ИЗУЧЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИИ В ОБЛАСТЯХ СО СЛОЖНОЙ ГЕОМЕТРИЕЙ (ОДНОРОДНАЯ И БЛОЧНАЯ СРЕДЫ)

И.А. Лазичный

Московский физико-технический институт
E-mail: ivanlazichny@gmail.com

Поступила 11.03.2022

Цель данной работы заключается в изучении распределения плотности кинетической энергии в областях со сложной геометрией (однородная и блочная среды). В работе смоделирована математическая модель распространения упругих волн, которая представляет собой начально-краевую задачу для системы уравнений упругой динамики с наличием в области интегрирования внутренних границ. Проведены серии вычислительных экспериментов, в ходе которых были исследованы распределения плотности кинетической энергии в областях со сложной геометрией и различной частотой работы виброисточника при его продолжительной работе. В ходе проведения работы использовались такие методы исследования, как анализ, синтез, описание, обобщение и эксперимент. В результате проведенной работы сделан вывод о том, что модель применима для проведения содержательных экспериментов по исследованию распространения упругих волн в средах со сложной геометрией, внутренними границами и разными условиями сопряжения. Алгоритм показал высокую точность и скорость.
Ключевые слова: кинетическая энергия, задача римана, однородная среда, бблочная среда, плотность, упругие волны, геометрия.

DOI: 10.31145/2224-8412-2022-22-1-81-88

Многие прикладные задачи сводятся к исследованию особенностей распространения упругих волн от постоянно действующего или действующего длительного время вибрационного источника, в сильно неоднородной среде, среде с внутренними границами, на которых реализуются различные условия сопряжения, отражающие различные физические условия на этих границах, в среде со сложной геометрией внутренних и внешних границ. При этом нередко необходимо рассматривать ситуации, когда размер виброисточника мал в сравнении с характерными размерами моделируемого явления и его (источник) целесообразно рассматривать как точечный. Исследование методами математического моделирования таких задач накладывает особые требования на используемый численный алгоритм решения начально-краевых задач. А именно, полученное решение начально краевой задачи должно соответствовать условиям сопряжения на внутренних границах и граничным условиям на внешних границах.

Так как предполагается моделирование на длительные периоды времени работы источника, численная модель должна допускать реализацию неотражающих граничных условий. В противном случае, искусственные волны, отраженные от внешних границ, радикально исказят реальную картину волнового поля.

Численный алгоритм должен допускать обращение к точечным источникам. Традиционное решение проблемы малых по сравнению с характерными размерами задачи источников, состоящее в сгущении сетки в месте расположения источника, приводит в силу условий Куранта к неоправданному уменьшению расчетного шага по времени и, как следствие, к значительному увеличению общего времени расчета.

Поскольку предполагается исследование интерференции волн от разных источников и отраженных от различных, сложно устроенных внутренних и внешних границ, численный алгоритм должен иметь высокую точность и в тоже время быть достаточно быстрым, допускать эффективное распараллеливание.

В рамках выполнения данной работы была построена модель, которая основывается на необходимости нахождения решения задачи Коши для систем дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами, в рамках которого исходные данные являются непрерывными на всем исследуемом промежутке, но могут терпеть разрывы по некоторым гиперплоскостям. Вид задачи Коши, в соответствие с [1], имеет вид

$$\frac{\delta u(t,x)}{\delta t} + \sum_i^N A_i \frac{\delta u(t,x)}{\delta x_i} = 0, x \in R^N. \tag{1}$$

Данный вид задачи на практике чаще всего называется обобщенной задачей Римана с условиями на границе сопряжения [1]. Решение подобного рода задач, в зависимости от различных условий на границе, применяется для построения численных алгоритмов, которые используются для определения приближенных решений качально краевой задачи для гиперболических систем линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами [2].

Окончательный вид системы уравнений, являющихся решением данной задачи для исходных данных, являющихся непрерывными, кроме одной гиперплоскости, и для которых выполняется условие сопряжение с каждой из сторон такой гиперплоскости, можно записать в виде [3]

$$\begin{cases} l_{k1} \frac{\delta u}{\delta t}(t,x) = -l_{k1} \sum \quad C_k \frac{\delta u}{\delta L_k(t,x)} \\ B \frac{\delta u}{\delta t}(t,x) = \frac{\delta b}{\delta t}(t) \end{cases}. \tag{2}$$

Используя выражение (2) и, подставляя в него определенные начальные условия для выбранной среды, становится возможным произвести необходимые вычисления для решения определенных задач. В рамках данной работы для этого применялся пакет Mathlab.

