u)=T$, т.е. время достижения тележкой заданного конечного состояния. В общем случае функционал может явно зависеть и от траектории, и от управления: $f(u)=G(S(u), u)$, где $G(s, u)$ – вещественная функция, определенная на произведении пространств E и D.

Говоря короче, задача оптимального управления в общем случае выглядит так:

минимизировать функционал $f(u)=G(S(u), u)$ при ограничениях:
$u \in U \subset E$
$S(u) \in H \subset D$

Мы не собираемся здесь решать или детально исследовать задачу оптимального управления ни в общем виде, ни для модельного примера. Приведем только теорему Вейерштрасса, адаптированную к этому случаю.

Теорема (Вейерштрасса). Пусть на множествах E и D заданы структуры сходимости τ и σ соответственно. Пусть множество $U \subset E$ τ-счетно-компактно, множество $H \subset D$ σ-замкнуто, отображение $S: E \to D$ (τ,σ)-непрерывно, функция $G(s,u)$ (τ,σ)-полунепрерывна снизу в каждой точке $s \in H$ и $u \in U$. Тогда в рассматриваемой общей задаче оптимального управления существует оптимальное решение.

В самом деле, нетрудно убедиться, что выполнены условия общей теоремы Вейерштрасса из предыдущего раздела. Функция $f(u)=G(S(u), u)$ является τ-полунепрерывной снизу в каждой точке $u \in U$. Множество $U_1=S^{-1}(H)$ τ-замкнуто, следовательно, пересечение $U_0=U_1 \cap U$ τ-счетно-компактно. Следовательно, оптимальное решение задачи минимизации функции $f(u)$ на множестве U_0 существует, что и требовалось доказать.

Отметим, что в задачах оптимального управления особенно наглядны преимущество пространств сходимости перед традиционными структурами близости типа метрики, нормы, скалярного произведения и т. п. В самом деле, оценка близости двух управлений, т. е. функций, заданных на отрезке $0 \le t \le T$, по этим традиционным структурам, мало говорит о близости соответствующих траекторий. А в ряде задач естественнее было бы сравнивать управления именно с точки зрения свойств их траекторий.

Например, та же тележка может попасть в конечное состояние $s_1(T)=b$; $s_2(T)=0$ под действием совершенно непохожих сил: постоянной, скачкообразной (сначала толкать в одну сторону, потом в другую) и т. д. По сути задачи нужно сравнивать именно траектории, а не управления, т. е. судить об управлениях именно по вызываемым ими движениям. Тогда взятая за основу структура сходимости «по траекториям», аналогичная рассмотренной выше сходимости «по функционалу», может привести не только к более простому выводу известных результатов, но и к получению результатов новых. Примером может служить исследование зависимости решений экстремальных задач от параметра и др. [5], [6]

Литература

1. *Деза, Елена и Деза, Мишель Мари*. Энциклопедический словарь расстояний // Наука, М., 2008, 445 стр.
2. *Келли, Джон Л.* Общая топология. Перевод с английского А.В. Архангельского // Наука, М., 1968, 384 стр.
3. *Fréchet, Maurice.* Sur quelques points du calcul fonctionnel // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1906, **22**, 1–72.
4. *Куратовский, Казимир*. Топология. Том 1. Перевод М.Я. Антоновского. С предисловием П.С. Александрова // Мир, М., 1966, 595 стр.
5. *Беркович, Евгений*. О существовании оптимальных решений для одного класса двухэтапных стохастических экстремальных задач // В сборнике: Приближенные методы решения задач оптимального управления и некоторых некорректных обратных задач, МГУ, М., 1972, 17-41.
6. *Беркович, Евгений*. О существовании оптимальных решений одной многоэтапной стохастической экстремальной задачи // Вестник Московского университета. Серия «Математика, механика», 1975, (4), 19-25.
7. *Cartan, Hanri*. Théorie des Filtres // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences. Paris, 1937, **205**, 595-598.
8. *Choquet, Gustav*. Convergences // Annales de l'université de Grenoble, Sect. Sci. Math. Phys. (N.S.). 1947-1948 г., **23**, 57–112.
9. *Dolecki, Szymon*. An initiation into convergence theory // In book: Frédéric Mynard and Elliott Pearl, editors. Beyond Topology. Contemporary Mathematics Series A.M.S., 2009, **486**, 115-162.
10. *Bentley, H.L., Herrlich, H. и Lowen-Colenbunders, E*. Convergence // Journal of Pure and Applied Algebra. 1990, **68** (1–2), 27-45.

PROXIMITY STRUCTURES AND CONVERGENCE SPACES

E. M. Berkovich

redaktor@7iskusstv.com

Received 08.11.2020

The paper considers convergence spaces, in which converging sequences are taken as a basis, and other topological properties of sets and functions are derived from this concept. In this case, the limit of the sequence may not be unique. The spaces constructed in this way have a number of specific properties, in which, in particular, the well-known Weierstrass theorem can be formulated as a necessary and sufficient condition for the existence of a solution to an extremal problem. The use of convergence spaces in the study of optimal control problems is discussed.

Keywords: convergence, countable compactness, closedness, continuity, lower semicontinuity, extremum, optimal control, Weierstrass theorem.