

# НАНОСТРУКТУРЫ

математическая физика и моделирование

---

Nanostructures.  
Mathematical Physics & Modelling

***2020, volume 20(1)***

---

# Наноструктуры. Математическая физика и моделирование

Редколлегия:

**В.А. Аветисов, А.А. Белолипецкий И.В. Волович,  
В.В. Гусаров, П.Н. Дьячков, Р.Г. Ефремов, Ю.Е. Лозовик,  
М.А. Мазо, В.П. Маслов (главный редактор),  
А.В. Махиборода (ответственный секретарь), А.Ю. Морозов,  
С.А. Никитов, Г.Э. Норман, Р.А. Сурис, В.А. Тулин, Ю.А. Флёров,  
В.Е. Форгов, А.С. Холево, А.Р. Хохлов, А.В. Чаплик,  
Л.А. Чернозатонский, К.В. Шайтан**

Электронная версия журнала размещается на сайте  
<http://nano-journal.ru>

**Адрес редакции:**

123458, Москва, ул. Таллинская, д. 34, каб. 429  
+7 (495) 916-88-76  
[nanostructures@hse.ru](mailto:nanostructures@hse.ru)

Москва

© 2020, Европейский центр по качеству

# Содержание

Oleg Zverev, Vladimir Khametov, Elena Shelemekh <b>Mathematical model of European option pricing in incomplete market without transaction costs (discrete time). Part I.</b> . . . . .	5
Е.Р. Бурмистров, М.М. Афанасова <b>Изучение квантового времени в гетероструктуре InAs/AlSb с одной и двумя заполненными подзонами</b> . . . . .	46
С.А. Булгаков, В.М. Хаметов <b>Моделирование оптимального и <math>\varepsilon</math>-оптимального алгоритмов восстановления квадратично интегрируемой функции по наблюдениям с гауссовскими ошибками</b> . . . . .	57
В.А. Морозов <b>Моделирование динамики вторичных фотореакций.</b> . . . . .	70
Г.А. Сафьянов <b>Резонансные состояния цилиндрической ловушки Пеннинга</b> . . . . .	86
Информация и правила для авторов . . . . .	105

# Contents

Oleg Zverev, Vladimir Khametov, Elena Shelemekh <b>Mathematical model of European option pricing in incomplete market without transaction costs (discrete time). Part I.</b> .....	5
Burmistrov E.R., Afanasova M.M. <b>The study of the quantum relaxation time in the heterostructure InAs / AlSb with one and two filled subbands.</b> .....	46
Bulgakov S.A, Khametov V.M. <b>Modelling optimal and <math>\varepsilon</math>-optimal recovery algorithms of square-integrable function from observations with Gaussian errors</b> .....	57
V. A. Morozov <b>Modeling the dynamics of secondary photoreactions</b> .....	70
Safyanov G.A. <b>Cylindrical Penning Trap Resonance States</b> .....	86
The information and rules for authors .....	105

# MATHEMATICAL MODEL OF EUROPEAN OPTION PRICING IN INCOMPLETE MARKET WITHOUT TRANSACTION COSTS (DISCRETE TIME). PART I.

Oleg Zverev<sup>1</sup>, Vladimir Khametov<sup>2</sup>, Elena Shelemekh<sup>1</sup>

*zv-oleg@yandex.ru, khametovvm@mail.ru, letis@mail.ru*

<sup>1</sup>*Central Economic Mathematical Institute of RAS*

<sup>2</sup>*National Research University Higher School of Economics*

Received 20.10.2019

For European option in multidimensional incomplete market without transaction costs we design discrete time pricing model. At first the following auxiliary problem is to be considered: to find the upper guaranteed value for the expected risk depending exponentially on a shortage. The upper guaranteed value is a minimax of the expected risk. First we take supremum over a set of equivalent probability measures. Then we take infimum over a set of self-financing portfolios. Here we find conditions for the existence of a portfolio such that an infimum is attained. We use this result to find a generalized optional decomposition for a contingent claim. Further, we obtain conditions for the existence of a probability measure such that the expected risk is maximal with respect to the measure. This measure turned out to be martingale and discrete and it does not belong to the set of equivalent measures. Finally, we demonstrate that our auxiliary results make it possible to obtain explicit pricing formulas for an European option in an incomplete market without transaction costs. In part II of the paper we present example models of European options' pricing in a one-dimensional market and in a market, where support of basic probability measure is compact.

*Keywords: European option, hedging, minimax portfolio, incomplete market, optional decomposition, S-representation, risk function.*

DOI: 10.31145/2224-8412-2020-20-1-05-45

## Introduction

1. For European option in multidimensional incomplete market without transaction costs we design discrete time pricing model. The core problem here is to choose a probability measure with respect to which one should value an option. In complete markets it is a rule to value an option with respect to the unique equivalent martingale measure. In incomplete markets there is a continuum set of such a measures.

The authors of [5], [8], [9], [10], [12], [17], [19] suggest choosing an equivalent martingale probability measure such that the price of an European option is maximal. In these papers, one can find methods for constructing a portfolio and calculating the price of an option for different models of

incomplete markets. The methods are based on optional decomposition of supermartingales.

The authors of [5] establish an optional decomposition under assumption that the evolution of risky assets' prices is represented by a diffusion process with jumps. They prove the existence of a superhedging portfolio with consumption and find the price of an option using this decomposition.

The authors of [9], [12], [19] prove the existence of an optional decomposition (for contingent claims) with respect to a class of equivalent martingale measures in incomplete arbitrage-free markets without transaction costs. In these papers, they assume that the evolution of risky assets' prices is given by a semimartingale. In that case, they provide a method for calculating the European options' prices in incomplete markets in terms of this decomposition.

In [8], [10], [17], the authors also establish the existence of an optional decomposition of contingent claims with respect to equivalent martingale measures in incomplete arbitrage-free markets without transaction costs in discrete time and provide a method for option pricing in terms of this decomposition.

In [11] for an abstract model of market they have found necessary and sufficient conditions for existence of representation for an upper hedging price  $\pi(B)$ , where  $B$  is a nonnegative contingent claim in the form of functional  $\sup_{\eta \in D} E\eta B$  and  $D$  is a set of nonnegative random variables. There is also a detailed review of results on theory of European options' superhedging in incomplete markets.

Note that this approach to option pricing requires calculation of an essential supremum over a set of martingale measures of functionals' conditional expectations, where the functionals are defined on the trajectories of risky assets' prices; calculation of this essential supremum is a substantial mathematical problem. For this reason, in [5], [8], [9], [10], [12], [17], [19], there is a lack of explicit formulas describing the portfolio process and the corresponding process of the capital evolution. It is well known [1], [6], [13] that the calculation of essential supremum of additive or multiplicative functional's conditional expectation (where a functional is defined on trajectories of a controlled random process) is an object of stochastic optimal control. In this theory, they solve the problem using methods of the stochastic dynamic programming (see, e.g., [5]).

2. In this paper, we design pricing model for European option in incomplete market without transaction costs when time is discrete applying the minimax principle (in contrast to [5], [8], [9], [10], [12], [17], [19]) that can be formulated as follows: (i) as far as the probability distribution of the

risky assets' price evolution process is unknown, one should suppose that it maximizes the price of an European option; (ii) one should buy with minimal capital as many risky assets as to be sure to cover an option's contingent claim. In this paper, the realization of this principle is based on the following two opportunities. The first one is the reduction of a minimax calculation problem to a game problem of optimal stochastic control. The second one is based on the reduction of an European options pricing problem to a game problem of optimal stochastic control with a multiplicative functional. The last opportunity follows from the results of [4].

3. Let us outline our approach to European option's price modelling. We consider a multidimensional incomplete market specified by a semimartingale and a European option with finite time horizon and bounded pay-off.

At first we study auxiliary game problem. Specifically, suppose that there are two players watching the  $d$ -dimensional sequence of risky assets' prices. The first player represents a market. Its strategies are probability measures defined on the trajectories of risky assets' prices and equivalent to some basic measure. The second player manages assets. His strategies are self-financing portfolios (described by multidimensional predictable sequences). We suppose that the risk function (the payoff function of the second player): (i) depends on his shortfall; (ii) is exponential (this choice will be explained later). As in [10], the shortfall is the difference between a contingent claim and the profit gained by the second player from the portfolio during the option lifetime, i.e., We also suppose that the players are "rational" and choose their strategies independently. The first player maximizes the expected risk over a set equivalent probability measures. The second player minimizes the expected risk over admissible (in a sense clarified below) self-financing portfolios. Therefore we have the minimax problem.

The idea to consider such a problem goes back to [4], where the problem was solved for a special case. The authors used the method of stochastic dynamic programming to prove the existence of the  $S$ -representation of martingales (for the definition of  $S$ -representation, see [17]). In this paper, we generalize this result (see Theorem 4). Note that we have chosen the exponential risk function just because it allows us to apply the above-stated method. The solution of our auxiliary problem (2) allows us: (1) to establish an analogue of the optional decomposition for any  $\mathcal{F}^S$ -measurable bounded function  $f_N$ , i.e., for any contingent claim in the European options' problem in incomplete markets without transaction costs; (2) to investigate the properties of the measure with respect to which the essential supremum of Lebesgue integral is attained; (3) to choose a probability measure with respect to which one should estimate an option. Finally, all these made it possible to design our pricing model for European option in incomplete market, namely:

- (1) to find a portfolio of assets at any moment and the corresponding capital;
- (2) to calculate the upper bound for spread.

4. Let us briefly discuss the structure of the paper. The paper is in two parts. Here contents of the first part is outlined. Section 1 deals with our auxiliary game problem (2). First, it is shown that we can use the method of stochastic dynamic programming for that problem, i.e. we prove that sequence of upper guaranteed values satisfies recurrent relation (5) (Theorem 1). Further, we determine conditions for the existence of admissible portfolio such that the outer essential infimum is attained (Theorem 3). We use this result to prove that the contingent claim allows an optional decomposition with respect to the class of equivalent measures (Theorem 4). Further, we find conditions for the existence of a probability measure with respect to which the inner essential supremum is attained (Theorem 6). From these results existence condition for solution of auxiliary problem follows (Theorem 8). For convenience of reading all proves are grouped in Section 3.

In Section 2, we design our pricing model for European option in an incomplete market without transaction costs when time is discrete. First, we use Theorem 4 (an analog of the optional decomposition) to link auxiliary problem (2) and the superhedging problem [17]; namely, we construct perfect superhedging portfolio for a European option in an incomplete market without transaction costs (Theorem 10). Also here we prove, that the capital of the above-mentioned perfect superhedging portfolio (constructed for the exponential risk function) is less than or equal to the capital of any other perfect superhedging portfolio at any time moment. This means that the capital of the minimal perfect superhedging portfolio coincides with the upper bound of the spread. Further, we prove that the measure with respect to which essential supremum is attained (constructed in Section 1, we call it the worst-case measure) is a martingale one (Theorem 11). So, a contingent claim admits an  $S$ -representation [17] with respect to the measure (Theorem 12). Besides, we prove that there is discrete worst-case measure (Theorem 13) and in the case of incomplete market it is not equivalent to the basic measure ( Remark 7 ). It follows from these statements that we can identify the initial incomplete market with a complete one with respect to the worst-case measure and the corresponding minimal perfect superhedging portfolio has zero consumption. This portfolio is called a minimax hedging portfolio. Note that the capital of the minimax hedging portfolio coincides with the upper bound of the spread. And as the market is complete with respect to the worst-case measure, it is possible to calculate it explicitly. All statements of Section 2 are proved in Section 4.

The second part of the paper consists of two sections with examples. Using our pricing model of part I, in Section 5 we construct the minimax



hedging portfolio for a European option in a one-dimensional finite incomplete market. In Section 6, we give an example of a European option' pricing in an one-dimensional incomplete compact market.

## §1. Auxiliary minimax problem

In this section we consider auxiliary minimax problem (2) and, as a result, find existence conditions for it's solution. These results are essential for our pricing model to be constructed in Section 2. Though problem (2) and our approach to the solution are interesting in themselves.

1.1. First let us introduce some notation.

1.1.1. Let  $\{S_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{N}^+}$  be a  $d$ -dimensional adapted random sequence on the stochastic basis  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}^+}, \mathbf{P})$ . Suppose that:

- (i) a probability measure  $\mathbf{P}$  is fixed (this measure is said to be *basic* [17]);
- (ii) for any  $t \in \mathbb{N}^+$  the  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t^S \triangleq \sigma(S_u, u \leq t)$ .

Together stochastic basis  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{N}^+}, \mathbf{P})$  and  $\{S_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{N}^+}$  specify a financial  $\{1, S\}$ -market [17].

By  $\mathfrak{R}_N$  we denote the set of all probability measures on  $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t^S)_{t \in N_0})$  such that any measure  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$  is equivalent to the basic measure  $\mathbf{P}$ . Without loss of generality we suppose that  $\mathbf{P} \in \mathfrak{R}_N$ ; so,  $\mathfrak{R}_N \neq \emptyset$ . The set of all martingale measures (i.e. measures with respect to which  $\{S_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in N_0}$  is a local martingale, see [17]) is denoted by  $\mathfrak{M}_N$ .

The expectation of a random variable  $\theta$  with respect to a probability measure  $\mathbf{Q}$  ( $\mathbf{P}$ ) is denoted by  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\theta$  ( $\mathbf{E}^{\mathbf{P}}\theta$ ), and  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}(\theta | \mathcal{F}_t^S)$  is the conditional expectation with respect to the measure  $\mathbf{Q}$  and the  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}_t^S$ .

1.1.2. Let  $f_N(S_\bullet)$  be a bounded  $\mathcal{F}_N^S$ -measurable random variable, where  $N \in \mathbb{N}^+$ . Here  $f_N(S_\bullet)$  (or short  $f_N$ ) represents pay-off function of European option with *horizon*  $N$  [17], [10]. We write  $N_k \triangleq \{k, k+1, k+2, \dots, N\}$ ,  $k \in \{0, \dots, N\}$ .

A  $d$ -dimensional  $\mathcal{F}^S$ -predictable sequence is called a *strategy* and is denoted by  $\gamma_1^N \triangleq \{\gamma_t\}_{t \in N_1}$ , where  $N_1 \triangleq \{1, 2, \dots, N\}$ . The vector  $\gamma_t$  is a control at a time  $t \in N_1$ . By  $U_1^N$  we denote the set of strategies. Let  $\tilde{U}_1^N$  be an arbitrary subset of  $U_1^N$ . By  $\tilde{U}_{t_1}^{t_2}$  we denote the reduction of the set  $\tilde{U}_1^N$  to  $\{t_1, \dots, t_2\} \subseteq N_1$ , where  $t_1, t_2 \in N_1$  and  $t_2 \geq t_1$ . Thus, we will use the following notation  $\gamma_{t_1}^{t_2} \in \tilde{U}_{t_1}^{t_2}$ , where  $\gamma_{t_1}^{t_2} \triangleq \{\gamma_{t_1}, \dots, \gamma_{t_2}\}$ .

1.1.3.

**Definition 1** A pair  $(\mathbf{Q}, \gamma_{t+1}^N) \in \mathfrak{R}_N \times U_{t+1}^N$  is called a *t-bistrategy*,  $t \in N_1$ ;  $(\mathbf{Q}, \gamma_1^N) \in \mathfrak{R}_N \times U_1^N$  is a *bistrategy*, and  $\gamma_{t+1}^N \in \tilde{U}_{t+1}^N$  is a *t-strategy*.

**Definition 2** An estimate of a  $t$ -bistrategy  $(\mathbb{Q}, \gamma_{t+1}^N)$ ,  $t \in N_1$ , is an  $\mathcal{F}_t^S$ -measurable random variable (denoted by  $I_t^{\mathbb{Q}, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$ ) defined by

$$I_t^{\mathbb{Q}, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t) \triangleq \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \exp \left\{ f_N(S_\bullet) - \sum_{i=t+1}^N (\gamma_i, \Delta S_i) \right\} \middle| \mathcal{F}_t^S \right]. \quad (1)$$

Above  $(\bullet, \bullet)$  is the scalar product in a multidimensional Euclidean space,  $\Delta S_i \triangleq S_i - S_{i-1}$ .

**Definition 3** A random variable  $f_N(S_\bullet)$  and a strategy  $\gamma_1^N$  are admissible if  $\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} I_0^{\mathbb{Q}, \gamma_1^N}(S_0) < \infty$   $\mathbb{Q}$ -a.s.

As  $f_N$  is bounded  $\mathbb{Q}$ -a.s., so pair  $(f_N, \gamma_1^N)$  is admissible if  $\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^N (\gamma_i, \Delta S_i) \right\} < \infty$   $\mathbb{Q}$ -a.s. For given  $f_N$ , by  $D_1^N$  we denote the set of all admissible strategies  $\gamma_1^N$ . Note, that  $D_1^N \neq \emptyset$  as trivial strategy belongs to admissible pair  $(f_N, \gamma_1^N)$  for any  $\mathbb{Q}$ -a.s. bounded  $f_N$ .

**Definition 4** A bistrategy  $(\mathbb{Q}, \gamma_1^N) \in \mathfrak{R}_N \times D_1^N$  is said to be admissible.

We consider the following problem:

$$I_0^{\mathbb{Q}, \gamma_1^N}(S_0) \longrightarrow \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_1^N \in D_1^N} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N}. \quad (2)$$

**Definition 5** The random variable  $\bar{V}_0 \triangleq \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_1^N \in D_1^N} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N} I_0^{\mathbb{Q}, \gamma_1^N}(S_0)$  is called the upper guaranteed value.

Definitions of  $\operatorname{ess\,inf}$  and  $\operatorname{ess\,sup}$  with respect to a basic measure  $\mathbb{P}$  can be found in [7], [10], [17], [18].

Note that  $\bar{V}_0$  is an  $\mathcal{F}_0^S$ -measurable random variable.

**Definition 6** The triplet  $(\mathbb{Q}^*, \gamma_1^{*N}, \bar{V}_0)$ :

$$\bar{V}_0 = I_0^{\mathbb{Q}^*, \gamma_1^{*N}}(S_0). \quad (3)$$

is a solution of the minimax problem (2); here the probability measure  $\mathbb{Q}^*$  is called the worst-case measure, the strategy  $\gamma_1^{*N} \in D_1^N$  is called the minimax strategy and together  $(\mathbb{Q}^*, \gamma_1^{*N})$  are referred to as the minimax bistrategy.

1.2. To solve problem (2) we use the stochastic version of dynamic programming. So we define sequence of upper guaranteed values as follows.

**Definition 7** *A random variable*

$$\bar{V}_t \triangleq \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} I_t^{\mathbf{Q}, \gamma_{t+1}^N} (S_0^t) \quad (4)$$

is called the upper guaranteed value at a time  $t \in N_0$ .

According to the definitions of ess inf and ess sup (see [10], [17])  $\bar{V}_t$  is an  $\mathcal{F}_t^S$ -measurable random variable.

In this section, we give a recurrent relation for the sequence  $\{\bar{V}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$ .

**Theorem 1** *Suppose  $f_N(S_\bullet)$  is an  $\mathcal{F}_N^S$ -measurable bounded random variable. Then  $\{\bar{V}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$  satisfies the recurrent relation P-a.s.*

$$\begin{cases} \bar{V}_t = \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_{t+1}} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [\bar{V}_{t+1} e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S], & 0 \leq t < N, \\ \bar{V}_t|_{t=N} = e^{f_N(S_\bullet)}. \end{cases} \quad (5)$$

**Corollary 1** *Suppose, the assumptions of Theorem 1 are satisfied. Then*

(1) *for any  $t \in N_1$  and  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ , the following inequality holds P-a.s.:*

$$\bar{V}_{t-1} \geq \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [\bar{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S]; \quad (6)$$

(2) *for any  $t \in N_1$  and  $\gamma \in D_t$ , the following inequality holds P-a.s.:*

$$\bar{V}_{t-1} \leq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [\bar{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S]. \quad (7)$$

1.3. Upper guaranteed value might be a priori estimated as follows.

**Theorem 2** *Suppose:*

- (1) *conditions of Theorem 1 are satisfied;*
- (2) *there exists constant  $c_2$  such that  $|f_N(S_\bullet)| \leq c_2$  P-a.s.;*
- (3)  $\mathfrak{R}_N \cap \mathfrak{M}_N \neq \emptyset$ .

*Then for any  $t \in N_1$  the following inequalities hold P-a.s.*

$$e^{-c_2} \leq \bar{V}_t \leq e^{c_2}. \quad (8)$$

1.4. In this subsection we give a sufficient condition for the ‘‘outer’’ essential infimum in (5) to be attained.

**Theorem 3** *Suppose:*

- (1) *the assumptions of Theorem 1 are satisfied;*
- (2)  $\mathfrak{R}_N \cap \mathfrak{M}_N \neq \emptyset$ .

*Then there is a strategy  $\{\gamma_t^*\}_{t \in N_1} \in D_1^N$  such that for any  $t \in N_1$ ,  $\mathbf{P}$ -a.s.*

$$\begin{aligned} \bar{V}_t &= \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_{t+1}} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{V}_{t+1} e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right] = \\ &= \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{V}_{t+1} e^{-(\gamma_{t+1}^*, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

*Moreover, for any  $t \in N_1$  and  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$  the following inequality is true:*

$$\bar{V}_{t-1} \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \quad \mathbf{P} - a.s. \quad (10)$$

**Remark 1** *It follows from Corollary 1 that for any  $t \in N_0$  and  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ ,*

$$\bar{V}_t \geq I_t^{\mathbf{Q}, \gamma_{t+1}^*} (S_0^t) \quad \mathbf{Q}(\mathbf{P}) - a.s.,$$

*where  $\gamma_{t+1}^* \in D_{t+1}^N$  is defined by (9).*

1.5. In this subsection we use Theorem 3 to obtain a condition for any  $\mathcal{F}_N^S$ -measurable bounded random variable to have a decomposition similar to the optional decomposition [10], [17].

**Theorem 4** *Let  $\{\bar{V}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$  be defined by (5). Suppose, there exist a strategy  $\{\gamma_t^*\}_{t \in N_1} \in D_1^N$  satisfying (9) for any  $t \in N_1$ . Then for any  $t \in N_1$  and  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ , the sequence*

$$\Delta C_t^* \triangleq \Delta \ln \bar{V}_t - (\gamma_t^*, \Delta S_t) \geq 0, \quad C_0^* = 0 \quad \mathbf{Q} - a.s., \quad (11)$$

*is  $\mathbf{Q}$ -a.s. nondecreasing and the following decomposition holds for any  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ :*

$$f_N(S_\bullet) = \ln \bar{V}_0 + \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i) - C_N^* \quad \mathbf{Q} - a.s. \quad (12)$$

**Remark 2** (1) *If  $Y_t \triangleq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N \cap \mathfrak{M}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [f | \mathcal{F}_t^S]$ , where  $f$  is a  $\mathcal{F}_N^S$ -measurable bounded random variable, then in [17] (see theorem on page 674), it is proved that  $\{Y_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$  is a supermartingale with respect to any  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N \cap \mathfrak{M}_N$ .*

(2) *According to [10] (see theorem 7.5 on page 330) the following assertions are equivalent:*

- (i)  $\{Y_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$  *is a supermartingale with respect to any  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N \cap \mathfrak{M}_N$ ;*

(ii) there are nondecreasing sequence  $\{C_t^*\}_{t \in N_0}$  and  $d$ -dimensional predictable sequence  $\{\gamma_t^*\}_{t \in N_1}$  such that  $Y_t$  admits representation  $Y_t = Y_0 + \sum_{i=1}^t (\gamma_i^*, \Delta S_i) - C_t^*$   $\mathbb{P}$ -a.s. This representation is called optional decomposition or uniform Doob decomposition [5, 8, 9, 10, 12].

In contract to above mentioned works, Theorem 4:

(i) does not require sequence  $\{\ln \bar{V}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$  to be a supermartingale with respect to any  $\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N \cap \mathfrak{M}_N$ ,  $\mathfrak{R}_N \cap \mathfrak{M}_N \neq \emptyset$ ;

(ii) presents constructive method which allows construction of  $d$ -dimensional predictable minimax strategy  $\gamma_1^{*N}$  and nondecreasing sequence  $\{C_t^*\}_{t \in N_0}$ , i.e. components of optional decomposition (12);

We do not use results of [5, 8, 9, 10, 12] to prove Theorem 4.

(3) Theorem 4 implies the following inequality for any measure  $\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N$ :

$$f_N(S_\bullet) \leq \ln \bar{V}_0 + \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i) \quad \mathbb{Q} - a.s.$$

Thus if the sequence  $\{S_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$  is a local martingale with respect to a measure  $\mathbb{Q}$ , then  $\{\ln \bar{V}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$  and  $\{E^{\mathbb{Q}}[f_N(S_\bullet) | \mathcal{F}_t^S]\}_{t \in N_0}$  are supermartingales with respect to any  $\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N$ .

(4) Condition  $\mathfrak{R}_N \cap \mathfrak{M}_N \neq \emptyset$  means that  $(1, S)$ -market in consideration is incomplete.