В рамках первого эксперимента рассматривалась однородная прямоугольная среда с координатами (-50, 0) и (50, -50) — левый верхний угол и правый нижний, соответственно. В точке с координатами (0, 0) был установлен периодический точечный источник вибрации. Сила воздействия данного источника направлена вертикально вниз и изменяется по закону A·sinωt, где A и ω являются амплитудой и частотой источника, соответственно. В данном эксперименте было исследовано распространение упругого возмущения точечного источника при разных частотах и амплитудах. На поверхности области задавались свободные граничные условия. На рисунке 1 и 2 приведены графики распределения плотности кинетической энергии упругой волны при частоте работе источника ω = 50 Гц в различные временные моменты.

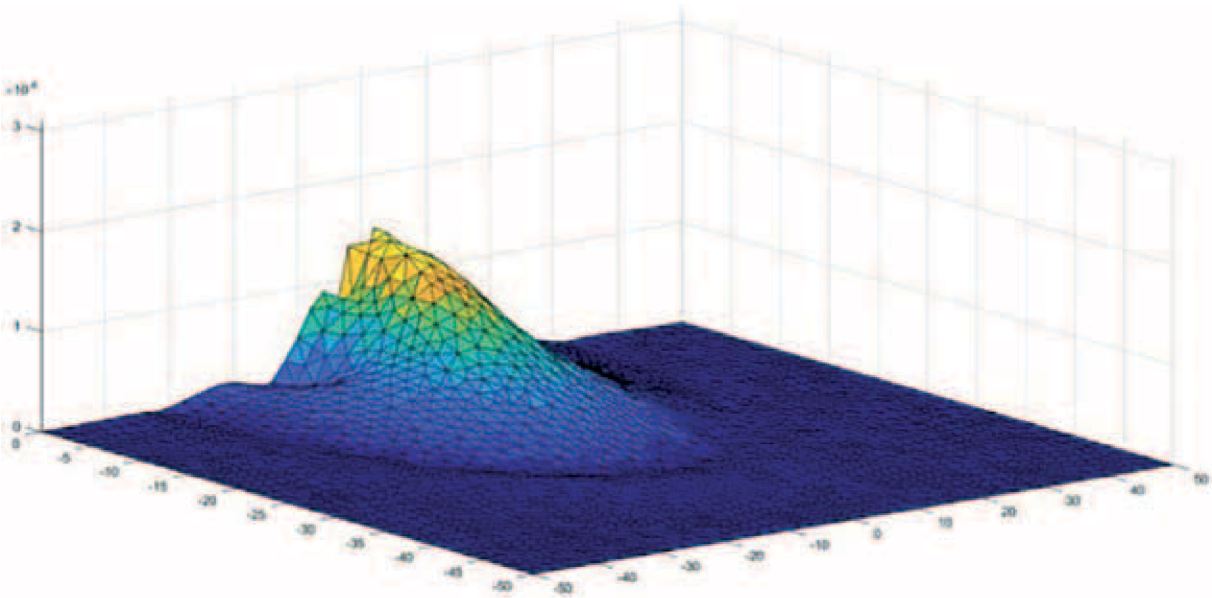

Рис. 1. Распределение плотности кинетической энергии в момент времени t = 0,05 с.