1.6. Theorem below provides (formal) existence conditions for the worst-case probability measure.

**Theorem 5** Let  $\xi$  be any  $\mathcal{F}_N$ -measurable  $\mathbb{P}$ -a.s. bounded random variable. Then the following is true:

(1) there exist

probability measure  $\lambda$  on  $(\Omega, \mathcal{F})$  such, that  $\lambda \gg \mathbb{Q}$  for any  $\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N$ ,

and

a set of non-negative  $\mathcal{F}$ -measurable random variables  $\{X_k\}_{k \geq 1}$  with:

(i)  $E^\lambda X_k = 1$ ,  $k \geq 1$ ; (ii)  $\sup_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}} E^{\mathbb{Q}} \xi = \lim_{k \rightarrow \infty} E^\lambda X_k \xi$ ;

(2) if  $\{X_k\}_{k \geq 1}$  is a weakly relatively compact sequence in  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$ , then there exists probability measure  $\mathbb{Q}^*$  on  $(\Omega, \mathcal{F})$ :

$$\sup_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N} E^{\mathbb{Q}} \xi = E^{\mathbb{Q}^*} \xi. \quad (13)$$

**Remark 3** (1) Weakly relatively compactness condition for  $\{X_k\}_{k \geq 1}$  is difficult to verify. Thus the theorem is non-usable. Still it allows us to consider properties of problem (2) solution.

(2) In contrast to [10], [17], theorem 5 provides sufficient conditions for Lebesgue integral of bounded measurable random variable to attain its supremum over the set of equivalent probability measures. Yet it is well known [2], [16], that, as a rule, supremum is attained on finitely additive measure. So, expectation is not defined and it is impossible to construct solution for option's pricing problem. That is why theorem 5 is critical for our construction. Note, that [2], [16] present another non-usable conditions for countable additivity of "extremal" measure.

(3) According to Dunford-Pettis theorem [10] requirement of theorem 5 for  $\{X_k\}_{k \geq 1}$  to be weakly relatively compact might be rewritten as requirement for boundedness and uniform integrability in  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$ . Moreover, if  $\{X_k\}_{k \geq 1}$  is weakly closed and convex, then according to James theorem [10] weakly relatively compactness condition for  $\{X_k\}_{k \geq 1}$  is necessary and sufficient for a Lebesgue integral to attain supremum.

(4) Obviously, if  $\xi(\omega)$  takes values in final set or in countable (or final) union of compact sets, then: (i) there is  $\omega^* \in \Omega: \xi(\omega^*) = \sup_{\omega \in \Omega}$ ; (ii)  $\sup_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}} \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \xi$  is attained on  $\mathbb{Q}^*: \mathbb{Q}^*(\{\omega^*\}) = 1, \mathbb{Q}^*(\Omega \setminus \omega^*) = 0$ .

1.7. Here we implement Theorems 3 and 5 to gain new recurrent relation for the sequence of upper guaranteed values.

**Theorem 6** *Suppose, the assumptions of Theorems 3 and 5 are satisfied. Then  $(\bar{V}_t, \mathcal{F}_t^S)_{t \in N_1}$  satisfies the recurrent relation  $\mathbb{Q}^*$ -a.s.*

$$\begin{cases} \bar{V}_{t-1} = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}^*} [\bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S], \\ \bar{V}_t |_{t=N} = \exp\{f_N(S_\bullet)\}. \end{cases} \quad (14)$$

1.8. From Theorems 4 and 5 an important assertion follows.

**Corollary 2** *If  $(\bar{V}_t, \mathcal{F}_t^S)_{t \in N_1}$  satisfies the recurrent relation (14), then for any  $t \in N_0$ , decomposition (11) holds with respect to the measure  $\mathbb{Q}^*$ , i.e.,*

$$\Delta \ln \bar{V}_t = (\gamma_t^*, \Delta S_t) - \Delta C_t^* \quad \mathbb{Q}^* - a.s. \quad (15)$$

1.9. In this subsection, we give a criterion for the probability measure  $\mathbb{Q}^*$  to be the worst-case measure.

**Definition 8** *Let  $\{\bar{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$  be defined by formula*

$$\bar{\mu}_t \triangleq \bar{V}_t \exp \left\{ - \sum_{i=1}^t (\gamma_i^*, \Delta S_i) \right\}, \quad (16)$$

where  $\bar{V}_t$  satisfies recurrent relation (5) and  $\{\gamma_t^*\}_{t \in N_1} \in D_1^N$  is the minimax strategy defined by (9). The sequence  $\{\bar{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$  is said to be an upper  $S$ -estimating one.

**Remark 4** It follows from Theorem 3 (equality (10)) that the upper  $S$ -estimating sequence is a supermartingale with respect to any measure  $Q \in \mathfrak{R}_N$ .

**Theorem 7** Suppose, the assumptions of Theorem 6 are satisfied. Then the following conditions are equivalent:

- (1)  $Q^*$  is the worst-case probability distribution;
- (2) equality (14) holds for any  $t \in N_1$ ;
- (3) the upper  $S$ -estimating sequence  $\{\bar{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$  is a martingale with respect to the measure  $Q^*$ .

1.10. The main result of this section follows from Theorems 1–7.

**Theorem 8** Suppose that the assumptions of Theorem 6 are satisfied. Then there exists a solution of minimax problem (2).

## §2 Minimax hedging of a European option in an incomplete market

In this section, we use the results of Section 1 to link problem (2) and the problem of European options' pricing in incomplete markets without transaction costs. We also give existence conditions for the minimal perfect superhedging portfolio (Theorem 10). We use Theorem 6 to formulate the following assertions: (1) the worst-case measure  $Q^*$  is a martingale one (Theorem 11); (2) for any bounded contingent claim, there exists an  $S$ -representation [17] with respect to  $Q^*$  (Theorem 12). Further, we state that the worst-case measure  $Q^*$  is discrete and does not belong to  $\mathfrak{R}_N$  (Theorem 13). A  $(1, S)$ -market with respect to  $Q^*$  is called the *worst-case complete market*. The corresponding portfolio is called the *minimax hedging one*. Finally, we provide and prove a method for finding the price of an European option in an incomplete market without transaction costs (Theorem 15).

2.1. In this subsection, we recall some concepts of option pricing theory (see [17], [10]); the economic interpretation can be found in [10].

2.1.1 Let  $\{S_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in N_0}$  be the  $d$ -dimensional adapted sequence defined in Subsection 1.1.1. Suppose that this sequence describes the evolution of  $d$



risky assets' prices [17]. We also suppose that there is a riskless asset [17] with zero return and the initial price 1. This collection of assets is called  $(1, S)$ -market [17]. An  $\mathcal{F}_N^S$ -measurable random variable  $f_N(S_\bullet)$  is called a *European contingent claim with maturity*  $N \in \mathbb{N}^+$  [17]. Let  $\{\beta_t\}_{t \in N_0}$  be an  $\mathcal{F}^S$ -predictable one-dimensional sequence. Its elements can be interpreted [17] as the quantity of a riskless asset. Let  $\{\gamma_t\}_{t \in N_1}$  be an  $\mathcal{F}^S$ -predictable  $d$ -dimensional sequence introduced in Subsection 1.1.2. Note that such a sequence is called a strategy. The  $i$ th ( $i = \overline{1, d}$ ) component of the vector  $\gamma_t$  represents [17] the quantity of the  $i$ th risky asset at a time  $t \in N_1$ . The sequence of pairs  $\pi \triangleq (\beta_t, \gamma_t)_{t \in N_0}$  is called a *portfolio*. The *capital of the portfolio*  $\pi$  at a time  $t \in N_0$  [17] in the  $(1, S^{(1)}, \dots, S^{(d)})$ -market is an  $\mathcal{F}_t^S$ -measurable random variable  $X_t^\pi$  such that

$$X_t^\pi = \beta_t + (S_t, \gamma_t). \quad (17)$$

The portfolio  $\pi$  is a *self-financing* one [17] if for any  $t \in N_1$ , P-a.s.

$$\Delta\beta_t + (S_{t-1}, \Delta\gamma_t) = 0. \quad (18)$$

The set of all self-financing portfolios is denoted by  $SF$ .

An adapted nondecreasing sequence  $C \triangleq \{C_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$  such that  $C_t|_{t=0} = 0$  is called *consumption* [17]. The pair  $(\pi, C)$  is a portfolio with consumption [17]. The capital of a portfolio with consumption  $(\pi, C)$  at a time  $t \in N_0$  is denoted by  $\widehat{X}_t^{(\pi)}$  and defined by the formula

$$\widehat{X}_t^\pi \triangleq X_t^\pi - C_t. \quad (19)$$

It follows from (17)–(19) that at any time  $t \in N_0$ , the capital  $\widehat{X}_t^\pi$  of a self-financing portfolio with consumption  $(\pi, C)$  admits the representation P-a.s.

$$\widehat{X}_t^\pi = \widehat{X}_0^\pi + \sum_{i=1}^t (\gamma_i, \Delta S_i) - C_t. \quad (20)$$

2.1.2. A  $(1, S)$ -market is said to be *arbitrage-free* [17] if the following condition holds for the capital of any portfolio  $\pi \in SF$ : if  $\mathbf{P}(X_N^\pi \geq 0 | X_0^\pi = 0) = 1$ , then  $\mathbf{P}(X_N^\pi = 0 | X_0^\pi = 0) = 1$ . It is well known [17] that if there is at least one martingale probability measure in a  $(1, S)$ -market, then the market is *arbitrage-free*.

2.1.3. Recall [17], that an *arbitrage-free*  $(1, S)$ -market is *complete* with respect to measure  $\tilde{\mathbf{Q}} \in \mathfrak{R}_N \cap \mathfrak{M}_N$  if for any bounded  $f_N(S_\bullet)$  there is a portfolio  $\pi \in SF$  with the capital  $X_N^\pi$  such that  $f_N(S_\bullet) = X_N^\pi$   $\tilde{\mathbf{Q}}$ -a.s.



**Definition 9** [17]. A one-dimensional martingale  $(\Theta_t, \mathcal{F}_t^S)_{t \in N_0}$  is said to admit an  $S$ -representation with respect to the  $d$ -dimensional martingale  $(S_t, \mathcal{F}_t^S)_{t \in N_0}$  and the measure  $\tilde{\mathbf{Q}} \in \mathfrak{R}_N \cap \mathfrak{M}_N$  if there is an  $\mathcal{F}^S$ -predictable  $d$ -dimensional sequence  $\{\gamma_t\}_{t \in N_1}$  such that for any  $t \in N_0$ ,

$$\Theta_t = \Theta_0 + \sum_{i=1}^t (\gamma_i, \Delta S_i) \quad \tilde{\mathbf{Q}} - a.s. \quad (21)$$

The following assertion is well known (see [10], [17]).

**Theorem 9** Suppose that  $\tilde{\mathbf{Q}} \in \mathfrak{M}_N \cap \mathfrak{R}_N (\neq \emptyset)$ . Then the following conditions are equivalent:

- (1)  $(1, S)$ -market is complete;
- (2)  $\mathfrak{M}_N \cap \mathfrak{R}_N = \{\tilde{\mathbf{Q}}\}$ ;
- (3) any local martingale  $(\Theta_t, \mathcal{F}_t^S)_{t \in N_0}$  admits an  $S$ -representation with respect to the measure  $\tilde{\mathbf{Q}} \in \mathfrak{M}_N \cap \mathfrak{R}_N$ .

That is why they say [10], [17], that an arbitrage-free  $(1, S)$ -market is incomplete if  $|\mathfrak{M}_N \cap \mathfrak{R}_N| > 1$ .

2.1.4. Generally speaking, the above-defined (see Subsection 2.1.1)  $(1, S)$ -market is incomplete. Thus, there is a problem of selecting a measure with respect to which one should calculate the price of an European option. As was previously mentioned, we use the minimax approach to solve this problem. This approach allows us to describe a  $(1, S)$ -market by means of the worst-case probability distribution. There we will need results of Section 1.

2.1.5. A  $(1, S)$ -market is said to be non-redundant [10], if for any  $t \in N_0$  and  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$   $(\gamma_t, \Delta S_t) = 0$   $\mathbf{Q}$ -a.s. implies  $\mathbf{Q}$ -a.s. triviality for  $\gamma_t$ . Note, non-redundant condition is not essential: one can fairly exclude "excessive" assets.

2.2. Now we give the definition of minimax superhedging portfolio with consumption.

**Definition 10** [17]. A self-financing portfolio with consumption  $(\pi, C)$  in a  $(1, S)$ -market in the problem of European option pricing with contingent claim  $f_N(S_\bullet)$  is said to be superhedging with consumption if  $f_N(S_\bullet) \leq \widehat{X}_N^\pi \quad \mathbf{P} - a.s.$

**Definition 11** [17]. A superhedging portfolio with consumption  $(\pi, C)$  is a perfect one if

$$f_N(S_\bullet) = \widehat{X}_N^\pi \quad \mathbf{P} - a.s. \quad (22)$$

Conditions for the existence of a perfect superhedging portfolio with respect to a measure  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{M}_N \cap \mathfrak{R}_N$  can be found in [17] (see Theorem 2, p. 652) and in [10] (see Theorem 7.13, p. 335).

**Definition 12** *A perfect superhedging portfolio with consumption  $(\pi^*, C^*)$  is the minimal one if for any other perfect superhedging portfolio with consumption  $(\pi, C)$  and for any  $t \in N_0$ , the inequality holds P-a.s.:*

$$\widehat{X}_t^{\pi^*} \leq \widehat{X}_t^\pi. \quad (23)$$

In this subsection, we give conditions for the existence of the minimal perfect superhedging portfolio with consumption. These conditions are based on Theorem 4. Moreover, the assertion given below links problem (2) to the problem of minimax perfect superhedging portfolio construction for a European option in an incomplete  $(1, S)$ -market.

**Theorem 10** *Consider a  $(1, S)$ -market. Suppose that the assumptions of Theorem 4 are satisfied. Then the minimal perfect superhedging portfolio with consumption  $(\pi^*, C^*)$  exists with respect to any  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ , namely*

(1) *self-financing portfolio  $\pi^* = \{\beta_t^*, \gamma_t^*\}_{t \in N_1}$ , where  $\{\gamma_t^*\}_{t \in N_1} \in D_1^N$  is an admissible predictable sequence satisfying (9), and  $\{\beta_t^*\}_{t \in N_0}$  is defined by*

$$\begin{cases} \Delta\beta_t^* + (S_{t-1}, \Delta\gamma_t^*) = 0, \\ \beta_t^*|_{t=0} = \beta_0^*, \end{cases} \quad (24)$$

*one can choose  $\beta_0^* = \ln \bar{V}_0$  (which can be obtained using (5)) and  $\gamma_0^* = 0$ ; for any  $t \in N_0$ , the capital of the portfolio  $\pi^*$  can be represented as*

$$X_t^{\pi^*} = \beta_t^* + (\gamma_t^*, S_t) \quad \mathbf{Q} - a.s. \quad (25)$$

(2) *for any  $t \in N_0$  and  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ , the capital  $\widehat{X}_t^{\pi^*}$  of the superhedging portfolio with consumption  $(\pi^*, C^*)$  admits the representation*

$$\widehat{X}_t^{\pi^*} = \ln \bar{V}_t \quad \mathbf{Q} - a.s., \quad (26)$$

*where  $\bar{V}_t$  satisfies recurrent relation (5) and the consumption  $C_t^*$  at any moment  $t \in N_0$  admits the representation Q-a.s.*

$$\begin{cases} \Delta C_t^* = (\gamma_t^*, \Delta S_t) - \Delta \widehat{X}_t^{\pi^*} \geq 0, \\ C_t^*|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad (27)$$

*moreover, the following equalities hold*

$$(a) \quad \widehat{X}_t^{\pi^*} = X_t^{\pi^*} - C_t^* \quad \mathbf{Q} - a.s.,$$

(b)

$$\hat{X}_t^{\pi^*} = \ln \bar{V}_0 + \sum_{i=1}^t (\gamma_i^*, \Delta S_i) - C_t^* \quad \mathbf{Q} - a.s. \quad (28)$$

(3)  $(\pi^*, C^*)$  is a perfect superhedging portfolio with consumption, i.e.,

$$\hat{X}_N^{\pi^*} = f_N(S_\bullet) \quad \mathbf{Q} - a.s.; \quad (29)$$

(4)  $(\pi^*, C^*)$  is the minimal perfect superhedging portfolio with consumption.

**Remark 5** It is difficult to apply Theorem 10 to calculate the price of an European option in an incomplete market without transaction costs. Indeed, it is necessary to solve recurrent relation (9). This implies the problem of calculating the consumption  $\{C_t^*\}_{t \in N_0}$ .

2.3. Now we are going to consider some useful properties of solution for problem (2). Let us start with martingale property for the worst-case measure.

**Theorem 11** Suppose the solution of problem (2) exists. Then  $\mathbf{Q}^*$  is a martingale measure.

2.4. In this subsection, we give conditions for the existence of the  $S$ -representation for any bounded contingent claim with respect to the measure  $\mathbf{Q}^*$ . These conditions are based on Theorem 4.

**Theorem 12** Fix arbitrary  $\mathcal{F}_N$ -measurable bounded contingent claim  $f_N$ . Suppose the solution of problem (2) for such  $f_N$  exists. Then  $f_N$  admits representation with respect to the measure  $\mathbf{Q}^*$

$$f_N(S_\bullet) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} [f_N(S_\bullet) | \mathcal{F}_0^S] + \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i) \quad \mathbf{Q}^* - a.s., \quad (30)$$

where  $\{\gamma_t^*, \mathcal{F}_{t-1}^S\}_{t \in N_1}$  is the  $d$ -dimensional predictable sequence satisfying (9).

**Remark 6** (1) It is possible that  $\mathbf{Q}^* \notin \mathfrak{R}_N$ . Thus, the well-known Lemma 10 of [17] (see p. 611) and Lemma 5.3.9 of [10] don't imply Theorem 11. In Section 4, we use Theorems 4 and 6 to prove that the  $S$ -representation exists.

(2) It follows from Corollary 2 and Theorem 12 that for any  $t \in N_1$ ,

$$\begin{cases} \Delta \ln \bar{V}_t = (\gamma_t^*, \Delta S_t) \\ \ln \bar{V}_t|_{t=0} = \ln \bar{V}_0, \quad \ln \bar{V}_t|_{t=N} = f_N(S_\bullet) \end{cases} \quad \mathbf{Q}^* - a.s. \quad (31)$$

The measure  $\mathbb{Q}^*$  is a martingale one. Hence formula (31) yields

$$\ln \bar{V}_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} [f_N(S_\bullet) | \mathcal{F}_0^S] \quad \mathbb{Q}^* - a.s. \quad (32)$$

(3) Formula (31) implies, that in non-redundant  $(1, S)$ -market  $\{\gamma_t^*\}_{t \in N_1}$  is unique (i.e. if there is  $\{\tilde{\gamma}_t\}_{t \in N_1}$  satisfying (31), then  $\tilde{\gamma}_t = \gamma_t^*$   $\mathbb{Q}^*$ -a.s. for any  $t \in N_1$ ).

(4) For any  $t \in N_0$ , the consumption  $C_t^*$  is trivial with respect to the measure  $\mathbb{Q}^*$ . Therefore,  $\hat{X}_t^{\pi^*} = X_t^{\pi^*}$   $\mathbb{Q}^*$ -a.s. Hence we conclude that the capital of the portfolio  $\pi^* \in SF$  admits the representation  $\mathbb{Q}^*$ -a.s.

$$X_t^{\pi^*} = \ln \bar{V}_0 + \sum_{i=1}^t (\gamma_i^*, \Delta S_i) \quad \mathbb{Q}^* - a.s. \quad (33)$$

at any moment  $t \in N_1$ . Moreover,

$$X_t^{\pi^*} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^*} [f_N(S_\bullet) | \mathcal{F}_t^S] = \ln \bar{V}_t \quad \mathbb{Q}^* - a.s. \quad (34)$$

2.5.

**Theorem 13** Suppose  $\{1, S\}$ -market is non-redundant and the solution of problem (2) exists. Then there is worst-case probability measure such, that regular conditional probabilities  $\mathbb{Q}^*(\cdot | \mathcal{F}_{n-1}^S)$ ,  $t \in N_1$ , are discreet and their supports consist of  $d + 1$  affine-independent predictable variables.

**Remark 7** From Theorem 13 it follows, that in the case of non-redundant market there exists such worst-case discreet measure  $\mathbb{Q}^*$ , that there is no martingale probability measure  $\mathbb{Q}$ :  $\mathbb{Q} \neq \mathbb{Q}^*$  and  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Q}^*$  (another contradicts to affine-independence of support's elements). There are two important consequences: (1)  $\mathbb{Q}^* \notin \mathfrak{R}_N \cap \mathfrak{M}_N$ , thus  $\mathbb{Q}^* \notin \mathfrak{R}_N$ ; (2)  $\mathbb{Q}^*$  specifies complete market.

2.6. It follows from Theorems 11–13 and Remark 10 that the considered  $(1, S)$ -market can be identified with a complete market with respect to  $\mathbb{Q}^*$ . This remark leads to the following definition.

**Definition 13** Fix  $\mathcal{F}_N^S$ -measurable bounded contingent claim  $f_N$ . A non-redundant  $(1, S)$ -market will be called the worst-case complete for  $f_N$  if there exist

a worst-case martingale probability measure  $\mathbb{Q}^*$ , such that conditions  $\mathbb{Q} \in \mathfrak{M}_N$  and  $\mathbb{Q} \sim \mathbb{Q}^*$  imply  $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{Q}^*(A)$  for any  $A \in \mathcal{F}_N^S$ , and a portfolio  $\pi^* \in SF$

such that the following equality holds at the moment  $N$ :

$$X_N^{\pi^*} = f_N \quad \mathbb{Q}^* - a.s.$$

Such a portfolio  $\pi^*$  is called a minimax hedging portfolio.

Definition 13 and Theorems 10–13 imply the following assertion.

**Theorem 14** *Suppose the solution of problem (2) exists. Then the worst-case complete market exists. Moreover, the capital of the minimax hedging portfolio is equal to the capital of the minimal perfect superhedging portfolio with  $\mathbb{Q}^*$ -a.s. trivial consumption*

2.7. It follows from Theorem 10 that there exists a minimal perfect superhedging portfolio with respect to any measure  $\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N$ . However, this result does not provide any method for constructing such a portfolio and its capital. In this subsection, we give a general representation of the minimax hedging portfolio and of its capital by use of Theorems 11–14.

**Theorem 15** *Let  $\pi^* \in SF$  be the minimax hedging portfolio. Suppose the solution of problem (2) exists. Then:*

(1) *the minimax hedging portfolio  $\pi^*$  admits the following representation:*

(i) *for each  $t \in N_1$ , there exists an  $\mathcal{F}_{t-1}^S$ -measurable  $d$ -dimensional  $\gamma_t^*$  such that*

$$\begin{cases} \bar{V}_{t-1} = \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \mathbf{E}^{\mathbb{Q}^*} [\bar{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S] = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}^*} [\bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S] & \mathbb{Q}^* - a.s. \\ \bar{V}_t |_{t=N} = \exp \{f_N(S_\bullet)\}; \end{cases} \quad (35)$$

(ii) *for each  $t \in N_1$ , there exists an  $\mathcal{F}_{t-1}^S$ -measurable  $\beta_t^*$  such that*

$$\begin{cases} \beta_t^* = \beta_{t-1}^* - (\gamma_t^*, S_{t-1}) \\ \beta_t^* |_{t=0} = \beta_0^*, \end{cases} \quad (36)$$

where  $\beta_0^* = \ln \bar{V}_0$  and  $\gamma_0^* = 0$ ;

(2) *for each  $t \in N_0$ , the capital  $X_t^{\pi^*}$  of  $\pi^* \in SF$  admits the following representations  $\mathbb{Q}^*$ -a.s.:*

(a)  $X_t^{\pi^*} = \ln \bar{V}_t$ ,

(b)  $X_t^{\pi^*} = X_0^{\pi^*} + \sum_{i=1}^t (\gamma_i^*, \Delta S_i)$ ,  $X_N^{\pi^*} = f_N(S_\bullet)$   $\mathbb{Q}^*$ -a.s.,  $X_0^{\pi^*} = \ln \bar{V}_0 = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}^*} [f_N(S_\bullet) | \mathcal{F}_0^S]$ .

**Remark 8** *The capital of the minimax hedging portfolio is  $X_0^{\pi^*} = \mathbf{E}^{\mathbb{Q}^*} [f_N(S_\bullet) | \mathcal{F}_0^S]$ . The value  $X_0^{\pi^*}$  is the upper bound of the spread for an European option in an incomplete market.*

### §3. Proofs of Assertions 1–9

3.1. Here we prove Theorem 1 and Corollary 1. To prove these assertions, we make some preparatory notes.

3.1.1. Since  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$  is a measure, it follows from the Radon–Nikodym theorem that there exists a unique  $\mathcal{F}_N$ -measurable positive random variable  $z_N$  such that  $z_N(\omega) = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}(\omega)$ . The variable  $z_N$  is called the density of the measure  $\mathbf{Q}$  with respect to measure  $\mathbf{P}$ . Suppose that  $\mathbf{Q}_t \triangleq \mathbf{Q}|_{\mathcal{F}_t}$  and  $\mathbf{P}_t \triangleq \mathbf{P}|_{\mathcal{F}_t}$ . Obviously, for any  $t \in N_0$ , the probability measures  $\mathbf{Q}_t$  and  $\mathbf{P}_t$  are equivalent. Hence there exists a unique  $\mathcal{F}_t$ -measurable positive random variable  $z_t(\omega) \triangleq \frac{d\mathbf{Q}_t}{d\mathbf{P}_t}(\omega)$  such that:

- (i) for any  $t \in N_0$ ,  $0 < z_t < \infty$   $P$ -a.s.;
- (ii) if  $\mathbf{Q}_0 = \mathbf{P}_0$ , then  $z_t|_{t=0} = 1$ ;
- (iii) for each  $t \in N_1$ ,  $\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(z_t|\mathcal{F}_{t-1}) = z_{t-1}$   $\mathbf{P}$ -a.s. The variable  $z_t(\omega)$  is a local density.