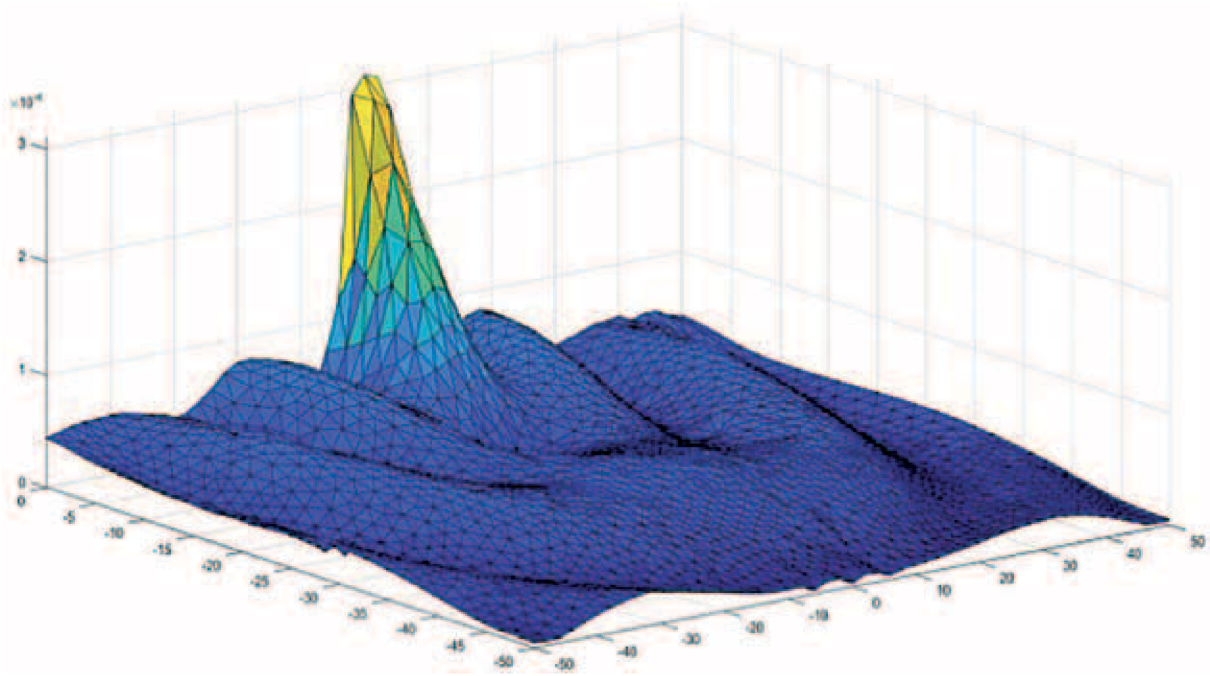

Рис. 2. Распределение плотности кинетической энергии в момент времени t = 0,45 с.

Из распределения плотности кинетической энергии можно с уверенностью сказать, что данная вычислительная модель позволяет смоделировать распространения волн от точечного источника верно: корректно реализованы прозрачные граничные условия, упругие волны проходят через границы области без отражений. Модель способна работать с точечным источником.

В следующей серии вычислительных экспериментов исследовалось распространение упругих волн в блочной среде при наличии внутренних границ со следующими условиями сопряжения на данных границах:

— условие «полного слипания»;

— условие «проскальзывания».

Была смоделирована ситуация, в которой упругие волны распространялись в блочно-трещиноватой среде, которая имеет размеры 600 м по вертикали и 60 м по горизонтали. Внутри этой области имеются внешние и внутренние вертикальные границы, разделяющие область на блоки. На поверхности установлен точечный периодический источник вибрации, сила воздействия которого направлена вертикально вниз. Работает данный источник по тому же закону, который был описан в предыдущем вычислительном эксперименте. На поверхности области были сформированы те же условия, как и в предыдущем вычислительном эксперименте. На рисунке 3 показаны результаты численных экспериментов по изучению распределения плотности кинетической энергии в блочно-трещиноватой среде при реализации на внутренних границах условия «полного слипания».