For any  $t \in N_0$ , we let  $\bar{Z}_t^N$  denote the set of sequences  $\{\bar{z}_s^{t,N}, \mathcal{F}_s^S\}_{s \in N_0}$  such that

$$\bar{z}_s^{t,N} \triangleq \begin{cases} 1, & 0 \leq s \leq t, \\ z_s, & t < s \leq N. \end{cases} \quad (37)$$

Let us denote  $\bar{z}_t^N \triangleq \{\bar{z}_s^{t,N}\}_{s=N}$ .

It is clear that the sequence  $\{\bar{z}_s^{t,N}\}_{s \in N_0}$  is a martingale with respect to the measure  $\mathbf{P}$  and the filtration  $\{\mathcal{F}_s^S\}_{s \in N_0}$ .

The family of sets  $\{\bar{Z}_t^N\}_{t \in N_0}$  has the following properties (see [17]):

- (1)  $\bar{Z}_t^N \subseteq \bar{Z}_{t-1}^N \subseteq \dots \subseteq \bar{Z}_0^N$ ;
- (2) for each  $t \in N_0$ , a set  $\bar{Z}_t^N$  is convex.

The reduction of the set  $\bar{Z}_0^N$  to  $\{t_1, \dots, t_2\}$ , where  $t_1 < t_2$  and  $t_1, t_2 \in N_0$ , is denoted by  $\bar{Z}_{t_1}^{t_2}$ , and its elements are denoted by  $\bar{z}_{t_1}^{t_2}$ .

3.1.2. Consider the estimate of an admissible  $t$ -bistrategy  $(\mathbf{Q}, \gamma_{t+1}^N)$ . It follows from the law of iterated expectations that  $I_t^{\mathbf{Q}, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$  satisfies the recurrent relation  $\mathbf{Q}$ -a.s.

$$\begin{cases} I_t^{\mathbf{Q}, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ I_{t+1}^{\mathbf{Q}, \gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1}) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right], \\ I_t^{\mathbf{Q}, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t) |_{t=N} = \exp \{f_N(S_\bullet)\}. \end{cases} \quad (38)$$

As we know,  $\mathbf{Q}, \mathbf{P} \in \mathfrak{R}_N$ . Therefore, it follows from the definition of the estimate of an admissible  $t$ -bistrategy  $(\mathbf{Q}, \gamma_{t+1}^N)$  (denoted by  $I_t^{\mathbf{Q}, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$ ) and

Girsanov's theorem [18] that  $\mathbb{Q}$  ( $\mathbb{P}$ )-a.s.

$$I_t^{\mathbb{Q}, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ \bar{z}_t^N \exp \left\{ f_N(S_\bullet) - \sum_{i=t+1}^N (\gamma_i, \Delta S_i) \right\} \middle| \mathcal{F}_t^S \right]. \quad (39)$$

Let us also denote the right-hand side of equality (39) by  $I_t^{\mathbb{P}, \bar{z}_t^N, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$ , where  $(\bar{z}_t^N, \gamma_{t+1}^N) \in \bar{Z}_t^N \times D_{t+1}^N$ . It follows from (38) and (39) that for any  $t \in N_0$  and  $(\bar{z}_t^N, \gamma_{t+1}^N) \in \bar{Z}_t^N \times D_{t+1}^N$ , the random variable  $I_t^{\mathbb{P}, \bar{z}_t^N, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$  satisfies the recurrent relation  $\mathbb{P}$ -a.s.

$$I_t^{\mathbb{P}, \bar{z}_t^N, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ \bar{z}_{t+1}^{t, N} I_{t+1}^{\mathbb{P}, \bar{z}_{t+1}^N, \gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1}) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} \middle| \mathcal{F}_t^S \right]. \quad (40)$$

For any  $t \in N_0$ , we have  $I_t^{\mathbb{Q}, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t) = I_t^{\mathbb{P}, \bar{z}_t^N, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$   $\mathbb{P}$ -a.s. Hence the random variable  $\bar{V}_t$  admits the representation

$$\bar{V}_t = \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N} \operatorname{ess\,sup}_{\bar{z}_t^N \in \bar{Z}_t^N} I_t^{\mathbb{P}, \bar{z}_t^N, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t) \quad \mathbb{P} \text{ - a.s.} \quad (41)$$

**3.1.3. PROOF OF THEOREM 1.** First we prove that for any  $t \in N_0$ , the following inequality holds  $\mathbb{P}$ -a.s.:

$$\bar{V}_t \geq \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_{t+1}} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \bar{V}_{t+1} e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} \middle| \mathcal{F}_t^S \right]. \quad (42)$$

By definition,

$$\bar{I}_t^{\mathbb{P}, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t) \triangleq \operatorname{ess\,sup}_{\bar{z}_t^N \in \bar{Z}_t^N} I_t^{\mathbb{P}, \bar{z}_t^N, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t). \quad (43)$$

It follows from the definition of essential supremum that  $\bar{I}_t^{\mathbb{P}, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$  is an  $\mathcal{F}_t^S$ -measurable variable. The  $I_t^{\mathbb{P}, \bar{z}_t^N, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$  satisfies recurrent relation (40). Hence the properties of essential supremum and Girsanov's theorem imply the formulas  $\mathbb{P}$ -a.s.

$$\begin{aligned} \bar{I}_t^{\mathbb{P}, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t) &= \operatorname{ess\,sup}_{\bar{z}_t^N \in \bar{Z}_t^N} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ \bar{z}_{t+1}^{t, N} I_{t+1}^{\mathbb{P}, \bar{z}_{t+1}^N, \gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1}) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} \middle| \mathcal{F}_t^S \right] \geq \\ &\geq \operatorname{ess\,sup}_{\bar{z}_{t+1}^N \in \bar{Z}_{t+1}^N} \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ \bar{z}_{t+1}^{t, N} I_{t+1}^{\mathbb{P}, \bar{z}_{t+1}^N, \gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1}) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} \middle| \mathcal{F}_t^S \right] = \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ \bar{z}_{t+1}^{t, N} \operatorname{ess\,sup}_{\bar{z}_{t+1}^N \in \bar{Z}_{t+1}^N} I_{t+1}^{\mathbb{P}, \bar{z}_{t+1}^N, \gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1}) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} \middle| \mathcal{F}_t^S \right] = \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}} \left[ \bar{z}_{t+1}^{t, N} \bar{I}_{t+1}^{\mathbb{P}, \gamma_{t+2}^N}(S_0^{t+1}) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} \middle| \mathcal{F}_t^S \right] = \end{aligned} \quad (44)$$

$$= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{I}_{t+1}^{\mathbf{P}, \gamma_{t+2}^N} (S_0^{t+1}) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right].$$

Note that the left-hand side of (44) does not depend on the measure  $\mathbf{Q}$ . Hence, it follows from (44) that  $\mathbf{P}$ -a.s.

$$\bar{I}_t^{\mathbf{P}, \gamma_{t+1}^N} (S_0^t) \geq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{I}_{t+1}^{\mathbf{P}, \gamma_{t+2}^N} (S_0^{t+1}) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right].$$

This inequality can be sharpened as follows:

$$\begin{aligned} \bar{I}_t^{\mathbf{P}, \gamma_{t+1}^N} (S_0^t) &\geq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_{t+2}^N \in D_{t+2}^N} \bar{I}_{t+1}^{\mathbf{P}, \gamma_{t+2}^N} (S_0^{t+1}) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right] \geq \quad (45) \\ &\geq \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_{t+1} \in D_{t+1}} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_{t+2}^N \in D_{t+2}^N} \bar{I}_{t+1}^{\mathbf{P}, \gamma_{t+2}^N} (S_0^{t+1}) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right]. \quad \mathbf{P} \text{ - a.s.} \end{aligned}$$

Applying the formula  $\bar{V}_{t+1} = \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_{t+2}^N \in D_{t+2}^N} \bar{I}_{t+1}^{\mathbf{P}, \gamma_{t+2}^N} (S_0^{t+1})$  to inequality (45), we obtain  $\mathbf{P}$ -a.s.

$$\bar{I}_t^{\mathbf{P}, \gamma_{t+1}^N} (S_0^t) \geq \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_{t+1} \in D_{t+1}} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{V}_{t+1} e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right]. \quad (46)$$

The right-hand side of (46) does not depend on  $\gamma_{t+1} \in D_{t+1}$ . So (46) imply (42).

Now let us show that for any  $t \in N_0$ , the following inequality holds  $\mathbf{P}$ -a.s.:

$$\bar{V}_t \leq \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_{t+1}} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{V}_{t+1} e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right]. \quad (47)$$

Since  $I_{t+1}^{\mathbf{P}, \bar{z}_{t+1}^N, \gamma_{t+2}^N} (S_0^{t+1}) \leq \bar{I}_{t+1}^{\mathbf{P}, \gamma_{t+2}^N} (S_0^{t+1})$   $\mathbf{P}$ -a.s., it follows from Girsanov's theorem that for any  $\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N$  the inequalities hold  $\mathbf{P}$ -a.s.

$$\begin{aligned} I_t^{\mathbf{P}, \bar{z}_t^N, \gamma_{t+1}^N} (S_0^t) &\leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{I}_{t+1}^{\mathbf{P}, \gamma_{t+2}^N} (S_0^{t+1}) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right] \leq \quad (48) \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{I}_{t+1}^{\mathbf{P}, \gamma_{t+2}^N} (S_0^{t+1}) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right]. \end{aligned}$$

The right-hand side of (48) does not depend on  $\mathbf{Q}$ . This implies that for any  $\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N$ , the following inequality holds  $\mathbf{P}$ -a.s.:

$$\bar{I}_t^{\mathbf{P}, \gamma_{t+1}^N} (S_0^t) \leq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{I}_{t+1}^{\mathbf{P}, \gamma_{t+2}^N} (S_0^{t+1}) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right]. \quad (49)$$



Note that: (1) for any  $\gamma_{t+1}^N \in D_{t+1}^N$ , we have  $\bar{V}_t \leq \bar{I}_t^{\mathbb{P}, \gamma_{t+1}^N}(S_0^t)$  P-a.s.; (2) it follows from the definition of essential infimum that for any  $\varepsilon > 0$ , there exists  $\bar{\gamma}_{t+1}^{\varepsilon, N} \triangleq \{\bar{\gamma}_s^\varepsilon\}_{s \in \{t+1, \dots, N\}} \in D_{t+1}^N$ , where  $\bar{\gamma}_s^\varepsilon$  is an  $\mathcal{F}_{s-1}^S$ -measurable  $d$ -dimensional vector  $\bar{\gamma}_{t+1}^{\varepsilon, N}$  (which depends on  $\varepsilon$ ) such that for any  $t \in N_0$ ,

$$\bar{V}_t \geq \bar{I}_t^{\mathbb{P}, \bar{\gamma}_{t+1}^{\varepsilon, N}}(S_0^t) - \varepsilon \quad \mathbb{P} \text{ -a.s.}$$

Thus (49) can be rewritten as

$$\begin{aligned} \bar{V}_t &\leq \bar{I}_t^{\mathbb{P}, \bar{\gamma}_{t+1}^{\varepsilon, N}}(S_0^t) \leq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \bar{I}_{t+1}^{\mathbb{P}, \bar{\gamma}_{t+2}^{\varepsilon, N}}(S_0^{t+1}) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right] \leq \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \left[ (\bar{V}_{t+1} + \varepsilon) e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right] \leq \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \bar{V}_{t+1} e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right] + \\ &\quad + \varepsilon \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right]. \end{aligned} \quad (50)$$

We consider the second term in the left-hand side of (50). As  $\gamma_{t+1} \in D_{t+1}$ , we have for any  $t \in N_1$ ,

$$0 \leq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \left[ e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right] < \infty.$$

The constant  $\varepsilon > 0$  is arbitrary. Hence the following inequality holds for any  $\gamma_{t+1} \in D_{t+1}$  and  $t \in N_1$ :

$$\bar{V}_t \leq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \bar{V}_{t+1} e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right]. \quad (51)$$

As the left-hand side of (51) does not depend on  $\gamma_{t+1} \in D_{t+1}$ , we obtain (47).

Inequalities (42), (47) imply recurrent relation (5). Obviously,  $\bar{V}_t|_{t=N} = e^{f_N(S_\bullet)}$ . This completes the proof of the theorem.

3.1.4. PROOF OF COROLLARY 1. (1) For any  $\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N$ , we have

$$\operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \bar{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \geq \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \bar{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \quad \mathbb{P} \text{ -a.s.}$$

Therefore for any  $t \in N_0$ ,  $\gamma \in D_t$  and  $\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N$ , the following inequality holds

$$\operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbb{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \bar{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \geq \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \mathbf{E}^{\mathbb{Q}} \left[ \bar{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right]. \quad \mathbb{P} \text{ -a.s.}$$

The combination of (5) and of the last inequality implies (6).

(2) The second inequality immediately follows from (5) and the definition of essential supremum. This completes the proof of the corollary.

3.2. PROOF OF THEOREM 2. Let us prove that for any  $t \in N_1$ , we have

$$\bar{V}_t \leq e^{c_2} \quad \mathbf{P} \text{--a.s.} \quad (52)$$

We proceed by induction. It obviously follows from the conditions of Theorem 2 that

$$\bar{V}_t|_{t=N} \leq e^{c_2}.$$

To prove (52) it is necessary to show that if  $\bar{V}_t \leq e^{c_2}$ , then  $\bar{V}_{t-1} \leq e^{c_2}$  for any  $t \in N_1$ . Suppose that  $\bar{V}_t \leq e^{c_2}$ . It follows from Corollary 1 that for any  $\gamma \in D_t$  we have  $\mathbf{P}$ -a.s.

$$\begin{aligned} \bar{V}_{t-1} &= \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [\bar{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S] \leq \\ &\leq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [\bar{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S]. \end{aligned}$$

We can sharpen the last inequality because  $0 \in D_t$ . We have  $\mathbf{P}$ -a.s.

$$\bar{V}_{t-1} \leq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [\bar{V}_t | \mathcal{F}_{t-1}^S] \leq e^{c_2}.$$

So, the main step of induction is proved, i.e., it is proved that (52) is true for any  $t \in N_1$ .

Now let us show that for any  $t \in N_1$ ,

$$\bar{V}_t \geq e^{-c_2} \quad \mathbf{P} \text{--a.s.} \quad (53)$$

We again proceed by induction, and it obviously follows from the conditions of the theorem that

$$\bar{V}_t|_{t=N} \geq e^{-c_2} \quad \mathbf{P} \text{--a.s.}$$

Hence it is necessary to prove that if  $\bar{V}_t \geq e^{-c_2}$ , then  $\bar{V}_{t-1} \geq e^{-c_2}$  for any  $t \in N_1$ . Suppose that  $\bar{V}_t \geq e^{-c_2}$ . It follows from Corollary 1 that  $\mathbf{P}$ -a.s.

$$\begin{aligned} \bar{V}_{t-1} &= \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [\bar{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S] \geq \\ &\geq \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [\bar{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S] \geq \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [e^{-c_2} e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S] = \\ &= e^{-c_2} \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S]. \end{aligned} \quad (54)$$

We shall need the following notation. Let

$$G_{\mathbf{Q}}(t, S_0^{t-1}, -\gamma) \triangleq \ln \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [\exp \{ -(\gamma, \Delta S_t) \} | \mathcal{F}_{t-1}^S]$$

for any  $t \in N_1$ ,  $\gamma \in \mathbb{R}^d$ , and  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ .  $G_{\mathbf{Q}}(t, S_0^{t-1}, -\gamma)$  is called the *cumulant* of a random variable  $\Delta S_t$  with respect to a probability measure  $\mathbf{Q}$  and the  $\sigma$ -algebra  $\mathcal{F}_{t-1}$  (see [17], [18]).

Thence (54) can be rewritten as P-a.s.

$$\bar{V}_{t-1} \geq e^{-c_2} \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S] = e^{-c_2} \operatorname{ess\,inf}_{\gamma \in D_t} e^{G_{\mathbf{Q}}(t, S_0^{t-1}, -\gamma)}, \quad (55)$$

where  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$  is arbitrary.

According to the conditions of the theorem, we have  $\mathfrak{R}_N \cap \mathfrak{M}_N \neq \emptyset$ . So there exists a measure  $\tilde{\mathbf{Q}} \in \mathfrak{R}_N \cap \mathfrak{M}_N$  such that for any  $\gamma \in D_t$  the cumulant satisfies the condition  $G_{\tilde{\mathbf{Q}}}(t, S_0^{t-1}, -\gamma) \geq 0$  and is a convex function of  $\gamma$ . Hence it follows from (55) that

$$\bar{V}_{t-1} \geq e^{-c_2} \quad \mathbf{P} \text{--a.s.}$$

Consequently, the main step of induction is proved. Also, (53) is proved for any  $t \in N_1$ . Thus the proof of item 2 of the lemma follows from (53) and (54). The proof is complete.

3.3. To prove Theorem 3 we shall need two auxiliary assertions.

3.3.1.

**Lemma 1** *Suppose the following conditions are satisfied:*

- (1)  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N \cap \mathfrak{M}_N$ ;
- (2)  $\{S_t\}_{0 \leq t \leq N}$  is a sequence of  $d$ -dimensional variables, where for any  $t \in N_1$  variables  $\Delta S_n^{(i)}$  are linearly independent,  $i = \overline{1, d}$ ;
- (3)  $\gamma_t$  is a nontrivial bounded  $d$ -dimensional vector.

*Then it is Q-a.s. true that*

$$\mathbf{Q}((\gamma_t, \Delta S_t) > 0 | \mathcal{F}_{t-1}^S) > 0, \quad \mathbf{Q}((\gamma_t, \Delta S_t) < 0 | \mathcal{F}_{t-1}^S) > 0. \quad (56)$$

**PROOF OF LEMMA 1.** According to conditions of the Lemma the measure  $\mathbf{Q}$  is a martingale one. Therefore for any  $\gamma'_t \in \mathbb{R}^d$  we have inequality  $1 \leq \exp \{G_{\mathbf{Q}}(t, S_0^{t-1}, -\gamma'_t)\} = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [e^{-(\gamma'_t, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}]$  Q-a.s., where  $G_{\mathbf{Q}}(t, S_0^{t-1}, -\gamma'_t)$  is a cumulant with respect to the measure  $\mathbf{Q}$ . A cumulant  $G_{\mathbf{Q}}$  is a convex eigenfunction. So, there exists  $\gamma_t \in \mathbb{R}^d$  such that  $\exp \{G_{\mathbf{Q}}(t, S_0^{t-1}, -\gamma_t)\} > 1$  Q-a.s.

Note that Q-a.s.

$$\begin{aligned} e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} &= e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} [1_{\{(\gamma_t, \Delta S_t) < 0\}} + 1_{\{(\gamma_t, \Delta S_t) \geq 0\}}] \leq \\ &\leq e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} 1_{\{(\gamma_t, \Delta S_t) < 0\}} + 1. \end{aligned}$$

Thus,  $1 < \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [1 + e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} 1_{\{(\gamma_t, \Delta S_t) < 0\}} | \mathcal{F}_{t-1}]$  Q-a.s., which can be rewritten as follows Q-a.s.

$$0 < \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [e^{-(\gamma_t, \Delta S_t)} 1_{\{(\gamma_t, \Delta S_t) < 0\}} | \mathcal{F}_{t-1}]. \quad (57)$$

Let us define  $\tilde{\mathbf{Q}}(A) \triangleq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} 1_A(\omega) \exp \left\{ \sum_{i=1}^N [-(\gamma_i, \Delta S_i) - G_{\mathbf{Q}}(i, S_0^{i-1}, -\gamma_i)] \right\}$ , where  $A \in \mathcal{F}_N^S$  is arbitrary. Obviously,  $\tilde{\mathbf{Q}} \sim \mathbf{Q}$ . Then due to Girsanov's theorem inequality (57) takes the form  $\mathbf{Q}$ -a.s.

$$\begin{aligned} 0 &< \exp \{G_{\mathbf{Q}}(t, S_0^{t-1}, -\gamma_t)\} \mathbf{E}^{\tilde{\mathbf{Q}}} [1_{\{(\gamma_t, \Delta S_t) < 0\}} | \mathcal{F}_{t-1}] = \\ &= \exp \{G_{\mathbf{Q}}(t, S_0^{t-1}, -\gamma_t)\} \tilde{\mathbf{Q}} [(\gamma_t, \Delta S_t) < 0 | \mathcal{F}_{t-1}]. \end{aligned}$$

It means that  $0 < \tilde{\mathbf{Q}} [(\gamma_t, \Delta S_t) < 0 | \mathcal{F}_{t-1}]$   $\mathbf{Q}$ -a.s. As measures  $\mathbf{Q}$  and  $\tilde{\mathbf{Q}}$  are equivalent, we have  $0 < \mathbf{Q} [(\gamma_t, \Delta S_t) < 0 | \mathcal{F}_{t-1}]$   $\mathbf{Q}$ -a.s.

The same reasoning proves, that  $0 < \mathbf{Q} [(\gamma_t, \Delta S_t) > 0 | \mathcal{F}_{t-1}]$   $\mathbf{Q}$ -a.s. The proof is complete.

### 3.3.2.

**Remark 9** (1) Condition (2) of Lemma 1 is not a crucial one. Indeed, suppose that for some moment  $t' \in N_1$  variables  $\Delta S_{t'}^{(i)}$ ,  $i = \overline{1, d}$ , are not independent and conditional probability  $\mathbf{Q}((\bar{\gamma}_{t'}, \Delta S_{t'}) = 0 | \mathcal{F}_{t'-1}^S) = 1$   $\mathbf{Q}$ -a.s. As  $\bar{\gamma}_{t'}$  is arbitrary, we have  $\Delta S_{t'} = 0$   $\mathbf{Q}$ -a.s. Obviously, the last equality means that  $\mathcal{F}_{t'}^S = \mathcal{F}_{t'-1}^S$  and  $\bar{V}_{t'} = \bar{V}_{t'-1}$   $\mathbf{Q}$ -a.s. Hence moment  $t'$  might be skipped.

(2) Suppose the assumptions of Lemma 1 are satisfied and  $\bar{\gamma}_t \triangleq \frac{\gamma_t}{|\gamma_t|}$ , where  $\gamma_t$  is a nontrivial bounded  $d$ -dimensional predictable vector. Then any  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N \cap \mathfrak{M}_N$  has regular version of conditional distribution  $\mathbf{Q}((\bar{\gamma}_t, \Delta S_t) \leq x | \mathcal{F}_{t-1}^S)$ . This and (56) means that for any  $t \in N_1$  there are positive constants  $c_3$  and  $c_4$  such that  $\mathbf{Q}$ -a.s.

$$\mathbf{Q}(-(\gamma_t, \Delta S_t) \geq c_3 |\gamma_t| | \mathcal{F}_{t-1}^S) \geq c_4 > 0. \quad (58)$$

### 3.3.3. Let us denote

$$\Phi(t, \gamma, \omega) \triangleq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [\bar{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S], \quad (59)$$

where  $t \in N_1$ ,  $\gamma \in D_t$  are arbitrary.

**Lemma 2** Suppose the assumptions of Theorem 2 are satisfied. Then for any  $t \in N_1$  the following assertions are true:

(1) there are positive constants  $c_3$  and  $c_4$  such that  $\mathbf{Q}$ -a.s.

$$\Phi(t, \gamma, \omega) \geq c_3 e^{c_4 |\gamma| - c_2}; \quad (60)$$

(2) there is version of the function  $\Phi(t, \gamma, \omega)$  such that for any  $\omega \in \Omega$  this version is convex continuous function of  $\gamma$ .

PROOF OF LEMMA 2. (1) From (59), Corollary 1 and Theorem 2 it follows that for any  $\gamma \in D_{t+1}$  and  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N \cap \mathfrak{M}_N$  the following inequalities hold  $\mathbf{Q}$ -a.s.

$$\begin{aligned} \Phi(t, \gamma, \omega) &\geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [\bar{V}_{t+1} e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S] \geq e^{-c_2} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S] \geq \\ &\geq e^{-c_2} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [e^{-(\gamma, \Delta S_{t+1})} 1_{\{-(\gamma, \Delta S_{t+1}) \geq c_3 |\gamma|\}} | \mathcal{F}_t^S] \geq \\ &\geq e^{c_3 |\gamma| - c_2} \mathbf{Q} (-(\gamma, \Delta S_{t+1}) \geq c_3 |\gamma| | \mathcal{F}_t^S). \end{aligned} \quad (61)$$

Inequality (60) follows from (61) and (58) (see Remark 9).

(2) From (59), Corollary 1, Theorem 2, properties of essential supremum and because  $e^{-(\gamma, x)}$  is convex it follows that for any  $t \in N_1$  the following inequality is true  $\mathbf{P}$ -a.s.

$$\Phi(t, \gamma^\alpha, \omega) \leq \alpha \Phi(t, \gamma_1, \omega) + (1 - \alpha) \Phi(t, \gamma_2, \omega), \quad (62)$$

where  $\alpha \in [0, 1]$ ,  $\gamma^\alpha \triangleq \alpha \gamma_1 + (1 - \alpha) \gamma_2$ ,  $\gamma_1, \gamma_2 \in D_t$ .

Obviously,  $\Phi(t, \gamma, \omega)$  is  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \otimes \mathcal{F}_t^S$ -measurable random variable and is finite  $\mathbf{P}$ -a.s. for any  $\gamma \in D_t$ .

Let us denote: (i)  $L_\infty^t \triangleq L_\infty^t(\mathbb{R}^{dt}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{dt}), P)$  is normed space of  $\mathbf{P}$ -a.s. finite random variables;

(ii)  $\mathfrak{L}_t^\infty \triangleq \mathfrak{L}_t^\infty(\mathbb{R}^{dt}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{dt}))$  is normed space of measurable functions with uniform norm.

Suppose reflection  $\rho_t : L_\infty^t \rightarrow \mathfrak{L}_t^\infty$  is lifting [15], i.e. if  $\varphi_t \in L_\infty^t$  then:

(i)  $\rho_t(\varphi_t) = \varphi_t$   $\mathbf{P}$ -a.s.;

(ii) if  $\varphi_t(\omega) = 0$   $\mathbf{P}$ -a.s. then for any  $\omega$  we have  $\rho_t(\varphi_t(\omega)) = 0$ ;

(iii)  $\rho(1_{\{\mathbb{R}^{dt}\}}(\omega)) = 1_{\{\mathbb{R}^{dt}\}}(\omega)$ .

It is well known [15] that: (i) in this case lifting exists, (ii)  $\|\rho_t\| = 1$  and  $\rho_t^2 = \rho_t$ .

Obviously, for any  $t \in N_1$  and  $\gamma \in D_t$  we have  $\Phi(t, \gamma, \omega) \in L_\infty^t$  and  $\rho_t(\Phi(t, \gamma, \omega)) \in \mathfrak{L}_t^\infty$ . So, from (60) it follows that for any  $(t, \omega)$  function  $\rho_t(\Phi(t, \gamma, \omega))$  is convex non-negative function of  $\gamma$ . Consequently, for any  $(t, \omega)$  it is continuous function of  $\gamma$ . The proof is complete.

3.3.4. PROOF OF THEOREM 3. From (58) (see Remark 9) and Lemma 2 it follows that:

(1) for each  $t$  and  $\omega$  function  $\Phi(t, \gamma, \omega)$  is a  $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ -measurable function of  $\gamma$  and

$$\lim_{|\gamma| \rightarrow \infty} \Phi(t, \gamma, \omega) = \infty \quad \mathbf{P}\text{-a.s.}; \quad (63)$$

(2) for each  $t$  and  $\gamma$  function  $\Phi(t, \gamma, \omega)$  is  $\mathcal{F}_t^S$ -measurable.

Note that from definition of essential infimum, Theorems 1, 2 and definition of the sequence  $\{\Phi(t, \gamma, \omega)\}_{t \in N_1}$  it follows that there is minimizing

sequence  $\{\gamma_{t+1}^{(k)}\}_{k \geq 1}$  such that P-a.s.

$$\begin{aligned} e^{-c_2} &\leq \bar{V}_t = \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_{t+1} \in D_{t+1}} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{V}_{t+1} e^{-(\gamma_{t+1}, \Delta S_{t+1})} \middle| \mathcal{F}_t^S \right] = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{V}_{t+1} e^{-(\gamma_{t+1}^{(k)}, \Delta S_{t+1})} \middle| \mathcal{F}_t^S \right] \leq e^{c_2}. \end{aligned} \quad (64)$$

We will prove Theorem 3 by contradiction. According to (64) this means that there is no  $\mathcal{F}_t^S$ -measurable finite  $d$ -dimensional vector  $\gamma_{t+1}^*$  such that (9) is true. Consequently,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |\gamma_{t+1}^{(k)}| = \infty. \quad (65)$$

Taking into account (64) and (63) we get P-a.s.

$$\begin{aligned} e^{c_2} &\geq \bar{V}_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{V}_{t+1} e^{-(\gamma_{t+1}^{(k)}, \Delta S_{t+1})} \middle| \mathcal{F}_t^S \right] = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(t, \gamma_{t+1}^{(k)}, \omega) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} c_4 e^{c_3 |\gamma_{t+1}^{(k)}| - c_2} = \infty. \end{aligned} \quad (66)$$

It is a contradiction, which means that our assumption (65) is wrong. That is why from  $\{\gamma_{t+1}^{(k)}\}_{k \geq 1}$  it is possible to pick out converging subsequence  $\{\gamma_{t+1}^{(k_l)}\}_{l \geq 1}$  such that

$$\gamma_{t+1}^* \triangleq \lim_{l \rightarrow \infty} \gamma_{t+1}^{(k_l)}. \quad (67)$$

Obviously,  $\gamma_{t+1}^*$  is a  $\mathcal{F}_t^S$ -measurable  $d$ -dimensional vector. Indeed, suppose  $B \subseteq \mathbb{R}^d$  is an open sphere. For any  $t$  and  $\omega$  it is true that  $\Phi(t, \gamma, \omega)$  is continuous function of  $\gamma$ . So, we have

$$\{\gamma_t^* \in B\} = \bigcup_{q \in Q^d \cap B} \bigcap_{q' \in Q^d \setminus B} \{\Phi(t, q, \omega) < \Phi(t, q', \omega)\},$$

where  $Q^d$  is a space of  $d$ -dimensional vectors whose components are rational numbers.

Let us prove that  $\gamma_{t+1}^* \in D_{t+1}$ . From Corollary 1, Theorem 2, Lemma 2 and the Fatou Lemma it follows that P-a.s.

$$\begin{aligned} e^{c_2} &\geq \bar{V}_t \geq \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{V}_{t+1} e^{-(\gamma_{t+1}^{(k_l)}, \Delta S_{t+1})} \middle| \mathcal{F}_t^S \right] \geq \\ &\geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{V}_{t+1} e^{-(\gamma_{t+1}^*, \Delta S_{t+1})} \middle| \mathcal{F}_t^S \right] \geq e^{-c_2} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ e^{-(\gamma_{t+1}^*, \Delta S_{t+1})} \middle| \mathcal{F}_t^S \right]. \end{aligned}$$

From these inequalities it immediately follows that  $e^{2c_2} \geq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ e^{-(\gamma_{t+1}^*, \Delta S_{t+1})} \middle| \mathcal{F}_t^S \right]$ . The proof is complete.

3.4. PROOF OF THEOREM 4. From Theorem 3 we obtain formula (10) for any  $t \in N_1$  and  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ . The measures  $\mathbf{Q}$  and  $\mathbf{P}$  are equivalent. Therefore, recalling the remarks of Subsection 3.1.1 and using Girsanov's theorem, we rewrite (10) as  $P$ -a.s.

$$\bar{V}_{t-1} \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] = \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ \frac{z_t}{z_{t-1}} \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right], \quad (68)$$

where  $z_t = \frac{d\mathbf{Q}_t}{d\mathbf{P}_t}(\omega)$ .

Let  $\{g_t\}_{t \in N_1}$  be a sequence of random variables such that  $g_t$  is an arbitrary  $\mathcal{F}_t^S$ -measurable bounded random variable and  $\{z_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$  admits the representation

$$z_t = z_{t-1} \frac{g_t}{\mathbf{E}^{\mathbf{P}}(g_t | \mathcal{F}_{t-1}^S)}, \quad z_t|_{t=0} = 1. \quad (69)$$

Obviously,  $\{z_t\}_{t \in N_0} \in \bar{Z}_0^N$  and for any  $t \in N_0$ , the random variable  $z_t$  is  $\mathcal{F}_t^S$ -measurable and  $0 < z_t < \infty$   $\mathbf{P}$ -a.s. Therefore, combining (68) with (69), we obtain

$$\bar{V}_{t-1} \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[g_t | \mathcal{F}_{t-1}^S] \geq \mathbf{E}^{\mathbf{P}}[g_t \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S] \quad \mathbf{P} \text{ -a.s.}$$

Hence, we have

$$0 \geq \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left[ g_t \left( \frac{\bar{V}_t}{\bar{V}_{t-1}} e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} - 1 \right) | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \quad \mathbf{P} \text{ -a.s.} \quad (70)$$

Since

$$\exp \{ \Delta \ln \bar{V}_t - (\gamma_t^*, \Delta S_t) \} - 1 - [ \Delta \ln \bar{V}_t - (\gamma_t^*, \Delta S_t) ] \geq 0 \quad \mathbf{P} \text{ -a.s.},$$

from (70) we obtain the inequalities  $\mathbf{P}$ -a.s.

$$\begin{aligned} 0 \geq \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left\{ g_t \left[ e^{\Delta \ln \bar{V}_t - (\gamma_t^*, \Delta S_t)} - 1 - (\Delta \ln \bar{V}_t - (\gamma_t^*, \Delta S_t)) + \Delta \ln \bar{V}_t - \right. \right. \\ \left. \left. - (\gamma_t^*, \Delta S_t) \right] | \mathcal{F}_{t-1}^S \right\} \geq \mathbf{E}^{\mathbf{P}} \left\{ g_t [ \Delta \ln \bar{V}_t - (\gamma_t^*, \Delta S_t) ] | \mathcal{F}_{t-1}^S \right\}. \end{aligned}$$

Since  $g_t$  is arbitrary, we have  $\mathbf{P}$ -a.s.

$$-\Delta C_t^* \triangleq \Delta \ln \bar{V}_t - (\gamma_t^*, \Delta S_t) \leq 0. \quad (71)$$

It follows from (71) that the  $\mathcal{F}_t^S$ -measurable random variable  $\Delta C_t^*$  defined by (11) exists for any  $t \in N_1$ . It follows from (71) that for any  $t \in N_1$ , we

have  $\Delta C_t^* \geq 0$  P-a.s. Hence,  $C_t^* \geq C_s^*$  P-a.s. for any  $t \geq s$ . It follows from (11) and our remark that P-a.s.

$$\begin{aligned} C_N^* &= \sum_{i=1}^N \Delta C_i^* = \sum_{i=1}^N [(\gamma_i^*, \Delta S_i) - \Delta \ln \bar{V}_i] = \\ &= \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i) - \ln \bar{V}_N + \ln \bar{V}_0. \end{aligned} \quad (72)$$

As  $\ln \bar{V}_N = f_N(S_\bullet)$  from the last equality we obtain (12). This completes the proof of the theorem.

3.5. PROOF OF THEOREM 5. According to theorem's conditions  $\xi$  is P-a.s. bounded, so for any  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$  expectation  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\xi$  is also bounded, consequently,  $\sup_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\xi$  is finite. Thus there is sequence  $\{\mathbf{Q}_k\}_{k \geq 1}$  with  $\mathbf{Q}_k \in \mathfrak{R}_N$  for any  $k \geq 1$  such, that  $\sup_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}}\xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}_k}\xi$ .

For any  $A \in \mathcal{F}$  let us define  $\lambda(A) \triangleq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{Q}_k(A)}{2^i}$ . Obviously,  $\lambda$  is a probability measure and  $\mathbf{Q}_k \ll \lambda$  for any  $k \geq 1$ . Hence for any  $k \geq 1$  there exists random variable  $0 \leq X_k \triangleq \frac{d\mathbf{Q}_k}{d\lambda}$  called density of  $\mathbf{Q}_k$  with respect to  $\lambda$ ,  $\mathbf{E}^\lambda X_k = 1$  [18]. Then  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}_k}\xi = \mathbf{E}^\lambda X_k \xi$ ,  $k \geq 1$ .

Suppose  $\{X_k\}_{k \geq 1}$  is weakly relatively compact in  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$ . In that case the theorem of Eberlein-Smulian [3] guarantees existence of subsequence  $\{X_{k_m}\}_{m \geq 1}$  with weak limit in topology of  $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$ , i.e. there exists  $X \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$  such, that for any  $Y \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$ :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}^\lambda X_{k_m} Y = \mathbf{E}^\lambda X Y. \quad (73)$$

We define  $\mathbf{Q}^*(A) \triangleq \mathbf{E}^\lambda X 1_{\{A\}}$ ,  $A \in \mathcal{F}$ . Equality (73) holds true for P-a.s. bounded  $\xi$ , that is why

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}^\lambda X_{k_m} \xi = \mathbf{E}^\lambda X \xi = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} \xi = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}_{k_m}} \xi. \quad (74)$$

As  $\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}_k} \xi\}_{k \geq 1}$  has a limit, so  $\{\mathbf{E}^{\mathbf{Q}_{k_m}} \xi\}_{m \geq 1}$  has the same limit. Thus we have

$$\sup_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \xi = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}_k} \xi = \lim_{m \rightarrow \infty} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}_{k_m}} \xi = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} \xi. \quad (75)$$

The proof is complete.

3.6. In this subsection, we prove Theorem 6.

3.6.1. To prove Theorem 6, we need the following lemma.



**Lemma 3** *Suppose that the assumptions of Theorem 4 are satisfied. Then the following assertions are true:*

(1)

$$0 \leq \exp \left\{ f_N(S_\bullet) - \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i) \right\} \leq e^{c_2} \quad \mathbf{P} - a.s.; \quad (76)$$

(2) for any  $t \in N_1$ ,

$$0 \leq \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} \leq e^{c_2} \quad \mathbf{P} - a.s.; \quad (77)$$

PROOF OF LEMMA 3. (1) We first prove (76). From (12) we obtain

$$\bar{V}_0 e^{-C_N^*} = \exp \left\{ f_N(S_\bullet) - \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i) \right\} \quad \mathbf{Q} - a.s. \quad (78)$$

As  $e^{-c_2} \leq \bar{V}_0 \leq e^{c_2}$  and  $C_N^* \geq 0$   $\mathbf{Q}$ -a.s., (76) follows from (78).

(2) Let us prove inequality (77). The left inequality in (77) is obvious. So we have to prove right inequality in (77). From (11) it follows that  $\frac{\bar{V}_t}{\bar{V}_{t-1}} e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t) + \Delta C_t^*} = 1$   $\mathbf{Q}$ -a.s. for any  $t \in N_1$  and  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ . We know that  $\Delta C_t^* \geq 0$   $\mathbf{Q}$ -a.s. So, from the last equality it follows that  $\bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} \leq \bar{V}_{t-1}$   $\mathbf{Q}$ -a.s. That is why from Theorem 2 the right inequality in (77) follows. The proof is complete.

3.6.2. PROOF OF THEOREM 6. Now let us prove equality (14). Let

$$\xi_t(\omega) = \eta_{t-1} \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)},$$

where  $\eta_{t-1}$  is an  $\mathcal{F}_{t-1}^S$ -measurable bounded random variable,  $(\bar{V}_t, \mathcal{F}_t^S)_{t \in N_0}$  satisfies recurrent relation (5) and  $(\gamma_t^*, \mathcal{F}_{t-1}^S)_{t \in N_1}$  is defined by (9). It follows from the second assertion of Lemma 3 that for any  $t \in N_1$ , the  $\bar{V}_t$  and  $\bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)}$  are  $\mathcal{F}_t^S$  measurable bounded random variables. Consider  $\sup_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \eta_{t-1} \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)}$ . On the one hand, the properties of the essential supremum and the conditional expectation  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [\bullet | \mathcal{F}_{t-1}^S]$  and also Theorem 3 imply that

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \eta_{t-1} \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} &= \sup_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \eta_{t-1} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [\bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S] = \\ &= \sup_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \eta_{t-1} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [\bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S] = \sup_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \eta_{t-1} \bar{V}_{t-1}. \end{aligned} \quad (79)$$

Further, taking (75) into account, we obtain the following equalities

$$\sup_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \eta_{t-1} \bar{V}_{t-1} = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} \eta_{t-1} \bar{V}_{t-1}, \quad (80)$$

$$\begin{aligned} & \sup_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \eta_{t-1} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] = \\ & = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} \left\{ \eta_{t-1} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \right\}. \end{aligned} \quad (81)$$

Since the random variable  $\eta_{t-1}$  is arbitrary, it follows from (79), (80), and (81) that for any  $t \in N_1$ ,

$$\bar{V}_{t-1} = \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \quad \mathbf{Q}^* - \text{a.s.} \quad (82)$$

On the other hand, (74)–(75) and the properties of the conditional expectation imply the equalities

$$\begin{aligned} & \sup_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \eta_{t-1} \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^{(n)}} \eta_{t-1} \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} = \\ & = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{E}^\lambda \eta_{t-1} \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} \frac{d\mathbf{Q}^{(n)}}{d\lambda} (\omega) = \\ & = \mathbf{E}^\lambda \eta_{t-1} \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} \chi(\omega) = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} \eta_{t-1} \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} = \\ & = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} \eta_{t-1} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} \left[ \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right]. \end{aligned} \quad (83)$$

Using (79), (80) and (83), we obtain

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} \eta_{t-1} \bar{V}_{t-1} = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} \eta_{t-1} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} \left[ \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right]. \quad (84)$$

As  $\eta_{t-1}$  is arbitrary, taking (84) into account, we obtain, for any  $t \in N_1$ ,

$$\bar{V}_{t-1} = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} \left[ \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \quad \mathbf{Q}^* - \text{a.s.} \quad (85)$$

Obviously,  $\bar{V}_t|_{t=N} = \exp\{f_N(S_\bullet)\}$ . This and recurrent relation (85) imply equality for any  $t \in N_1$

$$\bar{V}_t = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} \left[ \exp \left\{ f_N(S_\bullet) - \sum_{i=t+1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i) \right\} | \mathcal{F}_t^S \right] = I_t^{\mathbf{Q}^*, \gamma_{t+1}^{*N}}(S_0) \quad \mathbf{Q}^* - \text{a.s.}$$

Thus, equality (3) is proved. So, there are the worst-case measure  $\mathbf{Q}^*$  and the minimax strategy  $\{\gamma_t^*\}_{t \in N_1}$ , i.e. there exists the minimax bistrategy  $(\mathbf{Q}^*, \gamma_1^{*N})$ . The proof is complete.

**3.7. PROOF OF COROLLARY 2.** For convenience of presentation let us denote  $G_t \triangleq \{\omega \in \Omega : \Delta \ln \bar{V}_t(\omega) = (\gamma_t^*, \Delta S_t)(\omega) - \Delta C_t^*(\omega)\}$ . Obviously,  $G_t$  is a  $\mathcal{F}_t^S$ -measurable set. From the proof of Theorem 5 it follows that there are sequence  $\{\mathbf{Q}^{(n)}\}_{n \geq 1}$ ,  $\mathbf{Q}^{(n)} \in \mathfrak{R}_N$ , and probability measure  $\mathbf{Q}^*$  such that for any  $A \in \mathcal{F}_N^S$  we have  $\mathbf{Q}^*(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{Q}^{(n)}(A)$ . According to Theorem 4

$Q^{(n)}(G_t) = 1$  for any  $n \geq 1$ . Hence  $Q^*(G_t) = \lim_{n \rightarrow \infty} Q^{(n)}(G_t) = 1$ . The proof is complete.

3.8. PROOF OF THEOREM 7. (1) Suppose that assertion (1) holds. Let us prove assertion (2). Let  $Q^*$  be the worst-case probability distribution. We must prove equality (14). Let us assume the converse, i.e., suppose that there is  $t \in N_1$  such that the following inequality holds:

$$Q^* \left\{ \bar{V}_{t-1} > E^{Q^*} \left[ \bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \right\} > 0.$$

Therefore,  $\bar{V}_t > I_t^{Q^*, \gamma_{t+1}^*}(S_0^t)$ . This means that  $Q^*$  is not the worst-case measure. This contradiction proves the assertion.

(2) Suppose that assertion (2) holds. Let us prove assertion (3). Let us multiply both sides of (14) by  $\exp \left\{ - \sum_{i=1}^{t-1} (\gamma_i^*, \Delta S_i) \right\}$ . Taking the definition of the sequence  $\{\bar{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$  into account and using the properties of the conditional expectations, we conclude that

$$\begin{aligned} \bar{\mu}_{t-1} &= \bar{V}_{t-1} \exp \left\{ - \sum_{i=1}^{t-1} (\gamma_i^*, \Delta S_i) \right\} = \\ &= E^{Q^*} \left[ \bar{V}_t \exp \left\{ - \sum_{i=1}^t (\gamma_i^*, \Delta S_i) \right\} | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] = E^{Q^*} [\bar{\mu}_t | \mathcal{F}_{t-1}^S] \quad Q - \text{a.s.} \end{aligned}$$

It follows from Lemma 3 and Theorem 3 that  $E^{Q^*} \bar{\mu}_t < \infty$ . Hence, the sequence  $\{\bar{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$  is a martingale with respect to  $Q^*$ .

(3) Suppose that (3) holds. Let us prove (1). It follows from the definition of the  $S$ -estimating sequence  $\{\bar{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$  and the assumptions of the theorem that  $Q^*$ -a.s.

- (a)  $\bar{\mu}_N = \exp \left\{ f_N(S_\bullet) - \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i) \right\}$ ;
- (b)  $\bar{\mu}_0 = \bar{V}_0 = \operatorname{ess\,inf}_{\gamma_1^* \in D_1^N} \operatorname{ess\,sup}_{Q \in \mathfrak{R}_N} I_0^{Q, \gamma_1^*}(S_0)$ ;
- (c)  $\{\bar{\mu}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$  is a martingale with respect to  $Q^*$ .

Therefore, we have (14) which implies

$$\bar{V}_t = I_t^{Q^*, \gamma_{t+1}^*}(S_0^t) \quad Q^* - \text{a.s.} \quad (86)$$

By Remark 4 for any  $t \in N_0$  and for any measure  $Q \in \mathfrak{R}_N$ , we have

$$\bar{\mu}_t \geq E^Q [\bar{\mu}_{t+1} | \mathcal{F}_t^S] \quad Q - \text{a.s.} \quad (87)$$

Hence, it follows from (10), (86), (87), Remark 1 and recurrent relation (38) that for any  $t \in N_0$  and  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ , we have

$$\begin{aligned} I_t^{\mathbf{Q}^*, \gamma_{t+1}^{*N}}(S_0^t) &= \bar{V}_t \geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{V}_{t+1} e^{-(\gamma_{t+1}^*, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right] \geq \\ &\geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ I_{t+1}^{\mathbf{Q}, \gamma_{t+2}^{*N}}(S_0^{t+1}) e^{-(\gamma_{t+1}^*, \Delta S_{t+1})} | \mathcal{F}_t^S \right] = I_t^{\mathbf{Q}, \gamma_{t+1}^{*N}}(S_0^t) \quad \mathbf{Q}^* - \text{a.s.} \end{aligned}$$

Thus, the  $\mathbf{Q}^*$  is the worst-case measure. This completes the proof of Theorem 7.

3.9. PROOF OF THEOREM 8. The proof follows from the Assertions 1–7.

#### §4. Proofs of Theorems 13–20

4.1. In this subsection, we prove Theorem 10, which establishes the relationship between problem (2) and the problem of an European option pricing in an incomplete  $(1, S^{(1)}, \dots, S^{(d)})$ -market.

4.1.1. PROOF OF THEOREM 10. It follows from Theorem 3 that there is a strategy  $\{\gamma_t^*\}_{t \in N_1} \in D_1^N$  satisfying (9). Therefore, by (18), for each  $t \in N_1$ , there is a predictable sequence  $\{\beta_t^*\}_{t \in N_0}$  such that

$$\Delta \beta_t^* = -(S_{t-1}, \Delta \gamma_t^*), \quad \beta_t^*|_{t=0} = \beta_0^*. \quad (88)$$

The value of  $\beta_0^*$  will be found later. So, we have just constructed a self-financing portfolio  $\pi^* = (\beta_t^*, \gamma_t^*)_{t \in N_0}$ . Therefore, according to (17), for any  $t \in N_0$ , the capital  $X_t^{\pi^*}$  of the portfolio  $\pi^*$  is defined by the formula

$$X_t^{\pi^*} = \beta_t^* + (\gamma_t^*, S_t). \quad (89)$$

Hence, for any  $t \in N_1$ , the following equality holds  $\mathbf{Q}$ -a.s.:

$$\Delta X_t^{\pi^*} \triangleq X_t^{\pi^*} - X_{t-1}^{\pi^*} = \Delta \beta_t^* + \Delta (\gamma_t^*, S_t). \quad (90)$$

Combining (90) with (88), we obtain

$$\Delta X_t^{\pi^*} \triangleq (\gamma_t^*, \Delta S_t) \quad \mathbf{Q} - \text{a.s.} \quad (91)$$

Theorem 4 (see (11)) yields that for each  $t \in N_1$ ,

$$(\gamma_t^*, \Delta S_t) = \Delta \ln \bar{V}_t + \Delta C_t^* \quad \mathbf{Q} - \text{a.s.}, \quad (92)$$

where  $(C_t^*, \mathcal{F}_t)_{t \in N_0}$  is such that

(i)  $C_0^* = 0$ ;

(ii) for each  $t \in N_0$  and  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ , the inequality  $\Delta C_t^* \geq 0$  holds  $\mathbf{Q}$ -a.s.