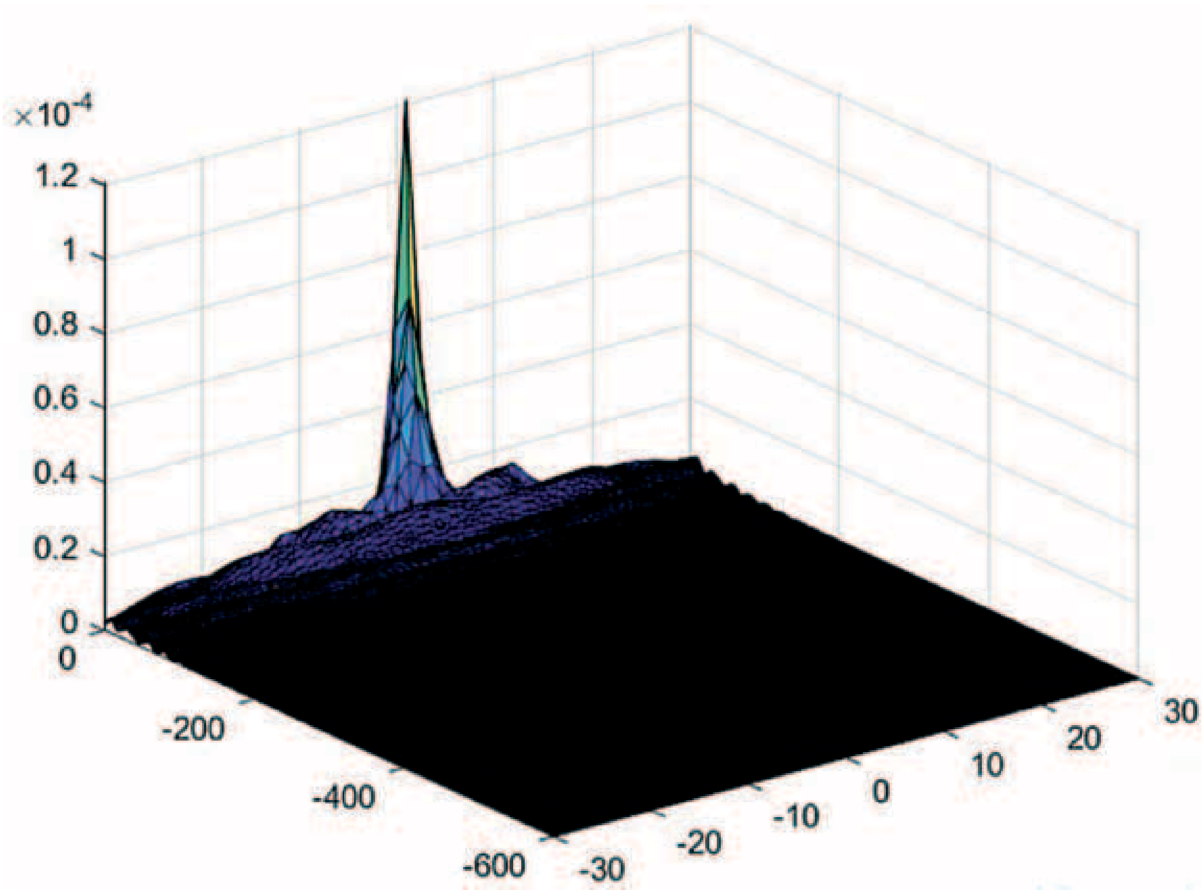

Рис. 3. Распределение плотности кинетической энергии в момент времени t = 0,4 с.

Как видно, возмущение, созданное виброисточником, распространяется во всех направлениях. Волны от источника почти без потери амплитуды пересекают внутренние границы области, на глубинах порядка 600 метров плотность энергии упругого возмущения имеет место после того, как спустя некоторое время процесс устанавливается.

В случае, когда скорость распространения волн в центральной области была выше, чем в крайних, то наблюдалась качественно иная картина распространения волн. По среднему каналу бежит волна, которая проникает в соседние области. Существенная часть энергии упругой волны распространяется по среднему каналу, однако упругая волна проникает и в соседние области.

В случае, когда скорость распространения волн в центральной области была ниже, чем в крайних, то отмечалось отсутствие движения волны внутри среднего канала области. Почти вся волна движется вдоль границы, а в глубину проникает пренебрежимо малая часть возмущений.

На рисунке 4 показаны результаты численных экспериментов по изучению распределения плотности кинетической энергии в блочно-трещиноватой среде при реализации на внутренних границах условия «проскальзывания» для частоты источника, равной 10 Гц.