Combining (91) with (92), we obtain

$$\Delta (X_t^{\pi^*} - \ln \bar{V}_t - C_t^*) = 0 \quad \mathbf{Q} - \text{a.s.}$$

The last equality yields for any  $t \in N_0$ ,

$$X_t^{\pi^*} - \ln \bar{V}_t - C_t^* = X_0^{\pi^*} - \ln \bar{V}_0 - C_0^* \quad \mathbf{Q} - \text{a.s.} \quad (93)$$

Let

$$X_0^{\pi^*} = \ln \bar{V}_0 \quad \mathbf{Q} - \text{a.s.} \quad (94)$$

Then, it follows from (93), (94) and equality  $C_0^* = 0$  that for any  $t \in N_0$  and  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ ,

$$X_t^{\pi^*} - C_t^* = \ln \bar{V}_t \quad \mathbf{Q} - \text{a.s.} \quad (95)$$

Since  $(C_t^*, \mathcal{F}_t^S)_{t \in N_0}$  is a nondecreasing sequence such that  $C_0^* = 0$ , it follows from (19) that  $\widehat{X}_t^{\pi^*} = X_t^{\pi^*} - C_t^*$  is the capital of the self-financing portfolio  $\pi^*$  with consumption  $C_t^*$  at time  $t \in N_0$ . Also, from (95) we conclude that  $\widehat{X}_t^{\pi^*} = \ln \bar{V}_t$  is the capital of the self-financing portfolio with consumption  $(\pi^*, C^*)$ . As  $X_0^{\pi^*} = \ln \bar{V}_0$ , without loss of generality, we can assume that  $\beta_0^* = \ln \bar{V}_0$  and  $\gamma_0^* = 0$ .

It follows from Theorem 4 (see (11)) that  $\widehat{X}_N^{\pi^*} = \ln \bar{V}_N = f_N(S_\bullet)$   $\mathbf{Q}$ -a.s. with respect to any measure  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ . Hence, we have

$$f_N(S_\bullet) = \ln \bar{V}_N = \ln \bar{V}_0 + \sum_{t=1}^N (\gamma_t^*, \Delta S_t) - C_N^* \quad \mathbf{Q} - \text{a.s.}$$

So, the self-financing portfolio with consumption  $(\pi^*, C^*)$  is a perfect superhedging portfolio with consumption.

It remains to prove that  $(\pi^*, C^*)$  is the minimal perfect superhedging portfolio with consumption. To prove this, we need the following lemma.

4.1.2.

**Lemma 4** *Let  $f_N(S_\bullet)$  be a bounded  $\mathcal{F}_N^S$ -measurable contingent claim, and let  $(\pi^*, C^*)$  be the perfect superhedging portfolio with consumption defined by (9), (11), and (18). We assume that  $(\pi, C)$  is any other perfect superhedging portfolio with consumption, i.e.,  $(\pi, C) \neq (\pi^*, C^*)$ . Then for any  $t \in N_0$  and  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ , the following inequality holds  $\mathbf{Q}$ -a.s.:*

$$1 \geq \exp \left\{ \widehat{X}_t^{\pi^*} - \widehat{X}_t^\pi \right\}. \quad (96)$$

PROOF OF LEMMA 4. It follows from Theorem 4 and the assumptions of the lemma that the contingent claim admits the following representations with respect to any measure  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ :

$$\begin{aligned} f_N(S_\bullet) &= \widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} + \sum_{i=t_0+1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i) - (C_N^* - C_{t_0}^*) = \\ &= \widehat{X}_{t_0}^\pi + \sum_{i=t_0+1}^N (\gamma_i, \Delta S_i) - (C_N - C_{t_0}) \quad \mathbf{Q} - \text{a.s.}, \end{aligned}$$

where  $t_0 \in N_0$  is arbitrary. Hence, we have the following equality with respect to any measure  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ :

$$\begin{aligned} \widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^\pi - \sum_{i=t_0+1}^N \Delta C_i^* &= \sum_{i=t_0+1}^N (\gamma_i - \gamma_i^*, \Delta S_i) - \\ &- (C_N - C_{t_0}) \quad \mathbf{Q} - \text{a.s.} \end{aligned} \quad (97)$$

Since  $C_N - C_{t_0} \geq 0$   $\mathbf{Q}$ -a.s., it follows from (97) that

$$\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^\pi - \sum_{i=t_0+1}^N \Delta C_i^* \leq \sum_{i=t_0+1}^N (\gamma_i - \gamma_i^*, \Delta S_i) \quad \mathbf{Q} - \text{a.s.} \quad (98)$$

For any  $t \in \{t_0 + 1, \dots, N\}$  the capital of the perfect superhedging portfolio with consumption  $(\pi^*, C^*)$  allows the representation  $\widehat{X}_t^{\pi^*} = \ln \bar{V}_t$   $\mathbf{Q}$ -a.s. So, use of (14) obtains

$$\Delta \widehat{X}_t^{\pi^*} = (\gamma_t^*, \Delta S_t) - \Delta C_t^* \quad \mathbf{Q} - \text{a.s.}$$

Therefore, combining (98) with the last equality, we have

$$\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^\pi + \sum_{i=t_0+1}^N \left[ \Delta \widehat{X}_i^{\pi^*} - (\gamma_i, \Delta S_i) \right] \leq 0 \quad \mathbf{Q} - \text{a.s.}$$

Hence, it obviously follows that

$$\exp \left\{ \widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^\pi + \sum_{i=t_0+1}^N \left[ \Delta \widehat{X}_i^{\pi^*} - (\gamma_i, \Delta S_i) \right] \right\} \leq 1 \quad \mathbf{Q} - \text{a.s.} \quad (99)$$

Now let us calculate the conditional expectation  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}} [\bullet | \mathcal{F}_{t_0}^S]$  of the random variables at both sides of (99) with respect to any  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ . Recall that

$\widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} = \ln \bar{V}_{t_0}$ ,  $\widehat{X}_N^{\pi^*} = f_N(S_\bullet)$ . Using (1), we obtain the inequality Q-a.s.

$$\begin{aligned} 1 &\geq \exp \left\{ \widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi} \right\} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \exp \left\{ \widehat{X}_N^{\pi^*} - \ln \bar{V}_{t_0} - \sum_{i=t_0+1}^N (\gamma_i, \Delta S_i) \right\} \middle| \mathcal{F}_{t_0}^S \right] = \\ &= \frac{\exp \left\{ \widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi} \right\}}{\bar{V}_{t_0}} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \exp \left\{ f_N(S_\bullet) - \sum_{i=t_0+1}^N (\gamma_i, \Delta S_i) \right\} \middle| \mathcal{F}_{t_0}^S \right] = \\ &= \exp \left\{ \widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi} \right\} \frac{I_{t_0}^{\mathbf{Q}, \gamma_{t_0+1}^N}(S_0^{t_0})}{\bar{V}_{t_0}}. \end{aligned}$$

As the left-hand side of the last inequality does not depend on  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ , for each  $\gamma_{t_0+1}^N \in D_{t_0+1}^N$ , we obtain the inequality

$$1 \geq \exp \left\{ \widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi} \right\} \frac{\operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} I_{t_0}^{\mathbf{Q}, \gamma_{t_0+1}^N}(S_0^{t_0})}{\bar{V}_{t_0}} \quad \mathbf{Q} - \text{a.s.} \quad (100)$$

In turn, inequality (100) implies that for any  $t \in N_0$  and  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ , the following inequality holds Q-a.s.:

$$1 \geq \exp \left\{ \widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi} \right\} \frac{\operatorname{ess\,inf}_{\gamma_{t_0+1}^N \in D_{t_0+1}^N} \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} I_{t_0}^{\mathbf{Q}, \gamma_{t_0+1}^N}(S_0^{t_0})}{\bar{V}_{t_0}} = \exp \left\{ \widehat{X}_{t_0}^{\pi^*} - \widehat{X}_{t_0}^{\pi} \right\}.$$

This completes the proof of the lemma.

4.1.3. Here we complete the proof of Theorem 10. Now let us prove that a perfect superhedging portfolio with consumption  $(\pi^*, C^*)$  is the minimal one. We assume the opposite, i.e., we assume that there is a moment  $t_0 \in N_0$ , a measure  $\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N$ , and a perfect superhedging portfolio with consumption  $(\pi, C)$  such that  $\mathbf{Q} \left( \widehat{X}_{t_0}^{(\pi^*)} > \widehat{X}_{t_0}^{(\pi)} \right) > 0$ . On the other hand, (96) implies that  $\mathbf{Q} \left( \widehat{X}_{t_0}^{(\pi^*)} > \widehat{X}_{t_0}^{(\pi)} \right) = 0$ . This contradiction proves that the perfect superhedging portfolio with consumption  $(\pi^*, C^*)$  is the minimal one. The theorem is proved.

4.2. PROOF OF THEOREM 11. (1) It follows from Corollary 1 and Theorem 6 that for any  $\gamma \in D_t$ , the following inequality holds  $\mathbf{Q}^*$ -a.s.:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{t-1} &\leq \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{Q} \in \mathfrak{R}_N} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}} \left[ \bar{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}_{t-1}^S \right] = \\ &= \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} \left[ \bar{V}_t e^{-(\gamma, \Delta S_t)} \middle| \mathcal{F}_{t-1}^S \right]. \end{aligned} \quad (101)$$

Suppose that  $\gamma = \gamma_t^* + h\bar{\gamma}_t$ , where  $h \in (0, 1]$  is arbitrary and  $\bar{\gamma}_t$  is an  $\mathcal{F}_{t-1}^S$ -measurable vector. Without loss of generality, we can assume that  $|\bar{\gamma}_t| \leq 1$ . Then (101) yields the inequality  $\mathbf{Q}^*$ -a.s.

$$\begin{aligned} \bar{V}_{t-1} &\leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} [\bar{V}_t e^{-(\gamma_t^*, \Delta S_t)} e^{-h(\bar{\gamma}_t, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S] = \\ &= \bar{V}_{t-1} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} [\exp \{ \Delta \ln \bar{V}_t - (\gamma_t^*, \Delta S_t) \} e^{-h(\bar{\gamma}_t, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S]. \end{aligned} \quad (102)$$

It follows from Corollary 2 that

$$\Delta \ln \bar{V}_t - (\gamma_t^*, \Delta S_t) = -\Delta C_t^* \leq 0 \quad \mathbf{Q}^* - \text{a.s.}$$

Therefore, (102) can be sharpened as follows  $\mathbf{Q}^*$ -a.s.

$$\begin{aligned} 1 &\leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} [\exp \{ -\Delta C_t^* - h(\bar{\gamma}_t, \Delta S_t) \} | \mathcal{F}_{t-1}^S] \leq \\ &\leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} [e^{-h(\bar{\gamma}_t, \Delta S_t)} | \mathcal{F}_{t-1}^S]. \end{aligned} \quad (103)$$

Using the Newton–Leibniz formula, we can rewrite (103) for any  $h \in (0, 1]$  as

$$\begin{aligned} 0 &\leq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} \left[ \frac{1}{h} \int_0^h \frac{d}{du} e^{-u(\bar{\gamma}_t, \Delta S_t)} du | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] = \\ &= -\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} \left[ (\bar{\gamma}_t, \Delta S_t) \frac{1}{h} \int_0^h e^{-u(\bar{\gamma}_t, \Delta S_t)} du | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \quad \mathbf{Q}^* - \text{a.s.} \end{aligned} \quad (104)$$

Passing to the limit as  $h \rightarrow 0$  and using Fatou's lemma, we obtain  $\mathbf{Q}^*$ -a.s.

$$\begin{aligned} 0 &\geq \lim_{h \downarrow 0} \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} \left[ (\bar{\gamma}_t, \Delta S_t) \frac{1}{h} \int_0^h e^{-u(\bar{\gamma}_t, \Delta S_t)} du | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] \geq \\ &\geq \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} \left[ (\bar{\gamma}_t, \Delta S_t) \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \int_0^h e^{-u(\bar{\gamma}_t, \Delta S_t)} du | \mathcal{F}_{t-1}^S \right] = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} [(\bar{\gamma}_t, \Delta S_t) | \mathcal{F}_{t-1}^S]. \end{aligned}$$

Since  $\bar{\gamma}_t$  is arbitrary, we obtain

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} [\Delta S_t | \mathcal{F}_{t-1}^S] = 0 \quad \mathbf{Q}^* - \text{a.s.}$$

Therefore, the sequence  $\{S_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in N_0}$  is a local martingale with respect to the measure  $\mathbf{Q}^*$ . Thus,  $\mathbf{Q}^*$  is a martingale measure. This completes the proof of the theorem.



4.3. PROOF OF THEOREM 12. On the one hand, Corollary 2 implies that for any  $t \in N_1$ , the probability  $\mathbf{Q}^* \{\Delta C_t^* \geq 0\} = 1$ . Therefore, for any  $t \in N_1$ , we have

$$1 - e^{-\Delta C_t^*} \geq 0 \quad \mathbf{Q}^* - \text{a.s.} \quad (105)$$

On the other hand, Theorem 6 and (14) imply that for any  $t \in N_1$ , we have

$$\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} [1 - e^{-\Delta C_t^*} | \mathcal{F}_{t-1}^S] = 0 \quad \mathbf{Q}^* - \text{a.s.} \quad (106)$$

Combining (105) and (106), we obtain that for any  $t \in N_1$ ,

$$\Delta C_t^* = 0 \quad \mathbf{Q}^* - \text{a.s.} \quad (107)$$

Since  $C_0^* = 0$ , equality (107) implies that for any  $t \in N_0$ , the probability  $\mathbf{Q}^* \{C_t^* = 0\} = 1$ .

Let us prove (30). From Theorem 4 (see(11)) and (107) it follows that for any  $t \in N_1$ , we have  $\mathbf{Q}^*$ -a.s.

$$\Delta \ln \bar{V}_t = (\gamma_t^*, \Delta S_t).$$

We sum up last equalities gives  $\mathbf{Q}^*$ -a.s. for all  $t = 0, \dots, k \leq N$ :

$$\bar{V}_k = \ln \bar{V}_0 + \sum_{i=1}^k (\gamma_i^*, \Delta S_i) \quad (108)$$

In particular, as  $\ln \bar{V}_t |_{t=N} = f_N(S_\bullet)$ , we have  $\mathbf{Q}^*$ -a.s.

$$\bar{V}_t |_{t=N} = f_N(S_\bullet) = \ln \bar{V}_0 + \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i) \quad (109)$$

Let us calculate the conditional expectation  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} [\bullet | \mathcal{F}_0^S]$  for both sides of (109). The measure  $\mathbf{Q}^*$  is a martingale measure. Hence we have

$$\ln \bar{V}_0 = \mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} [f_N(S_\bullet) | \mathcal{F}_0^S].$$

This and (109) imply (30). This completes the proof.

**Remark 10** Suppose martingale  $\{\bar{V}_t, \mathcal{F}_t^S\}_{t \in N_0}$  admits decomposition (108) with respect to measure  $\mathbf{Q}^*$  belonging to closure of a set  $\mathfrak{R}_N$  (in the topology of weak convergence for probability measures). It easy to see, that triplet  $(\mathbf{Q}^*, \gamma_1^{*N}, \bar{V}_0)$  is a solution of problem (2). Indeed, (109) is equal to:  $\ln \bar{V}_0 = f_N - \sum_{i=1}^N (\gamma_i^*, \Delta S_i) \quad \mathbf{Q}^* - \text{a.s.}$  Take exponent and, after that, conditional expectation  $\mathbf{E}^{\mathbf{Q}^*} [\cdot | \mathcal{F}_0^S]$ . So, we have (3) from the definition of the solution for the problem (2).

4.4.

**Remark 11** *Let us consider  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  and the set of equivalent (to  $\mathbb{P}$ ) probability measures  $\mathfrak{R}$ . Then Dirak measure for any  $\hat{\omega} \in \Omega$  belonging to support of  $\mathbb{P}$  belongs also to the closure of  $\mathfrak{R}$ . Indeed, if support of  $\hat{\mathbb{Q}}_n$  is a closed neighborhood of  $\hat{\omega}$  with radius  $\frac{1}{n}$  and  $\{\alpha_n\}_{n \leq 1}$ :  $\alpha_n > 0$ ,  $\alpha_n \uparrow 1$  while  $n \rightarrow \infty$ , then  $\mathbb{Q}_n \triangleq \alpha_n \hat{\mathbb{Q}}_n + (1 - \alpha_n) \mathbb{Q}$  belong to  $\mathfrak{R}$  for any  $n \geq 1$  and converges weakly to Dirak measure of  $\hat{\omega}$  (i.e.  $\mathbf{E}^{\mathbb{Q}_n} g(\omega) \rightarrow g(\hat{\omega})$  for any bounded continuous  $g$ ).*

**PROOF OF THEOREM 13.** Suppose there exists solution of problem (2), namely, triplet  $(\mathbb{Q}^*, \gamma_1^{*N}, \bar{V}_0)$ . It is worth to mention, that non-redundance of initial  $(1, S)$ -market (with respect to  $\mathbb{P}$ ) guarantees, that it will be non-redundant with respect to the worst-case measure  $\mathbb{Q}^*$  (might be proved similarly to Corollary 2). Hence, for any  $t \in N_1$ , the support of regular martingale conditional probability  $\mathbb{Q}^* [\cdot | \mathcal{F}_t^S]$  consists of at least  $d + 1$  elements. If the supports above consist of  $d + 1$  each, we have assertion of the Theorem.

Else, let us consider discreet function of sets  $\hat{\mathbb{Q}}$  specified by:

(1) equality  $\hat{\mathbb{Q}}_0(A) \triangleq \mathbb{Q}^*(A)$  for any  $A \in \mathcal{F}_0^S$ ;

(2) set of variables  $\{\Delta \hat{x}_{t,j}, \hat{p}_{t,j}\}_{t \in N_1, 1 \leq j \leq d+1}$ , where (i) for any  $t \in N_1$  elements of the set  $\{\Delta \hat{x}_{t,j}\}_{t \in N_1, 1 \leq j \leq d+1}$  are an affine-independent  $\mathcal{F}_{t-1}^S$ -measurable random variables belonging to the support of regular conditional probability  $\mathbb{Q}^* [\cdot | \mathcal{F}_{t-1}^S]$  (if specified by  $\Omega$ ) such, that for any  $t \in N_1$  the following system (with respect to  $d$ -dimensional  $\gamma$  and 1-dimensional  $z$ ) is incompatible:

$$(\Delta \hat{x}_{t,j}, \gamma) \geq -z, -z > 0 \quad 1 \leq j \leq d + 1; \quad (110)$$

(such a set exists because: (a) support of  $\mathbb{Q}^* [\cdot | \mathcal{F}_t^S]$  has a full basis; (b) if the system for  $j \in \{1, \dots, d\}$  is compatible, then Lemma 1 guarantees existence of such  $\Delta \hat{x}_{t,d+1}$ , that  $(\Delta \hat{x}_{t,d+1}, \gamma) < 0$ ).

(ii) for any  $t \in N_1$  elements of the set  $\{\hat{p}_{t,j}\}_{t \in N_1, 1 \leq j \leq d+1}$  are defined as the only solution for the problem:

$$\sum_{j=1}^{d+1} \hat{p}_{t,j} \Delta \hat{x}_{t,j} = 0, \quad \sum_{i \geq 1} p_{t,i} = 1. \quad (111)$$

Note, that from the theory for systems of linear equations it is known [14], that system (111) has non-negative solution, if and only if (110) is incompatible.

Thus,  $p_{t,i} \triangleq \hat{Q}(\Delta S_t = \Delta x_{t,i} | \mathcal{F}_{t-1}^S)$ ,  $t \in N_1$ ,  $j = 1, \dots, d+1$ . Note, that constructed measure  $\hat{Q}$  belongs to close of  $\mathfrak{R}_N$  in topology of weak convergence of probability measures (see Remark 11).

As  $\{\Delta \hat{x}_{t,j}\}_{t \in N_1, 1 \leq j \leq d+1}$  is a subset of the support for regular conditional worst-case probability  $Q^*[\cdot | \mathcal{F}_{t-1}^S]$ ,  $t \in N_1$ , so  $(\gamma_t^*, \Delta \hat{x}_{t,j}) = \ln \bar{V}_t(S_0, \dots, S_{t-1}, S_{t-1} + \Delta \hat{x}_{t,j})$ ,  $j = 1, \dots, d+1$ .

Now, according to Remark 10 triplet  $(\hat{Q}, \gamma_1^{*N}, \bar{V}_0)$  is a solution for problem (2) in non-redundant  $(1, S)$ -market, where regular conditional probabilities  $\hat{Q}(\cdot | \mathcal{F}_{n-1}^S)$ ,  $t \in N_1$ , are discreet and their supports consist of  $d+1$  affine-independent predictable variables.

4.5. PROOF OF THEOREMS 14 AND 15. The assertions follow from Theorems 10–13.

## References

1. Bertsekas D.P., Shreve S.E. Stochastic Optimal Control: The Discrete Time Case. Academic Press, Orlando, 1978.
2. Biagini S., Frittelli M. A unified framework for utility maximization problems: an Orlicz space approach // Annals of Applied Probability. — 2008. — Vol. 18. — No. 3. — P. 929–966.
3. Bogachev V.I. Basics of measure theory, vol. 1,2 [in Russian]. Scientific publishing center "Regular and Chaotic Dynamics Moscow — Izhevsk, 2003.
4. Boyarintseva N.S., Khametov V.M. A New Martingale Representation Theorem (Discrete Time). Math. Notes, vol. 75, no. 1, pp. 40–54.
5. El Karoui N., Quenez M.C. Dynamic programming and pricing of contingent claims in an incomplete market. SIAM Journal on Control and Optimization, 1995, vol. 33, no. 1, pp. 29–66.
6. Elliott R. Stochastic Calculus and Applications. Springer-Verlag, Heidelberg, 1983.
7. Dunford N., Schwartz J.T. Linear Operators. Part I. General Theory. Wiley-Interscience, 1988.
8. Föllmer H., Kabanov Yu.M. Optional decomposition and Lagrange multipliers. Finance Stoch., 1998, vol. 2, pp. 69–81.

9. Föllmer H., Kramkov D. Optional decomposition under constraints. *Probab. Theory and Related Fields*, 1997, vol. 109, pp. 1–25.
10. Föllmer H., Schied A. *Stochastic Finance. An Introduction in Discrete Time*. Walter de Gruyter, Berlin, 2004.
11. Gushchin A. A. On upper hedging price of nonnegative contingent claims [in Russian], *Sovremennii problemi matematiki i mehaniki*. Vol. VIII. Matematika. No. 3. Publishing House of Moscow University, Moscow, 2013, pp. 60–72.
12. Kramkov D. O. Optional Decomposition of supermartingales and hedging contingent claims in incomplete security markets. *Probability Theory and Related Fields*, 1996, vol. 105, no. 4, pp. 459–479.
13. Krylov N. V. *Controlled Diffusion Processes*. Springer, Berlin, 2009.
14. Kulikov L. J. *Algebra and theory of numbers* [in Russian]. Vishaya shkola, Moscow, 1979.
15. Levin V. I. *Convex analysis in a space of a measurable functions and it's applications in mathematics and economics* [in Russian]. Nauka, Moscow, 1985.
16. Rokhlin D. B. Equivalent supermartingale densities and measures in discrete time infinite horizon market models // *Theory Probab. Appl.* — Vol. 53— No. 4 — P. 626–647.
17. Shiryaev A. N. *Essentials of Stochastic Finance. Volume 2: Theory* [in Russian]. Fazis, Moscow, 1998.
18. Shiryaev A. N. *Probability* [in Russian], vol. 1, 2. MCCME, Moscow, 2004.
19. Volkov S. N., Kramkov D. O. On methodology of hedging options [in Russian]. *Obozrenie Prikladnoi i Promyshlennoi Matematiki*, 1997, vol. 4, no. 1, pp. 18–65.

# МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ ДЛЯ ЕВРОПЕЙСКОГО ОПЦИОНА НА НЕПОЛНОМ РЫНКЕ БЕЗ ТРАНЗАКЦИОННЫХ ИЗДЕРЖЕК (ДИСКРЕТНОЕ ВРЕМЯ). ЧАСТЬ I.

Зверев О.В.<sup>1</sup>, Хаметов В.М.<sup>2</sup>, Шелемех Е.А.<sup>1</sup>

*zv-oleg@yandex.ru, khametovvm@mail.ru, letis@mail.ru  
sbulgakov@hse.ru, vmkhametov@hse.ru*

<sup>1</sup>Центральный экономико-математический институт РАН

<sup>2</sup>Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»

Поступила 20.10.2019

В статье построена модель ценообразования для европейского опциона на многомерном неполном рынке без транзакционных издержек с дискретным временем. С начала рассмотрена вспомогательная задача по нахождению верхнего гарантированного значения ожидаемого значения риска, экспоненциально зависящего от дефицита капитала. Верхнее гарантированное значение представляет собой минимаксное значение ожидаемого риска. Первой берется верхняя грань по множеству эквивалентных вероятностных мер, а затем – нижняя грань по множеству самофинансируемых портфелей. В статье найдены условия существования портфеля, на котором достигается нижняя грань. Этот результат позволил построить обобщение опционального разложения функции выплаты опциона. Затем получены условия существования вероятностной меры, доставляющей максимум ожидаемому значению риска. Эта мера оказалась мартингальной и дискретной, но в общем случае она не принадлежит множеству эквивалентных вероятностных мер. Наконец, показано, как полученные результаты для вспомогательной задачи позволяют получить явные формулы для цены европейского опциона на неполном рынке без транзакционных издержек. Во второй части статьи приведены примеры моделей ценообразования европейского опциона на рынках с одним рисковым активом: конечного и с компактным носителем базовой вероятностной меры.

*Ключевые слова: европейский опцион, хеджирование, минимаксный портфель, неполный рынок, опциональное разложение, представление, функция риска.*

# ИЗУЧЕНИЕ КВАНТОВОГО ВРЕМЕНИ В ГЕТЕРОСТРУКТУРЕ INAS/ALSB С ОДНОЙ И ДВУМЯ ЗАПОЛНЕННЫМИ ПОДЗОНАМИ

Е.Р. Бурмистров, М.М. Афанасова

*eugeni.conovaloff@yandex.ru*

*Рязанский Государственный Университет имени С.А. Есенина, 390000 Рязань, Россия*

Поступила 14.09.2019

Статья посвящена исследованию механизмов рассеяния носителей заряда в гетероструктуре InAs/AlSb. Целью статьи является разработка и дополнение существующей теории, которая в полной мере описывает квантово-механические процессы в изучаемых структурах. Основное содержание исследования составляет анализ квантового времени релаксации, формирующийся по двум независимым каналам внутри – и межподзонного рассеяния. Проведённый расчёт квантового времени показал, что разработанная теория учитывает рассеяние двумерных носителей в активном слое InAs на шероховатостях гетерограницы. Вследствие того, что подвергнутые сильным магнитным полям гетероструктуры рассматривались в условиях двух заполненных подзон размерного квантования, значительное внимание уделено исследованию уширительного времени уровней Ландау. Установлено, что время межподзонной релаксации порядка  $10^{-15}$ с, а квантовое время релаксации порядка  $10^{-14}$ с. В качестве исследовательской задачи авторами была определена попытка получить теоретические значения квантового времени, которые в высокой степени согласуются с данными, полученными аналитически.

*Ключевые слова: время релаксации, уровни Ландау, гетероструктуры, межподзонное рассеяние, шероховатости, квантование.*

УДК 537.9

DOI: 10.31145/2224-8412-2020-20-1-46-56

## 1. Введение

Влияние границы раздела на проводящие свойства гетероструктур было изучено в работах Г.Кремера и Ж.Алфёрова. Исследования позволили установить, что шероховатости – это не пространственные локализации атомов на гетерограницах, а локализации положительных ионов примеси в пригранич-

ных слоях. Стоит отметить, что создание гетероструктур хорошего качества приводит к незначительному влиянию шероховатостей гетерограницы на кинетику электронов в квантовой яме. В ранних работах были аналитически изучены процессы рассеяния двумерных электронов на основе результатов, полученных из осцилляций Шубникова де Гааза [1,2]. Подвергнутые исследованиям структуры рассматривались в условиях одной заполненной подзоны размерного квантования. Данная особенность ограничивает возможные каналы рассеяния двумерных носителей в гетероструктуре InAs/AlSb, оставляя не изученным вопрос межподзонного резонансного взаимодействия.

Проведённый в условиях данного исследования квантово – механический расчёт потенциалов рассеяния и матриц плотностей позволил получить численную оценку кинетическим параметрам двумерного электронного газа (ДЭГ). В работе предложен теоретический метод расчёта времени релаксации, который формируется по двум независимым каналам внутри- и межподзонного рассеяния. В ходе научного исследования установлено, что метод позволяет вносить в свою структуру изменения, связанные с условиями поставленной задачи. С учётом данной особенности метод расчёта квантового времени релаксации носит универсальный характер. Высказано предположение, что разработанная теория может быть использована для исследования кинематических процессов двумерных носителей в квантовых ямах с несимметричным распределением вероятности волновых функций.

## 2. Теоретическая модель

Гетероструктуры, подвергнутые исследованиям, рассматривались с учётом двух заполненных подзон размерного квантования. Заполнение нескольких подзон размерного квантования приводит к дополнительным эффектам, основным из которых является межподзонное рассеяние. При заполнении первой подзоны время релаксации имеет значение порядка  $\sim 10^{-14}$ с, а при двух заполненных подзонах порядка  $\sim 10^{-13}$ с. В первом случае рассеяние на шероховатостях – доминирующий процесс в условиях квантующих магнитных полей. Во втором случае подвижность ограничена межзонным рассеянием и e-e рассеянием на подзонах в активном слое InAs/AlSb. Изотропия двумерной поверхности Ферми даёт возможность использовать аппарата тензорного исчисления. Для легированной гетероструктуры InAs/AlSb с двумя заполненными подзонами время релаксации даётся выражением [3]

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{K_{00}K_{11} - K_{01}K_{10}}{E_{F0}K_{11} - E_{F1}K_{01}}, \quad \frac{1}{\tau_1} = \frac{K_{00}K_{11} - K_{01}K_{10}}{E_{F1}K_{00} - E_{F0}K_{10}},$$

где  $K_{00}$ -компонента тензора рассеяния, характеризующая вклад первой подзоны в процессы рассеяния с квантовым временем релаксации  $\tau_q$ ;  $K_{11}$  –



компонента тензора рассеяния, характеризующая вклад второй подзоны;  $E_i$  – положение энергетических подзон, отсчитываемых относительно  $E_F$ ;  $E_{F_i} = E_F - E_i$ .

С учётом введенных обозначений

$$\frac{1}{\tau_0} = \frac{K_{00}K_{11} - K_{01}K_{10}}{(E_F - E_0)K_{11} - (E_F - E_1)K_{01}}, \quad \frac{1}{\tau_1} = \frac{K_{00}K_{11} - K_{01}K_{10}}{(E_F - E_1)K_{00} - (E_F - E_0)K_{10}}$$

Компоненты тензора рассеяния определяются из упрощённого кинетического уравнения Больцмана

$$K_{ij} = \delta_{ij} \sum_i K_{ij}^1 - K_{ij}^2,$$

где

$$K_{ij}^1 = \frac{k_{F_i}^2}{2\pi\hbar} \int_0^\pi |V_{ij}(q_{ij})|^2 d\theta \quad K_{ij}^2 = \frac{k_{F_i}k_{F_j}}{2\pi\hbar} \int_0^\pi \cos\theta |V_{ij}(q_{ij})|^2 d\theta$$

В квантовой яме симметрия волновых функций приводит к тому, что форм-фактор отличен от нуля только в том случае, когда сумма индексов  $i, j, n$  и  $m$  четная. Компоненты тензора рассеяния с учётом межподзонного рассеяния могут быть вычислены через соотношения:

$$\begin{aligned} K_{00}^1 &= \frac{k_{F_0}^2}{2\pi\hbar} \int_0^\pi |V_{00}(q_{00})|^2 d\theta & K_{01}^1 &= \frac{k_{F_0}^2}{2\pi\hbar} \int_0^\pi |V_{01}(q_{01})|^2 d\theta \\ K_{10}^1 &= \frac{k_{F_1}^2}{2\pi\hbar} \int_0^\pi |V_{10}(q_{10})|^2 d\theta & K_{01}^2 &= \frac{k_{F_0}k_{F_1}}{2\pi\hbar} \int_0^\pi \cos\theta |V_{01}(q_{01})|^2 d\theta \\ K_{11}^1 &= \frac{k_{F_1}^2}{2\pi\hbar} \int_0^\pi |V_{11}(q_{11})|^2 d\theta & K_{10}^2 &= \frac{k_{F_1}k_{F_0}}{2\pi\hbar} \int_0^\pi \cos\theta |V_{10}(q_{10})|^2 d\theta \\ K_{00}^2 &= \frac{k_{F_0}k_{F_0}}{2\pi\hbar} \int_0^\pi \cos\theta |V_{00}(q_{00})|^2 d\theta & K_{11}^2 &= \frac{k_{F_1}k_{F_1}}{2\pi\hbar} \int_0^\pi \cos\theta |V_{11}(q_{11})|^2 d\theta \end{aligned}$$

Матричный элемент рассеяния на шероховатостях

$$|V_{ij}(q_{ij})|^2 = \pi\Delta^2\Lambda^2\Delta V^2 \exp\left(\frac{q_{ij}^2\Lambda^2}{4}\right) \left\{ \sum_{n,m} (\varepsilon^{-1})_{ij,mn} \varphi_i(z_B) \varphi_j(z_B) \right\}^2,$$

где  $V_{ij}(q) = \sum_{n,m} (\varepsilon_{ij,mn})^{-1} \widetilde{V}_{nm}(q)$ , где  $V_{ij}(q)$  – матричный элемент экранированного потенциала;  $\widetilde{V}_{nm}(q)$  – матричный элемент незэранированного кулоновского потенциала;  $\varepsilon_{ij,mn}$  – матрица диэлектрической проницаемости в приближении хаотических фаз;  $\Delta, \Lambda$  – параметры шероховатости;  $\varphi_i(z_B), \varphi_j(z_B)$  –



подзональные волновые функции в барьере;  $q_{ij} = \sqrt{k_i^2 + k_j^2 - 2k_i k_j \cos\theta}$  – изменение волнового вектора, обусловленное упругим рассеянием от  $i$  к  $j$  подзоны.

Матрица диэлектрической проницаемости определяется [3]

$$\varepsilon_{ij,mn}(q) = \delta_{in}\delta_{jm} + \frac{q_s}{q} H_{ij,nm}(q) \chi_{ij}(q),$$

$$H_{ij,nm}(q) = \int_0^\infty dz \int_0^\infty dz' \varphi_i(z) \varphi_j(z) \exp(-q(z-z')) \varphi_n(z') \varphi_m(z'),$$

$$\chi_{ij}(q) = \begin{cases} 1 - \Theta(q - 2k_{F_i}) \sqrt{1 - \left(\frac{2k_{F_i}}{q}\right)^2}, & i = j \\ \frac{q^2 + k_0^2 - \sqrt{(q^2 + k_0^2) - (2k_{F_i}q)^2}}{2q^2}, & k_{F_i} \leq k_0, \quad i \neq j \\ 1 - \frac{\Theta(q - k_+)}{q^2} \sqrt{(q^2 - k_+^2)(q^2 - k_-^2)}, & k_{F_i} > k_0, \end{cases}$$

где  $H_{ij,nm}(q)$  – форм-фактор;  $\chi_{ij}(q)$  – матрица статической поляризации;  $\Theta$ -функция Хевисайда;  $q_s = \frac{m^* e^2}{2\pi \varepsilon_s \varepsilon_0 \hbar^2}$ ;  $k_0^2 = 2m^*(E_1 - E_0)/\hbar^2$ ;  $k_+ = |k_{F_0} + k_{F_1}|$ ;  $k_- = |k_{F_0} - k_{F_1}|$ .

Определим матричный элемент рассеяния в первой подзоне размерного квантования. Матрица диэлектрической проницаемости даётся формулой

$$\varepsilon_{00,00}(q) = 1 + \frac{m^* e^2}{2(\sqrt{2k_0^2 - 2k_0^2 \cos\theta})\pi \varepsilon_s \varepsilon_0 \hbar^2} H_{00,00}(q) \chi_{00}(q)$$

Матрица статической поляризации для данного случая

$$\chi_{00}(q) = 1 - \Theta(q - 2k_{F_0}) \sqrt{1 - \left(\frac{2k_{F_0}}{q}\right)^2}.$$

По определению функции Хевисайда

$$\Theta(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

В условиях данной задачи

$$\Theta(q - 2k_{F_0}) = \begin{cases} 0, & q - 2k_{F_0} < 0 \\ 1, & q - 2k_{F_0} > 0 \end{cases},$$

где  $q = \sqrt{2k_{F_0}^2(1 - \cos\theta)} = 2k_{F_0} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , тогда

$E$

$$\Theta(q - 2k_{F_0}) = \begin{cases} 0, & 2k_{F_0} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) < 2k_{F_0} \\ 1, & 2k_{F_0} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) > 2k_{F_0} \end{cases}$$

Следовательно, ступенчатая функция  $\Theta=0$  и  $\chi_{00}(q)=1$ . С учётом полученных результатов

$$\varepsilon_{00,00}(q) = 1 + \frac{m^* e^2}{4k_{F_0} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \pi \varepsilon_s \varepsilon_0 \hbar^2} \int_0^\infty dz \int_0^\infty dz' \varphi_0(z) \varphi_0(z) \exp(-q(z-z')) \varphi_0(z') \varphi_0(z')$$

$$|V_{00}(q_{00})|^2 = \pi \Delta^2 \Lambda^2 \Delta V^2 \exp\left(\frac{q_{00}^2 \Lambda^2}{4}\right) \{\varepsilon_{00,00}^{-1}(q) \varphi_0(z_B) \varphi_0(z_B)\}^2$$

Вклад второй подзоны размерного квантования приводит матрицу диэлектрической проницаемости и матричный потенциал рассеяния к виду

$$\varepsilon_{11,11}(q) = 1 + \frac{m^* e^2}{4k_{F_1} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \pi \varepsilon_s \varepsilon_0 \square^2} \int_0^\infty dz \int_0^\infty dz' \varphi_1(z) \varphi_1(z) \exp(-q(z-z')) \varphi_1(z') \varphi_1(z'),$$

$$|V_{11}(q_{11})|^2 = \pi \Delta^2 \Lambda^2 \Delta V^2 \exp\left(\frac{q_{11}^2 \Lambda^2}{4}\right) \{\varepsilon_{11,11}^{-1}(q) \varphi_1(z_B) \varphi_1(z_B)\}^2,$$

$$\varepsilon_{10,10}(q) = \frac{m^* e^2}{2\pi \varepsilon_s \varepsilon_0 \square^2 q} \int_0^\infty dz \int_0^\infty dz' \varphi_1(z) \varphi_0(z) \exp(-q(z-z')) \varphi_1(z') \varphi_0(z'),$$

$$|V_{10}(q_{10})|^2 = \pi \Delta^2 \Lambda^2 \Delta V^2 \exp\left(\frac{q_{10}^2 \Lambda^2}{4}\right) \{\varepsilon_{10,10}^{-1}(q) \varphi_1(z_B) \varphi_0(z_B)\}^2,$$

$$\varepsilon_{01,01}(q) = \frac{m^* e^2}{2\pi \varepsilon_s \varepsilon_0 \square^2 q} \left( \frac{q^2 + k_0^2 - \sqrt{(q^2 + k_0^2) - (2k_{F_0} q)^2}}{2q^2} \right) H_{01,01}(q),$$

$$|V_{01}(q_{01})|^2 = \pi \Delta^2 \Lambda^2 \Delta V^2 \exp\left(\frac{q_{01}^2 \Lambda^2}{4}\right) \{\varepsilon_{01,01}^{-1}(q) \varphi_0(z_B) \varphi_1(z_B)\}^2$$

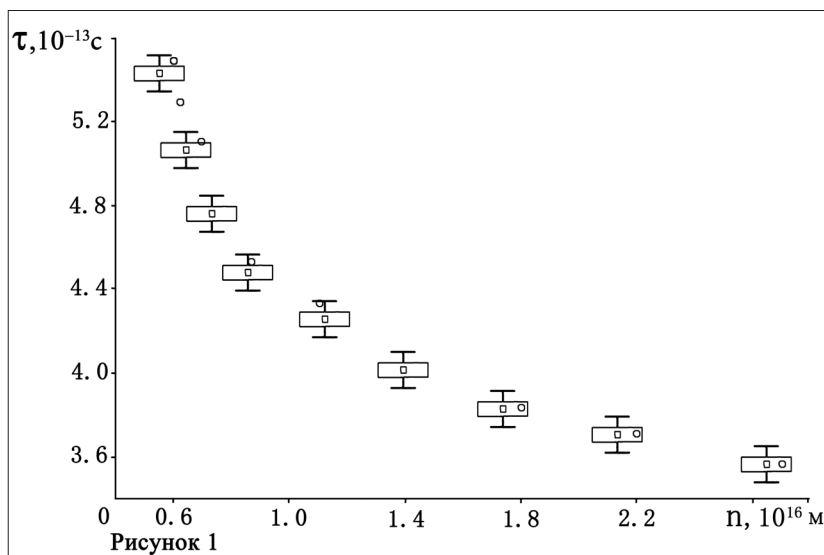
## 2. Обсуждение результатов

В ходе теоретического исследования удалось аналитически определить из графиков Дингла время релаксации двумерных электронов в активном слое InAs  $\tau_q$  и концентрации на подзонах; из теоретических расчётов было

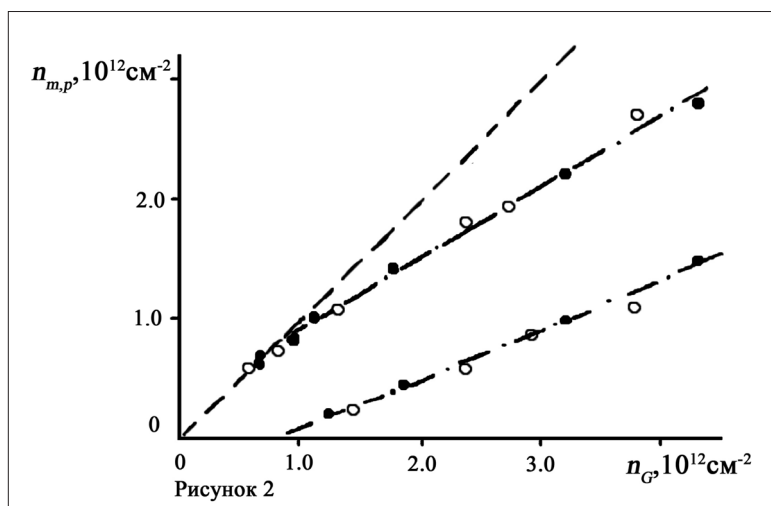
получено время релаксации с учётом двух заполненных подзон для основной  $\tau_q^m$  и возбуждённой  $\tau_q^p$ , общее квантовое  $\tau_M$  и электрон-электронное  $\tau_{e,e}$  времена релаксации (таблица 1).

Серия образцов	Аналитический расчёт			Теоретический расчёт			
	$\tau_q, 10^{-14} \text{с}$	$n_m, 10^{16} \text{М}^{-2}$	$n_p, 10^{16} \text{М}^{-2}$	$\tau_M, 10^{-14} \text{с}$	$\tau_{e,e}, 10^{-12} \text{с}$	$\tau_q^p, 10^{-12} \text{с}$	$\tau_q^m, 10^{-12} \text{с}$
1	5.493	1.8	0.6	4.364	5.00	0.566	1.894
2	4.532	2.2	1.0	3.411	0.86	0.476	1.839
3	3.840	2.7	1.1	2.935	0.22	0.400	1.198
4	3.571	3.6	0.62	2.678	0.11	0.413	1.101

Анализируя данные таблицы, можно выделить связь между концентрациями в основной и возбуждённой подзонах размерного квантования. В ходе работы установлена зависимость времени релаксации от концентрации носителей в исследуемых структурах на каждой из подзонах (рисунок 1). С помощью интерполяционных методов обработки массивов данных удалось установить зависимость времени релаксации от общей концентрации образца. Для оценки достоверности полученных значений графическим методом сравнивались аналитические и теоретические данные. На рисунке 1 изображено два графика, первый из которых представляет собой зависимость аналитического значения квантового времени релаксации от общей концентрации. На втором изображена теоретическая зависимость  $\tau_q(n) \propto \frac{2.01}{n}$  с доверительным интервалом 15%. Как видно, наложение экспериментальных точек на графике в пределах доверительного интервала аналитических значений свидетельствует о высоком уровне согласования теории и эксперимента.



На основе полученных данных установлена зависимость общей концентрации образцов от концентрации электронов в основной  $n_m$  и возбуждённой  $n_p$  подзонах размерного квантования,  $n_G = n_m + n_p$  (рисунок 2).



Излом на  $n_m(n_G)$  и аппроксимация  $n_p(n_G)$  на предельное значение  $n_p=0$  дают величину пороговой концентрации  $n_c = 8.3 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ . Теоретическая оценка порогового значения концентрации для квантовой ямы с  $d=150 \text{ \AA}$  равна  $6.6 \cdot 10^{11} \text{ см}^{-2}$ .

Одним из результатов научного исследования стал расчёт времени межподзонного рассеяния электронов в активном слое InAs. В условиях конкурирующих времён релаксации межподзонное рассеяние определяется равенством

$$\tau^{mp} \cong \frac{\tau^* \tau^{intra}}{\tau^{intra} - \tau^*},$$

где  $\tau^*$  – суммарное время релаксации с учётом внутри – и межподзонного рассеяния; Время внутриподзонной релаксации формируется с учётом двух независимых механизмов рассеяния, причём

$$\frac{1}{\tau^{inter}} = \frac{1}{\tau_q^m} + \frac{1}{\tau_q^p}$$

Результаты расчётов  $\tau^{mp}$  представлены в таблице 2.

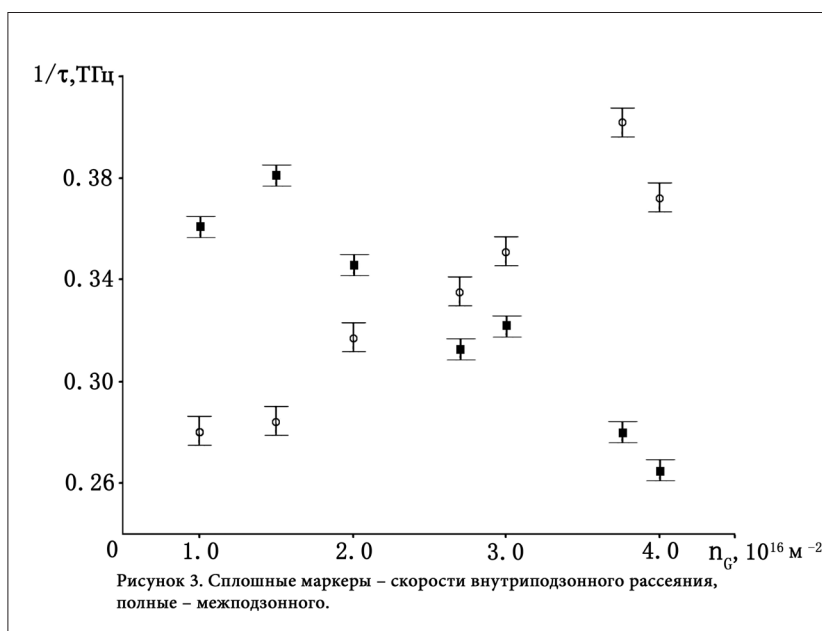
Серия образцов	Аналитический расчёт		Теоретический расчёт
	$n_m, 10^{16} \text{ м}^{-2}$	$n_p, 10^{16} \text{ м}^{-2}$	$\tau^{mp}, 10^{-15} \text{ с}$
1	1.8	0.6	5.543
2	2.2	1.0	4.606
3	2.7	1.1	3.989
4	3.6	0.62	3.678

Из данных таблицы 1 и 2 видно, что для всех образцов выполняется соотношение

$$\tau^{mp} < \tau_q^p < \tau_q^m$$

Данный вывод вполне согласуется с умозрительными представлениями о квантово-механических процессах, которые происходят с двумерными электронами в гетероструктурах.

Из данных таблицы 1 видно, что населённость основной подзоны размерного квантования выше, чем возбуждённой. Поэтому можно предположить, что скорость межподзонных переходов будет выше, чем скорость переходов электронов внутри подзоны. Аналитически установлена и проанализирована зависимость скоростей меж- и внутривидового рассеяния носителей от общей концентрации образца (рисунок 3).



Из графика видно, два данных механизма рассеяния являются конкурирующими в гетероструктуре InAs/AlSb. Характер монотонности и разброс по значениям определяются анизотропией поверхности Ферми и параметрами шероховатостей гетерограницы.

## Вывод

В ходе работы теоретически определено квантовое время релаксации двумерных носителей заряда в гетероструктуре InAs/AlSb. Удалось оценить время и скорость межподзонного рассеяния. Проведённый расчёт квантового времени ДЭГ, учитывающий заполнение двух подзон размерного квантования в InAs/AlSb, предоставил возможность изучить кинетику двумерных

электронов. Установлено, что выбранная теория с высокой достоверностью описывает изучаемые квантовые эффекты двумерных носителей в гетероструктуре InAs/AlSb.