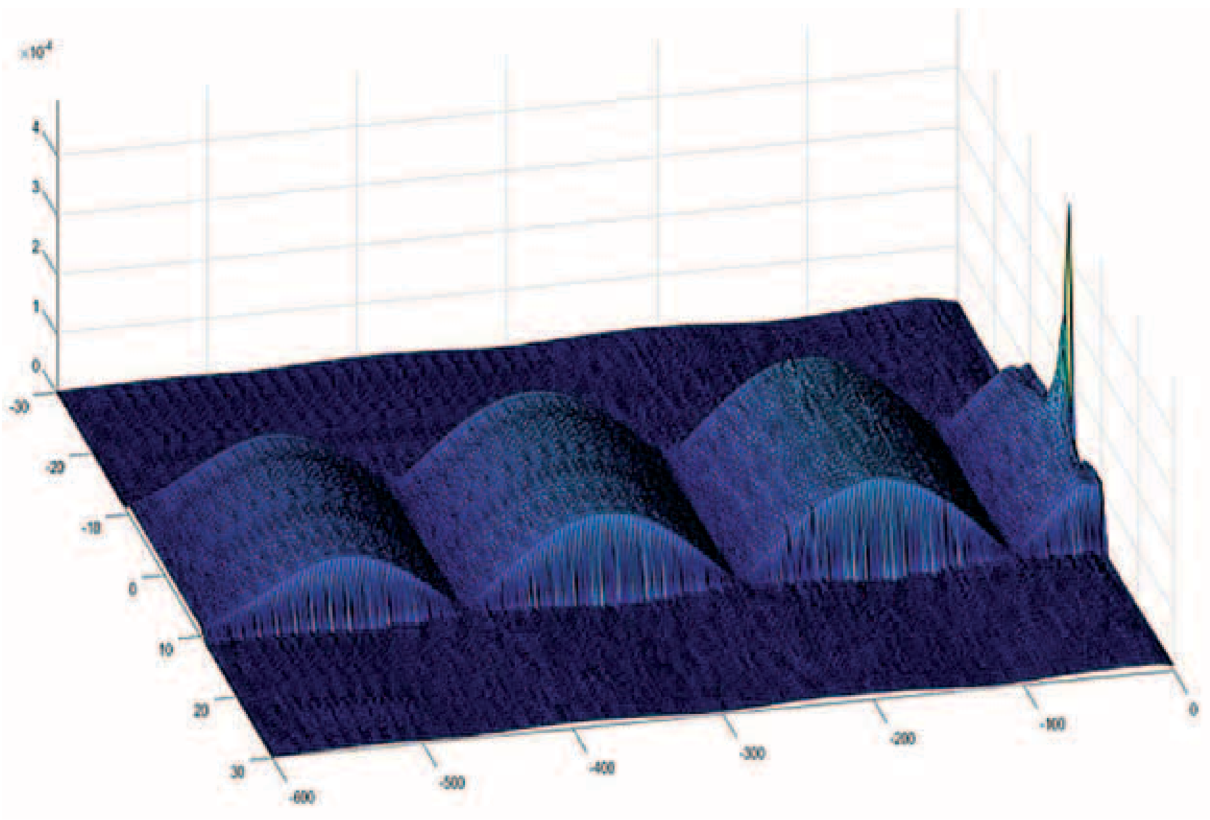

Рис. 4. Распределение плотности кинетической энергии в момент времени t = 0,9 с.

Полученные результаты вычислительных экспериментов показывают, что при реализации на внутренних границах условия «проскальзывания», возмущение, созданное виброисточником при частоте, равно 1 Гц, распространяется в канале между этими границами, и за пределы этих границ, проникает пренебрежимо малая его часть. Такая же картина имеет место при 10 Гц. Формируется фронт волны в канале. Качественно такие же, как на рисунках картины распределения энергии упругого возмущения имеют место после того, как спустя некоторое время процесс устанавливается. При повышении частоты работы виброисточника все большая часть энергии упругого возмущения проникает за пределы границ канала. При частоте виброисточника 100 и 150 Гц картина распространения энергии упругого возмущения качественно напоминает ситуацию, когда на внутренних границах реализованы условия «полного слипания».

Таким образом, можно с уверенностью сказать, что разработанная модель может применяться для проведения содержательных экспериментов по исследованию распространения упругих волн в средах с более сложной геометрией и реализации условий сопряжения на границах областей.

Литература

1. *Куликовский А.Г.*, Математические вопрос численного решения гиперболических систем уравнений / А.Г. Куликовкий, Н.В. Погорелов, А.Ю. Семенов. — М.: Физматлит, 2001. — 608 с.

2. *Скалько Ю.И.*, Корректные условия на границе, разделяющей подобласти [Текст] / Ю.И. Скалько // Компьютерные исследования и моделирование. — 2014. — № 3 (6). — С. 347-356.

3. *Гребенникова И.В.*, Уравнения математической физики: уч. пос. / И.В. Гребенникова. — Екатеринбург: УрФУ, 201

STUDY OF KINETIC ENERGY DENSITY DISTRIBUTION IN AREAS WITH COMPLEX GEOMETRY (HOMOGENEOUS AND BLOCK MEDIA)

I.A. Lazichny

Moscow Institute of Physics and Technology
E-mail: ivanlazichny@gmail.com

Received 11.03.2022

The purpose of this work is to study the distribution of kinetic energy density in areas with complex geometry (homogeneous and block media). The paper simulates a mathematical model of elastic wave propagation, which is an initial boundary value problem for a system of elastic dynamics equations with the presence of internal boundaries in the integration region. A series of computational experiments were carried out, during which kinetic energy density distributions were investigated in areas with complex geometry and different frequencies of the vibration source during its continuous operation. In the course of the work, such research methods as analysis, synthesis, description, generalization and experiment were used. As a result of the work carried out, it is concluded that the model is applicable for conducting meaningful experiments to study the propagation of elastic waves in media with complex geometry, internal boundaries and different interface conditions. The algorithm showed high accuracy and speed.

Keywords: kinetic energy, riemann problem, homogeneous medium, block medium, density, elastic waves, geometry.