С точки зрения энергетически выгодного состояния в условиях отсутствия квантующих магнитных полей, частота внутривозонных столкновений двумерных носителей гораздо больше межвозонных. Это объясняется тем, что электрону выгоднее оставаться на своём энергетическом уровне или осуществлять переходы между уровнями энергии в пределах одной подзоны размерного квантования. Вовлечение электрона в процессы межвозонного рассеяния требует дополнительных затрат энергии, а следовательно и прибавки к импульсу. В данной работе образцы подвергались воздействию сильных магнитных полей. Следовательно, общее квантовое время релаксации формируется по двум каналам внутри- и межвозонного рассеяния. В данном случае уширение уровней Ландау в большей степени определяет межвозонные переходы, следовательно, время таких переходов будет меньше, чем время внутривозонных, порядка 10-15с. Этим объясняется тот факт, что скорость электрон-электронных межвозонных взаимодействий превышает по абсолютной величине электрон-электронные внутривозонные.

Используемый в работе квантово-механический метод позволяет в условиях воздействия различных внутрисистемных механизмов на движение электронов оценить флуктуационные изменения параметров, характеризующих движение двумерных носителей.

Из данных таблицы 1, видно, что с увеличением концентрации носителей в образцах квантовое время уменьшается. В условиях отсутствия магнитных полей релаксационные переходы стремятся сохранить систему в термодинамическом равновесии. Вероятность таких переходов определяется из распределения Ферми-Дирака для частиц по уровням энергий. При включении магнитного поля вероятность индуцированных переходов увеличивается, следовательно, увеличивается число двумерных носителей, которые вовлекаются в процессы межвозонного рассеяния. Вероятность спонтанных переходов уменьшается, и влияние шероховатостей на движение зарядов в условиях квантующих магнитных полей усиливается. Таким образом, в условиях магнитных полей на время межвозонного рассеяния оказывают влияние два доминирующих фактора: неровности гетерограницы и уширительное время уровней Ландау.

В ходе научного исследования учитывались только механизмы упругого рассеяния, так как неупругое рассеяние на полярных оптических фононах пренебрежимо мало при низкой температуре. Метод не учитывает особенности экранированного и неэкранированного кулоновского потенциала. Одним из результатов научного исследования стало сопоставление теоретических и аналитических данных, которые хорошо согласуются между собой.

## Список литературы

1. *М.М. Афанасова, В.А. Степанов.* Исследование электрон-фононного взаимодействия в структурах InAs/AlSb в режиме квантующих магнитных полей // *Наносистемы: физика, химия, математика*, 2012, 3(6), 36-46.
2. *М.М. Афанасова, В.А. Степанов.* Роль электрон-электронного и электрон-фононного взаимодействия в процессе квантования Ландау в наноструктурах InAs/AlSb // *Известия вузов. Физика*, 2009, 8, 20-24.
3. *Е.Р. Бурмистров.* Механизмы рассеяния в гетероструктурах InAs/AlSb// *Сверхпроводящие и электронные свойства твёрдых тел: тезисы докладов Международной конференции студентов, аспирантов и молодых учёных «Ломоносов 2019» (МГУ имени М.В. Ломоносова, 8—12 апреля, 2019 )*, 597–598.
4. *Е.Р. Бурмистров.* Расчёт эффективного сечения рассеяния в гетероструктуре InAs/AlSb// *Актуальные вопросы физики в высшей школе: тезисы докладов Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы физики и технологии в образовании, науке и производстве» (Рязань, 28—29 марта 2019 г.)*, 88-92.
5. *Д.Ю. Протасов, А.К. Бакаров, А.И. Торопов.* ФТП, 2018, 52(1), 48-57.
6. *Т. Андо, А. Фаулер.* Электронные свойства двумерных систем. Пер. с англ./Т. Андо, А. Фаулер. –М.:Мир, 1985. -214 с.
7. *Е.Н. Hwang, S. Das Sarma.* Phys. Rev. B, 2008,77, 45-61.
8. *В.М. Лукашин, А.Б. Пашиковский, А.А. Капралова.* ФТП, 2014, 49(6), 648.
9. *Н. Amasuga, Seiki Goto, T. Shiga, M. Totsuka.* IEEE MTT-S International Microwave Symposium Digest (Long Beach, California, USA, June 11-17, 2005),189.

## THE STUDY OF THE QUANTUM RELAXATION TIME IN THE HETEROSTRUCTURE INAS / ALSB WITH ONE AND TWO FILLED SUBBANDS

Burmistrov E.R., Afanasova M.M.

*eugeni.conovaloff@yandex.ru*

*Ryazan State University named for S.Esenin*

Received 14.09.2019

The article investigates the carrier scattering mechanisms in the heterostructure InAs / AlSb. The aim of the article is to develop and complement the existing theory, which fully describes the quantum-mechanical processes in the studied structures. The main content of the study is the analysis of the quantum relaxation time, by forming two independent channels inside – and intersubband scattering. Conducted quantum time calculation showed that developed theory takes into account the two-dimensional scattering of carriers in the active layer in InAs heterojunction roughness. Because subjected to strong magnetic fields heterostructures were considered under two filled subbands, considerable attention is given to research ushiritelnogo time Landau levels. It was found that the time of intersubband relaxation about  $10^{-15}$ s, and the quantum of the order of the relaxation time  $10^{-14}$ s. As the authors study the problem was determined attempt to obtain quantum theoretical values of time which are highly consistent with analytical data.

*Keywords: relaxation time, Landau levels, heterostructure, intersubband scattering, roughness, quantization.*



# МОДЕЛИРОВАНИЕ ОПТИМАЛЬНОГО И $\varepsilon$ -ОПТИМАЛЬНОГО АЛГОРИТМОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ КВАДРАТИЧНО ИНТЕГРИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ ПО НАБЛЮДЕНИЯМ С ГАУССОВСКИМИ ОШИБКАМИ

С.А. Булгаков, В.М. Хаметов

*sbulgakov@hse.ru, vmkhametov@hse.ru*

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»*

Поступила 18.12.2019

Статья посвящена построению решения задачи оптимального в среднеквадратическом смысле стохастического восстановления измеримой квадратично интегрируемой относительно меры Лебега функции, заданной на конечномерном компакте. В ней обосновывается процедура оптимального восстановления, а также условия его несмещенности и состоятельности. Кроме того, предложена и обоснована процедура  $\varepsilon$ -оптимального стохастического восстановления.

УДК 519.254

DOI: 10.31145/2224-8412-2020-20-1-57-69

## **Введение**

Данная статья посвящена построению моделей оптимально и  $\varepsilon$ -оптимального восстановления квадратично интегрируемых функций относительно меры Лебега и определенных на конечномерном компакте по наблюдениям с гауссовскими ошибками. В ней мы рассматриваем условия существования оптимальной и  $\varepsilon$ -оптимальной процедур восстановления по критерию минимума среднеквадратической ошибки.

Под задачей стохастического восстановления функции из некоторого класса обычно понимают следующее: имеется возможность наблюдать значение этой функции с ошибками в любой точке области ее определения и требуется оценить (восстановить) ее по результатам наблюдений в соответствии с заданным критерием оптимальности. Следует отметить, что эта задача относится к задачам непараметрического (бесконечномерного) оценивания. Задачам непараметрического оценивания посвящено большое количество работ, например [1-4, 6, 7, 12-16].

Приведем краткий обзор результатов по теории стохастического восстановления функций.

Так, в [1, 2] предложен метод решения задачи восстановления, который основывается на теории поперечников Колмогорова и теореме Гливленко–Кантелли.

В [3, 4] содержится подробный обзор результатов по теории стохастического восстановления. В них для решения этой задачи использован минимаксный подход.

В [5, 18] рассматривается минимаксная постановка задачи стохастического восстановления для нелинейных функционалов, решение которой существенно образом опирается на результаты работы [3]. Важно отметить, что в этих работах содержится большое количество новых точно решаемых примеров. В [10] построены минимаксные оценки коэффициентов полиномиальной регрессии.

В [6, 7] применена теория планирования эксперимента для нахождения решения задачи стохастического восстановления.

В [13, 14, 16] предложены рекурсивные алгоритмы стохастического восстановления неизвестной функции и исследована их эффективность.

В [15] разработан метод построения проекционных оценок для восстановления квадратично интегрируемых плотностей распределения случайных величин.

В отличие от вышеприведенных работ, в этой статье для любой квадратично интегрируемой функции заданной на конечномерном компакте решается задача стохастического восстановления, оптимального в среднеквадратическом смысле. В ней мы устанавливаем условия существования решения этой задачи и приводим явный вид этой непараметрической оценки (теорема 1). Кроме того, здесь впервые устанавливаются условия ее несмещенности (теорема 3) и состоятельности (теорема 4).

Построенные в работе непараметрические оценки квадратично интегрируемых функций сложно реализовать на практике. Поэтому, приводится алгоритм построения  $\varepsilon$ -оптимальных конечномерных оценок (теорема 5).

## 1. Основные определения и обозначения. Постановка задачи стохастического восстановления

Пусть  $x \in K$  – конечномерный компакт,  $\mathcal{B}(K)$  – борелевская  $\sigma$ -алгебра на  $K$ , а  $L_2(K)$  – множество измеримых функций  $f: K \rightarrow \mathbb{R}^1$ , квадратично интегрируемых относительно меры Лебега  $\Lambda$  на  $K$ , т.е.  $\int_K f^2(x)dx < \infty$ .

Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – вероятностное пространство на котором задана измеримая функция  $n: \mathbb{N}^+ \times \Omega \times K \rightarrow \mathbb{R}^1$ , обозначаемая  $n_m(x)$ , такая что для любых  $x \in K$  и  $m \in \mathbb{N}^+$

$$En_m(x) = 0, \quad E \int_K n_m^2(x)dx = \sigma^2 < \infty, \quad (1)$$

и для любых  $x \in K$  и  $m \neq q$

$$En_m(x)n_q(x) = 0; \quad (2)$$

здесь через  $E(\cdot)$  обозначен интеграл Лебега относительно вероятностной меры  $P$ .

Предположим, что в любой точке  $x \in K$  мы наблюдаем функцию  $y_m(x)$ , которая представляет собой сумму функций  $f(x) \in L_2(K)$  и  $n_m(x)$ , т.е. наблюдаем функцию  $f(x)$  с аддитивными ошибками  $n_m(x)$

$$y_m(x) = f(x) + n_m(x), \quad (3)$$

где  $m \in \mathbb{N}^+$  – номер наблюдения.

Поскольку  $L_2(K)$  – сепарабельное гильбертово пространство, то в нем существует (вообще говоря неединственная) полная, ортонормированная система функций, которую мы обозначаем через  $\{\varphi_i(x)\}_{i \geq 0}$ , т.е. для любых  $i, j \in \mathbb{Z}^+$  функции  $\varphi_i(x), \varphi_j(x) \in L_2(K)$  такие, что  $\int_K \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx = \delta_{ij}$ , здесь  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера, причем  $\sum_{i=0}^{\infty} \int_K \varphi_i^2(x)dx < \infty$ .

Известно [17], что любая  $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}(K)$ -измеримая функция  $g(\omega, x)$ , со значениями в  $\mathbb{R}^1$ , такая что  $E \int_K |g(\omega, x)|^2 dx < \infty$  почти всюду относительно меры Лебега, допускает представление

$$g(\omega, x) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j^g(\omega)\varphi_j(x),$$

где  $\alpha_j^g(\omega) \triangleq \int_K g(\omega, x)\varphi_j(x)dx$  – случайные величины, которые являются коэффициентами Фурье функции  $g(\omega, x) \in L_2(K)$  [9]. Обозначим:

$$y_m^i \triangleq \int_K y_m(x)\varphi_i(x)dx, \quad (4)$$

$$\alpha_i \triangleq \int_K f(x)\varphi_i(x)dx, \quad (5)$$

$$n_m^i \triangleq \int_K n_m(x) \varphi_i(x) dx. \quad (6)$$

Из (3)–(6) следует, что для любых  $i, m$  выполнено равенство

$$y_m^i = \alpha_i + n_m^i. \quad (7)$$

Отметим, что, в силу условий (1)–(2), для любого  $m \geq 1$  имеем

$$\sum_{i=0}^{\infty} [\alpha_i^2 + E(n_m^i)^2] < \infty, \quad E \sum_{i=0}^{\infty} (y_m^i)^2 < \infty. \quad (8)$$

Обозначим  $\sigma_i^2 \triangleq E(n_m^i)^2$ . Без ограничения общности можно считать, что  $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i^2 = \sigma^2 < \infty$ .

Очевидно, что для любых  $f(x) \in L_2(K)$ ,  $m \in \mathbb{Z}^+$  и  $x \in K$  справедливы равенства:

$$f(x) \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(x), \quad (9)$$

$$n_m(x) \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} n_m^i \varphi_i(x) \quad \text{— P — п. н.}, \quad (10)$$

$$y_m(x) \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} y_m^i \varphi_i(x) \quad \text{— P — п. н.} \quad (11)$$

Обозначим  $\sigma$ -алгебры

$$\mathcal{F}_m^{y^i} \triangleq \sigma\{y_1^i, \dots, y_m^i\}, \quad \mathcal{F}_m^y \triangleq \sigma\{y_1^i, \dots, y_m^i, \forall i \geq 0\}.$$

Очевидно, что для любых  $m \geq 1$  и  $x \in K$  случайная функция  $y_m(x)$  является  $\mathcal{F}_m^y \otimes \mathcal{B}(K)$  – измеримой.

Теперь приведем определения, необходимые для дальнейшего изложения.

**Определение 1** Пусть  $\hat{f}_m(x)$  – любая  $\mathcal{F}_m^y \otimes \mathcal{B}(K)$ -измеримая функция, такая что  $E \int_K |\hat{f}_m(x)|^2 dx < \infty$ , которую будем называть оценкой функции  $f(x) \in L_2(K)$ .

Множество таких оценок обозначим через  $\mathbb{M}_{2,m}(P)$ . Очевидно, что  $\mathbb{M}_{2,m}(P)$  – сепарабельное гильбертово пространство.

В статье рассматривается задача построения оценки  $\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(P)$  такой, что

$$E \int_K [f(x) - \hat{f}_m(x)]^2 dx \rightarrow \inf_{\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(P)}, \quad (12)$$

– это критерий минимума среднеквадратической ошибки относительно меры  $\Lambda \times P$ .

Определим теперь, что мы будем понимать под  $\varepsilon^\beta$ -оптимальной и оптимальной оценками.

**Определение 2** *Оценку  $\hat{f}_m^\varepsilon(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(P)$  назовем  $\varepsilon^\beta$ -оптимальной, где  $\varepsilon \in (0,1)$  – любое,  $\beta > 0$ , если*

$$\inf_{\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(P)} E \int_K [f(x) - \hat{f}_m(x)]^2 dx = E \int_K [f(x) - \hat{f}_m^\varepsilon(x)]^2 dx + O(\varepsilon^\beta). \quad (13)$$

*0-оптимальную оценку назовем оптимальной.*

**Замечание 1** *Под  $O(\varepsilon^\beta)$  понимается такая неслучайная функция  $\Phi(m, \varepsilon)$  от  $m \in \mathbb{Z}^+$  и  $\varepsilon \in (0,1)$  со значениями в  $\mathbb{R}^1$ , у которой для любых  $m \in \mathbb{Z}^+$ ,  $\varepsilon \in (0,1)$  существует положительная константа  $C$  такая, что  $\frac{|\Phi(m, \varepsilon)|}{\varepsilon^\beta} \leq C < \infty$ , где  $\beta > 0$ .*

Целью данной статьи является:

- 1) нахождение условий, при выполнении которых существуют оптимальные и  $\varepsilon^\beta$ -оптимальные оценки любой неизвестной функции  $f(x) \in L_2(K)$  по наблюдениям за ней с гауссовскими ошибками;
- 2) исследование статистических свойств построенных оценок.

## 2. Представление оценок функции из $L_2(K)$ и критериев (12), (13)

**2.1** Поскольку  $\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(P)$ , то  $\Lambda \times P$ -почти всюду она допускает представление

$$\hat{f}_m(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\alpha}_{im} \varphi_i(x), \quad (14)$$

где  $\hat{\alpha}_{im} - \mathcal{F}_m^{y^i}$ -измеримая случайная величина,  $i \in \mathbb{Z}^+$ , которая является коэффициентом Фурье оценки  $\hat{f}_m(x)$ , т.е.

$$\hat{\alpha}_{im} \triangleq \int_K \hat{f}_m(x) \varphi_i(x) dx. \quad (15)$$

**Определение 3 ([16])** *Оценка (14) функции  $f(x) \in L_2(K)$ , где  $\{\varphi_j(x)\}_{j \geq 0}$  – полная ортонормированная система функций в  $L_2(K)$ , называется проеционной.*

Из (14), следует соотношение

$$E \int_K |\hat{f}_m(x)|^2 dx = E \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\alpha}_{im}^2, \quad (16)$$

которое является обобщением известного равенства Парсеваля [8].

Обозначим  $\tilde{\mathbb{M}}_{2,m}(P)$  – множество бесконечномерных случайных векторов  $\hat{\alpha}_m \triangleq (\hat{\alpha}_{0m}, \hat{\alpha}_{1m}, \dots)$ , таких, что: i)  $\hat{\alpha}_{im}$  —  $\mathcal{F}_m^{y^i}$ -измеримы, ii)  $E \sum_{i=0}^{\infty} |\hat{\alpha}_{im}|^2 < \infty$ . Очевидно, что  $\tilde{\mathbb{M}}_{2,m}(P)$  – гильбертово пространство. Из равенства (16) следует утверждение.

**Предложение 1**  $\mathbb{M}_{2,m}(P)$  изоморфно  $\tilde{\mathbb{M}}_{2,m}(P)$ .

## 2.2 Представление критерия оптимальности (12).

Поскольку система  $\{\varphi_i(x)\}_{i \geq 0}$  – полная ортонормированная, то из (9), (14) и (16) для любого  $m \geq 1$  следуют равенства

$$E \int_K [f(x) - \hat{f}_m(x)]^2 dx = E \sum_{i=0}^{\infty} [\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}]^2 = \sum_{i=0}^{\infty} E[\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}]^2,$$

где  $\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(P)$  – некоторая проекционная оценка.

Отсюда, в силу предложения 1, имеем

$$\inf_{\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(P)} E \int_K [f(x) - \hat{f}_m(x)]^2 dx = \inf_{\hat{\alpha}_m \in \tilde{\mathbb{M}}_{2,m}(P)} \sum_{i=0}^{\infty} E[\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}]^2. \quad (17)$$

Пусть  $L_{2m} \triangleq L_2(\Omega, \mathcal{F}_m^{y^i}, P)$  – множество  $\mathcal{F}_m^{y^i}$ -измеримых квадратично интегрируемых случайных величин. Из (17) следует неравенство

$$\inf_{\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(P)} E \int_K [f(x) - \hat{f}_m(x)]^2 dx \geq \sum_{i=0}^{\infty} \inf_{\hat{\alpha}_{im} \in L_{2m}} E[\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}]^2.$$

Ясно, что оценка  $\hat{\alpha}_{im}^0$  является оптимальной тогда и только тогда, когда

$$\inf_{\hat{\alpha}_{im} \in L_{2m}} E[\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}]^2 = E[\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}^0]^2. \quad (18)$$

Таким образом, если существует  $\hat{\alpha}_{im}^0$ , то

$$\inf_{\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(P)} E \int_K [f(x) - \hat{f}_m(x)]^2 dx \geq \sum_{i=0}^{\infty} E[\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}^0]^2.$$

Отсюда, в силу теоремы Фубини и последнего неравенства, имеем

$$\begin{aligned} & \inf_{\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(P)} E \int_K [f(x) - \hat{f}_m(x)]^2 dx \geq \sum_{i=0}^{\infty} E[\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}^0]^2 = \\ & = \inf_{\{\hat{\alpha}_m\} \in \tilde{\mathbb{M}}_{2,m}(P)} E \sum_{i=0}^{\infty} [\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}]^2 = E \int_K [f(x) - \hat{f}_m^0(x)]^2 dx, \end{aligned} \quad (19)$$

где  $\hat{f}_m^0(x) \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\alpha}_{im}^0 \varphi_i(x)$ . Следовательно, доказано следующее утверждение.

**Предложение 2** Для любого  $m \geq 1$  оптимальная проекционная оценка  $\hat{f}_m^0(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(P)$  существует тогда и только тогда, когда существует  $\{\hat{\alpha}_m^0\} \in \tilde{\mathbb{M}}_{2,m}(P)$  такая, что

$$\inf_{\{\hat{\alpha}\}_{i \geq 0} \in \tilde{\mathbb{M}}_{2,m}(P)} E \sum_{i=0}^{\infty} [\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}]^2 = E \sum_{i=0}^{\infty} [\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}^0]^2. \quad (20)$$

**Замечание 2** Из утверждения предложения 2 следует, что для существования оптимальной проекционной оценки функции из класса  $\mathbb{M}_{2,m}(P)$  необходимо и достаточно, чтобы существовали оптимальные оценки ее коэффициентов Фурье.

### 3. Существование решения задачи оптимального стохастического восстановления функции из $L_2(K)$

В данном разделе мы сформулируем один из основных результатов работы.

**Предположение 1** Пусть для любых  $i \geq 0$  и  $m \geq 1$  семейство  $\{n_m^i\}_{i \geq 0, m \geq 1}$  образует гауссовскую систему некоррелированных случайных величин с  $Law(n_m^i) = \mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$ , причем  $\sigma^2 \triangleq \sum_{i=0}^{\infty} \sigma_i^2 < \infty$ .

Теперь мы можем сформулировать основной результат данного раздела.

**Теорема 1** Пусть  $f(x) \in L_2(K)$  и выполнены условия предположения 1. Тогда справедливы следующие утверждения:

1) для почти всех  $x \in K$  и  $m \geq 1$  существует оптимальная проекционная оценка  $\hat{f}_m^0(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(P)$ , которая  $\Lambda \times P$ -почти всюду допускает представление

$$\hat{f}_m^0(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \hat{\alpha}_{im}^0 \varphi_i(x), \quad (21)$$

причем

$$\hat{\alpha}_{jm}^0 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k^j. \quad (22)$$

$$2) \inf_{\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(P)} E \int_K [f(x) - \hat{f}_m(x)]^2 dx = \frac{1}{m} \sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^2 = \frac{\sigma^2}{m}. \quad (23)$$

**Доказательство теоремы 1** Установим 1). Из утверждения предложения 2 следует что существует оптимальная проекционная оценка  $\hat{f}_m^0(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(P)$  такая, что



$$\inf_{\hat{f}_m(x) \in \mathbb{M}_{2,m}(P)} E \int_K [f(x) - \hat{f}_m(x)]^2 dx = E \int_K [f(x) - \hat{f}_m^0(x)]^2 dx. \quad (24)$$

Основным содержанием первого утверждения теоремы является доказательство равенств (22) и (21).

Поэтому рассмотрим  $E \int_K [f(x) - \hat{f}_m^0(x)]^2 dx$ . Из утверждения предложения 2 (см. формулу (20)), имеем

$$E \int_K [f(x) - \hat{f}_m^0(x)]^2 dx = \sum_{j=0}^{\infty} E |\alpha_j - \hat{\alpha}_{jm}^0|^2. \quad (25)$$

Отсюда следует, что для каждого  $j \in \mathbb{Z}^+$  требуется по результатам наблюдений  $(y_1^j, \dots, y_m^j)$  построить оптимальную в среднеквадратическом смысле оценку коэффициента Фурье  $\alpha_j$ . Заметим, что в силу (7) распределение случайной величины  $y_m^j$  является гауссовским, причем  $\text{Law}(y_m^j) = \mathcal{N}(\alpha_j, \sigma_j^2)$ . Известно [17], что оптимальная оценка коэффициента Фурье  $\alpha_j$ , в силу критерия (20), по результатам наблюдений с ошибками  $(y_1^j, \dots, y_m^j)$ , обозначаемая  $\hat{\alpha}_{jm}^0$ , совпадает с соответствующей оценкой по критерию максимального правдоподобия. Следовательно

$$\hat{\alpha}_{jm}^0 = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k^j \quad (26)$$

Умножим левую и правую часть (26) на  $\varphi_j(x)$ , а затем выполним суммирование по всем  $j$ , имеем (21).

Установим 2). Найдем значение  $E \int_K [f(x) - \hat{f}_m^0(x)]^2 dx$ , в силу (25), (7) и предложения 1 имеем

$$\begin{aligned} E \int_K [f(x) - \hat{f}_m^0(x)]^2 dx &= \sum_{j=0}^{\infty} E |\hat{\alpha}_{jm}^0 - \alpha_j|^2 = \sum_{j=0}^{\infty} E \left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m y_k^j - \alpha_j \right|^2 = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} E \left( \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m n_k^j \right)^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sigma_j^2}{m} = \frac{\sigma^2}{m}. \end{aligned}$$

Доказательство закончено.

**Замечание 3** Утверждение теоремы 1 в отличие от соответствующих утверждений работ [3, 12, 13], дает новые достаточные условия существования оптимальной оценки функции из  $L_2(K)$  по наблюдениям с гауссовскими ошибками.

**Следствие 2** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда для каждого  $m \geq 1$  почти всюду относительно меры  $\Lambda \times P$



$$\begin{aligned} \hat{f}_m^0(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} \hat{\alpha}_{lm}^0 \varphi_l(x) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_l^j \varphi_l(x) = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \sum_{l=0}^{\infty} y_l^j \varphi_l(x) = \\ &= \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m y_j(x). \end{aligned} \quad (27)$$

Доказательство следствия 2 вытекает из (11), (20), (21) и теоремы Фубини.

#### 4. Несмещенность оценки $\hat{f}_m^0(x)$

В этом разделе мы покажем что оценка (21) – несмещенная.

**Теорема 3** Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда оценка (21) – несмещенная.

**Доказательство теоремы 3** Из (7) и (21) для любых  $x \in K$  и  $m \geq 1$ , в силу теоремы Фубини, имеем

$$\begin{aligned} E \hat{f}_m^0(x) &= E \sum_{j=0}^{\infty} \hat{\alpha}_{jm}^0 \varphi_j(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x) E \hat{\alpha}_{jm}^0 = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x) \frac{1}{m} E \sum_{k=1}^m y_k^j = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x) \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (\alpha_j + E n_k^j) = \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(x) \alpha_j = f(x). \end{aligned} \quad (28)$$

Доказательство закончено.

#### 5. Состоятельность оценки $\hat{f}_m^0(x)$

В данном разделе мы установим достаточные условия состоятельности оценки  $\hat{f}_m^0(x)$ .

**Теорема 4** Пусть выполнены условия теоремы 3 и для почти всех  $x \in K$  ряд  $\sum_{j=0}^{\infty} \sigma_j^2 \varphi_j^2(x) < \infty$ . Тогда оценка  $\hat{f}_m^0(x)$  – состоятельна.

**Доказательство теоремы 4** Нам надо установить, что для почти всех  $x \in K$

$$\hat{f}_m^0(x) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{P} f(x).$$

Достаточно доказать, что дисперсия оценки  $\hat{f}_m^0(x)$  стремится к нулю, когда  $m \rightarrow \infty$ .

Сначала вычислим дисперсию оценки  $\hat{f}_m^0(x)$ , обозначаемую  $D \hat{f}_m^0(x)$ . Из (21), в силу теоремы Фубини, (9), (7) и (22), имеем

$$\begin{aligned} D\hat{f}_m^0(x) &= E[\hat{f}_m^0(x) - f(x)]^2 = E\left[\sum_{j=0}^{\infty} (\hat{\alpha}_m^j - \alpha_j)\varphi_j(x)\right]^2 = \\ &= E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m y_k^j - \alpha_j\right)\varphi_j(x)\right]^2 = E\left[\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^m n_k^j\varphi_j(x)\right]^2 = \\ &= \frac{1}{m}\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^2(x)\sigma_j^2. \end{aligned}$$

Так как ряд  $\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j^2(x)\sigma_j^2$  сходится, то из последнего равенства следует утверждение теоремы. Доказательство закончено.

## 6. $\varepsilon^\beta$ -оптимальное стохастическое восстановление функции из $L_2(K)$

В данном разделе опишем и обоснуем метод построения  $\varepsilon^\beta$ -оптимальной проекционной оценки неизвестной функции  $f(x) \in L_2(K)$ , которая будет являться конечномерной.

Сначала приведем достаточное условие  $\varepsilon^\beta$ -оптимальности проекционной оценки  $\hat{f}_m^0(x)$  неизвестной функции  $f(x) \in L_2(K)$ .

Обозначим

$$\mathcal{L}_2 \triangleq \{f(\omega, x): K \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^1: E \int_K |f(\omega, x)|^2 dx < \infty\}. \quad (29)$$

Очевидно, что  $\mathcal{L}_2$  – гильбертово пространство со скалярным произведением  $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{L}_2}$  и нормой  $\|\cdot\|_{\mathcal{L}_2}$ .

**Теорема 5** Пусть выполнены условия теоремы 1. Пусть для любого  $\varepsilon > 0$  существует  $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$  такое что для любого  $N \geq N_0(\varepsilon)$  имеет место неравенство

$$\sum_{i=N+1}^{\infty} |\alpha_i|^2 + \sum_{i=0}^N \frac{\sigma_i^2}{m} < \varepsilon$$

Тогда оценка

$$\hat{f}_m^\varepsilon(x) \triangleq \sum_{i=0}^N \hat{\alpha}_{im}^0 \varphi_i(x) \quad (30)$$

является  $\varepsilon$ -оптимальной ( $\beta=1$ ), где  $\hat{\alpha}_{im}^0$  определяется (26).

**Доказательство теоремы 5** Рассмотрим среднеквадратическую ошибку оценки, имеем равенство

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(m, K) &\triangleq E \int_K |f(x) - \sum_{i=0}^N \hat{\alpha}_{im}^0 \varphi_i(x)|^2 dx = E \int_K \left| \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(x) - \right. \\ &\left. \sum_{i=0}^N \hat{\alpha}_{im}^0 \varphi_i(x) \right|^2 dx = E \int_K \left| \sum_{i=0}^N (\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}^0) \varphi_i(x) + \sum_{i=N+1}^{\infty} \alpha_i \varphi_i(x) \right|^2 dx. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$J(m, K) = E \sum_{i=0}^N |\alpha_i - \hat{\alpha}_{im}^0|^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} |\alpha_i|^2. \quad (31)$$

Последнее, с учетом (26), (28), а также (4), (5), (6), (7) примет вид

$$J(m, K) = E \sum_{i=0}^N \left( \frac{1}{m} \sum_{k=0}^m n_k^i \right)^2 + \sum_{i=N+1}^{\infty} |\alpha_i|^2 = \sum_{i=N+1}^{\infty} |\alpha_i|^2 + \frac{1}{m} \sum_{i=0}^N (\sigma_i)^2 < \varepsilon$$

Последнее неравенство вытекает из условий теоремы. Отсюда следует что

$$E \int_K [f(x) - \hat{f}_m^\varepsilon]^2 dx = O(\varepsilon),$$

то есть оценка (30) является  $\varepsilon$ -оптимальной. Доказательство закончено.

**Замечание 4** Из утверждения и доказательства теоремы 5 очевидным образом следует что  $\varepsilon$ -оптимальная оценка определяемая (30) является смещенной и поэтому не является состоятельной. Однако она является асимптотически несмещенной когда  $N \rightarrow \infty$ .

### Заключение

В статье построены оптимальная и  $\varepsilon$ -оптимальная оценки квадратично интегрируемой функции, заданной на конечномерном компакте и наблюдаемой с гауссовскими ошибками, а также исследованы некоторые свойства этих оценок.

### Список литературы

- [1]. Вапник В.Н., Глазкова Т.Г., Коцеев В.А. и др. Алгоритмы и программы восстановления зависимостей. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 816 с.
- [2]. Вапник В.Н. Восстановление зависимостей по эмпирическим данным. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1979. – 448 с.
- [3]. Дарховский Б.С. Новый подход к стохастической задаче восстановления // Теория вероятностей и ее применения. – 2004. – Т. 49. – Вып. 1. – С. 36–53.
- [4]. Дарховский Б.С. О стохастической задаче восстановления // Теория вероятностей и ее применения. – 1998. – Т. 43. – Вып. 2. – С. 357–364.
- [5]. Дарховский Б.С. Стохастическая задача восстановления функционалов // Проблемы передачи информации. – 2008. – Т. 44. – Вып. 4. – С. 29–41.
- [6]. Ермаков С.М., Бродский В.З., Жигляевский А.А. и др. Математическая теория планирования эксперимента. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1983. – 392 с.

- [7]. *Ермаков С.М., Жиглявский А.А.* Математическая теория оптимального эксперимента: учебное пособие. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 320 с.
- [8]. *Кашин Б.С., Саакян А.А.* Ортогональные ряды. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1984. – 495 с.
- [9]. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1976. – Изд. 4е, перераб. – 543 с.
- [10]. *Легостаева И.Л., Ширяев А.Н.* Минимаксные веса в задаче выделения тренда случайного процесса // Теория вероятностей и ее применения. – 1971. – Т. 16. – Вып. 2. – С. 339–345.
- [11]. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов (нелинейная фильтрация и смежные вопросы). – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1974. – 696 с.
- [12]. *Стратонович Р.Л.* Оптимальное расширение функционального подпространства в алгоритмах восстановления плотности и функции распределения // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1970. – № 2. – С. 37–64.
- [13]. *Стратонович Р.Л.* Эффективность методов математической статистики в задачах синтеза алгоритмов восстановления неизвестной функции // Известия АН СССР. Техническая кибернетика. – 1969. – № 1. – С. 32–46.
- [14]. *Тихонов В.И., Кульман Н.К.* Нелинейная фильтрация и квазикогерентный прием сигналов. – М.: Советское радио, 1975. – 704 с.
- [15]. *Хаметов В.М., Сиверцев О.Н.* Задача восстановления функций // Обозрение прикладной и промышленной математики. – 2006. – Т. 13, Вып. 2. – С. 354–356.
- [16]. *Ченцов Н.Н.* Статистические решающие правила и оптимальные выводы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1972. – 520 с.
- [17]. *Ширяев А.Н.* Вероятность. – М.: Наука, 1980. – 574 с.
- [18]. *Darkhovskiy B.* Non asymptotic minimax estimation of functions with noisy observations // Communications in Statistics – Simulation and Computation. – 2012. – Vol. 41, № 6. – P. 787–803.

# **MODELLING OPTIMAL AND $\varepsilon$ -OPTIMAL RECOVERY ALGORITHMS OF SQUARE-INTEGRABLE FUNCTION FROM OBSERVATIONS WITH GAUSSIAN ERRORS**

Bulgakov S.A, Khametov V.M.

*sbulgakov@hse.ru, vmkhametov@hse.ru*  
*National Research University Higher School of Economics*

Received 18.12.2019

The aim of the article is to construct a solution for the problem of the optimal recovery (in the mean-square sense) of a measurable square-integrable (with respect to the Lebesgue measure) function defined on a finite-dimensional compact set. We prove optimal recovery procedure and establish conditions of its unbiasedness and consistency. Furthermore, an  $\varepsilon$ -optimal stochastic recovery procedure is proposed and proved.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ВТОРИЧНЫХ ФОТОРЕАКЦИЙ

В.А. Морозов

*morozov@mail.ioc.ac.ru*

*Институт органической химии им. Н.Д. Зелинского  
Российской академии наук, Москва*

Поступила 08.10.2019

Рассмотрены два подхода к моделированию динамики вторичных фотопревращений отдельных наночастиц. При одном из них в качестве модели используется четырехуровневая частица, первоначально возбужденная в состояние с наибольшим значением энергии, а при другом – модель из двух двухуровневых частиц, одна из которых первоначально возбуждена. При каждом из подходов на основе решений уравнения Шредингера для состояний общей (составной) системы из частиц и поля спонтанной флуоресценции получены выражения для заселенности 4-х состояний частиц как функции времени, которые и отражают динамику вторичной фотореакции. Установлены различия характера динамики реакций, описываемых двумя отмеченными подходами. Дано объяснение происхождения таких различий. Примеры установленных различий характера изучаемой динамики при использовании отмеченных подходов проиллюстрированы приведенными на рисунках изображениями зависимостей от времени заселенности состояний частиц, использованных в двух моделях.

*Ключевые слова: математическое моделирование, составные системы, динамика заселенности состояний наночастиц, вторичные фотореакции.*

УДК 535.14+535.37

DOI: 10.31145/2224-8412-2020-20-1-70-85

### **Введение**

Основой моделирования динамики вторичных фотопреобразований различных наночастиц является установление перераспределения во времени заселенности их состояний после окончания действия импульса облучения. При этом для составления достаточно полного представления о характере рассматриваемого фотопроцесса часто можно ограничиться учетом малого числа таких состояний. Так, при моделировании многих типов мономоле-

кулярных фотореакций в качестве простейшей модели молекулы используют четырехуровневую частицу, подразумевая, что разные уровни энергии этой частицы относятся к различным конформационным состояниям одной и той же молекулы. Результаты такого моделирования использованы для выявления механизма, например, структурной фотоизомеризации молекул (см. гл. 5 в [1]), для интерпретации экспериментальных данных изучения процессов релаксации возбужденных состояний различных полупроводниковых «квантовых точек», параметры которых подбирают для использования таких частиц в качестве различных перспективных оптоэлектронных устройств (см. например, в [2] и приведенную там литературу). Однако, при многих вторичных молекулярных фотореакциях происходит перераспределение энергии между состояниями двух отдельных фрагментов одной молекулы или между состояниями двух молекул: фотовозбужденной молекулы, которую называют «реагентом», и второй молекулы, которая рассматривается как «продукт» реакции. Представляется более последовательным проводить моделирование реакций такого типа на основе применения составной системы из двух различных модельных частиц, так что вместо модели четырехуровневой частицы использовать модельную систему из двух двухуровневых частиц (например, в молекулярной системе с парой «резонирующих изомерных состояний» – см. гл. 8 в [1]). Представляет интерес сопоставить такое моделирование с соответствующим моделированием при использовании четырехуровневой модели молекулы. Выполнение такого сопоставления явилось целью настоящей работы.

Отметим, что моделирование динамики заселенности состояний двух взаимодействующих между собой и с полем излучения двухуровневых частиц («атомов») в последнее время приобрело особое значение в виду большого интереса к изучению динамики заселенности состояний такой системы при рассмотрении атомов как представителей носителей информации («кубитов»). Результаты изучения этой динамики позволяют составить представления о возможности использования таких носителей информации при построении основ «квантовой информатики» и «квантовых вычислений» [3]. Особое внимание при этом уделяется изучению процесса декогеренции состояний кубитов, которая является помехой при использовании их как основы для проектирования квантовых компьютеров, а также такой характеристики состояний кубитов, как «квантовая перепутанность» их состояний, которая рассматривается как новый ресурс для развития отмеченных направлений деятельности. Широко освещаются результаты многочисленных работ, в которых моделируется динамика заселенности перепутанных состояний системы из одинаковых кубитов при спонтанной флуоресценции (см., например, [4]), системы из кубитов с различными значениями энергии возбужденных состояний, взаимодействующими с одной или двумя модами поля излучения (см.



[5] и приведенную там литературу). При этом рассматривались такие аспекты динамики, которые присущи, прежде всего, фотофизическим процессам. Но уже можно считать общепризнанным представление о том (как отмечено, например, в [6]), что перепутывание состояний квантовых систем необходимо принимать во внимание для достижения полного понимания эволюции состояний молекул и при химических фотореакциях.

При использовании системы из двух двухуровневой атомов применительно к моделированию фотохимических процессов в общем случае следует рассматривать взаимодействие различных атомов между собой и с естественным окружением, которое приводит к декогеренции и релаксации возбужденных состояний атомов и играет роль детектора их состояний в режиме счета фотонов флуоресценции [7]. Это будет учитываться при проведении намеченного моделирования, которое основано на использовании решений уравнения Шредингера для общей системы из атомов и поля излучения флуоресценции, сопутствующей «темной» стадии реакции спонтанной флуоресценции, так же как и для общей системы из четырехуровневой молекулы и поля излучения флуоресценции. Отметим, что при изучении перепутывания состояний кубитов обычно используют оптические уравнения Блоха, которые редуцированы по состояниям поля излучения.

Решение поставленной задачи сопоставления моделирования динамики вторичной фотореакции при использовании модели из двух двухуровневых атомов и моделирования при использовании модели четырехуровневой молекулы проще начать с рассмотрения моделирования динамики заселенности состояний модели четырехуровневой молекулы. Оно приведено в следующей части работы.

### Четырехуровневая молекула

Гамильтониан рассматриваемой системы из четырехуровневой молекулы и поля излучения запишем в виде

$$H = H_{\text{mol}} + H_f + V + W,$$

где  $H_{\text{mol}}$  – гамильтониан свободной молекулы,  $H_f$  – гамильтониан поля излучения и поля оптических фононов в тепловом резервуаре окружения молекулы, (образуемым атомами фрагментов, прилегающих к молекуле или внутримолекулярными колебательными степеням свободы молекулы и рассматриваемым как совокупность гармонических осцилляторов – поле фононов по [8]);  $V$  – оператор энергии взаимодействия молекулы с полем поперечной компоненты поля излучения (или взаимодействия с полем фононов);  $W$  – оператор энергии динамического взаимодействия между состояниями молекулы и между состояниями атомов (см. ниже).



На рис. 1 схематически приведено относительное положение уровней энергии  $E_n$  ( $n = 1 \div 4$ ) собственных состояний молекулы (часть «а») и атомов (часть «б»). Уровни энергии отмечены отрезками горизонтальных линий. Места положения этих отрезков на оси ординат качественно отражают значения энергии соответствующих состояний молекулы. Для простоты взяты равные значения разности  $E_4 - E_3$  и  $E_2 - E_1$ . Будем полагать, что состояния 1 и 4 относятся к одной конфигурации молекулы, а состояния 2 и 3 – к другой, так что, например, состояния 1 и 4 относятся к одной изомерной форме молекулы, а состояния 2 и 3 – к другой ее изомерной форме. Тонкими линиями со стрелками обозначены учитываемые радиационные переходы при излучении фотонов спонтанной флуоресценции, а круговыми кривыми – нерадиационные переходы между возбужденными состояниями, обусловленные взаимодействием между состояниями 3 и 4 (типа диполь-дипольного взаимодействия атомов с учетом продольных компонент электромагнитного поля – см., например, в [9], или подобного вида взаимодействия – см. в [1]). Заметим также, что состояния принятой модели молекулы могут рассматриваться как состояния такой электрон-дырочной пары одиночной полупроводниковой квантовой точки, возбужденные электрон-фононные состояния которой связаны взаимодействиями, приводящими к процессам нерадиационного переноса энергии между ними (как в модели, принятой в [10] и многих других работах, список которых приведен в этой работе).

Рядом с каждой линией со стрелкой, направленной вниз, приведена буква, обозначающая «сорт» соответствующего фотона спонтанной флуоресценции, возникающего при переходе молекулы или атома между состояниями, соединенными этой стрелкой. Например, буква  $\sigma$  означает сорт фотона излучения при переходе частицы из состояния 4 в состояние 1,  $\eta$  – фотона излучения с переходом частицы из состояния 3 в состояние 2. Учитываются радиационные распады состояний 4 и 3 с переходами частицы в состояния, соответственно 1 и 2, и нерадиационные обратимые переходы между «резонирующими» состояниями 4 и 3 («темновая» стадия вторичной фотореакции). Предполагается, что константы, характеризующие радиационную ширину уровней энергии состояний 3 и 4 достаточно малы по сравнению с частотами радиационных переходов молекулы или атома из этих состояний, так что можно пренебрегать перекрытием соответствующих спектральных линий с частотами  $\omega_{32} = \hbar^{-1}(E_3 - E_2)$ ,  $\omega_{41} = \hbar^{-1}(E_4 - E_1)$ , относящимися к собственным  $\nu$  – и  $\sigma$  – модам поля флуоресценции.

Рассмотрим динамику заселенности состояний молекулы от того момента времени, когда короткий импульс света с несущей частотой, равной частоте  $\omega_{41}$  возбудил молекулу в состояние 4 и перестал взаимодействовать с ней. В отношении условий возбуждения одного из состояний реальной многоатомной молекулы см., например, в [11].

Учитываемые 4 типа собственных состояний общей системы из молекулы и поля излучения (в гильбертовом пространстве 4-х состояний молекулы с соответствующими состояниями поля излучения) обозначим индексами  $40, 30, 1\sigma, 2\nu$ . Состояние  $|40\rangle$  ( $|30\rangle$ ) означает, что молекула находится в состоянии 4 (3), а поле излучения не содержит фотонов (и фононов);  $|1\sigma\rangle$  – молекула в состоянии 1, а поле содержит фотон  $\sigma$ ;  $|2\nu\rangle$  – молекула в состоянии 2, поле содержит фотон  $\nu$ . Эти состояния будем использовать в качестве ортонормированного базиса («вычислительный базис») для составления общего вида состояния общей системы из молекулы и фотонов рассматриваемой спонтанной флуоресценции.

Моделирование динамики заселенности состояний общей системы из молекулы и поля излучения основано на использовании решений уравнения Шредингера для амплитуд вероятности заселенности приведенных выше базисных состояний. Это уравнение в представлении взаимодействия запишем в виде уравнения для амплитуды вероятности  $b_n(t)$  заселенности собственного состояния  $n$  общей системы:

$$i\hbar\dot{b}_n(t) = \sum_m (V + W)_{nm} b_m(t) \cdot \exp[i(E_n - E_m)t/\hbar] + i\hbar\delta_{ni}\delta(t),$$

где  $i, n, m$  – индексы приведенных выше базисных состояний общей системы с энергией, соответственно,  $E_i, E_n, E_m$ ;  $i$  – начальное собственное состояние системы ( $|40\rangle$ );  $\omega_{nm} = \hbar^{-1}(E_n - E_m)$ ;  $\delta_{ki}$  – символ Кронекера,  $\delta_{ni} = 0$  при  $n \neq i$  и  $\delta_{ni} = 1$  при  $n = i$ ;  $t$  – время;  $\delta(t)$  – функция Дирака;  $V$  – оператор энергии взаимодействия между частицей и полем излучения;  $V = -(\mathbf{ed})$ , где  $\mathbf{e}(t)$  – напряжённость электрического поля,  $\mathbf{d}$  – оператор дипольного момента частицы,  $W$  – оператор взаимодействия между состояниями молекулы, приводящего к нерадиационным переходам.

Для объёма  $L^3$  пространства, в котором находится молекула и рассматриваемое поле излучения, и реального значения матричного элемента оператора дипольного момента частицы при введенных обозначениях имеем, например, для матричного элемента оператора  $V$  по состояниям  $1\sigma$  и  $40$  такое выражение:  $V_{1\sigma}^{40} = iL^{-3/2} \sqrt{2\pi \cdot \hbar \omega_\sigma} \cdot (d_\sigma)_{14}$ ;  $d_{14}$  – матричный элемент оператора  $d$  по состояниям молекулы 1 и 4,  $\omega_\sigma$  – частота фотона  $\sigma$ , аналогично используется обозначение  $\omega_\nu$  – частота фотона  $\nu$ . Будем полагать, что матричные элементы оператора  $W$  отличны от нуля только для нерадиационных переходов между состояниями 3 и 4. Для этих матричных элементов используется обозначение  $W_{43} = W_{34}^* \equiv \hbar w > 0$ .

При использовании Фурье-представления

$$b_n(t) = i(2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} G_n(E) \cdot \exp[i(E_n - E)t/\hbar] dE,$$

где  $E$  – формальная энергетическая переменная, решение уравнения Шредингера сводится к решению системы уравнений

$$(E - E_n) \cdot G_n(E) = \sum_m (V + W)_{nm} G_m(E) + \delta_{n0},$$

где  $\delta_{n0}$  – символ Кронекера, «0» означает символ начального состояния составной системы.

При рассматриваемом спонтанном распаде молекулы из состояния 4 ( $\delta_{40} = 1$ ) эта система уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} (E - E_{40}) \cdot G_{40}(E) &= W_{40}^{30} G_{30}(E) + \sum_{\sigma} V_{40}^{1\sigma} G_{1\sigma} + 1, \\ (E - E_{30}) \cdot G_{30}(E) &= W_{30}^{40} G_{40}(E) + \sum_{\nu} V_{30}^{2\nu} G_{2\nu}, \\ (E - E_{1\sigma}) \cdot G_{1\sigma}(E) &= V_{1\sigma}^{40} G_{40}(E), \\ (E - E_{2\nu}) \cdot G_{2\nu}(E) &= V_{2\nu}^{30} G_{30}(E). \end{aligned} \quad (1)$$

Используем обычно вводимые (см. [12]) обозначения:

$$\gamma_4 = i\hbar^{-1} \sum_{\sigma} |V_{1\sigma}^{40}|^2 \zeta(E - E_{1\sigma}), \quad \gamma_3 = i\hbar^{-1} \sum_{\nu} |V_{2\nu}^{30}|^2 \zeta(E - E_{2\nu}),$$

где  $\zeta(E) = P/E - i\pi\delta(E)$ ,  $P/E$  – главное значение функции  $1/E$ ,  $\delta(E)$  – функция Дирака. В дальнейшем, как обычно, под выражениями  $\gamma_m$  подразумеваются реальные части приведенных выше определений этих величин, взятые при значениях энергии составной системы в состоянии  $m$ , а мнимые их части, отражающие радиационный сдвиг уровней 4 и 3 не учитываются (см. [12]), так что константы

$$\begin{aligned} \gamma_4 &= \pi\hbar^{-2} \sum_{\sigma} |V_{1\sigma}^{40}|^2 \delta(E_{40} - E_{1\sigma}) = 2\omega_{41}^3 d_{41}^2 / 3\hbar c^3, \\ \gamma_3 &= \pi\hbar^{-2} \sum_{\nu} |V_{2\nu}^{30}|^2 \delta(E_{30} - E_{2\nu}) = 2\omega_{32}^3 d_{32}^2 / 3\hbar c^3 \end{aligned}$$

характеризуют скорости радиационного распада состояния 4 и состояния 3 при излучении фотонов  $\sigma$  и  $\nu$  соответственно. Так как динамику состояния молекулы можно описывать подобным образом и том случае, когда она взаимодействует как с полем фотонов, так и с полем осцилляторов теплового термостата (фононов) (см. гл. 8 в [13]), то можно использовать одинаковые выражения для матричных элементов оператора взаимодействия электронной подсистемы молекулы с полем излучения и с полем фононов и полагать, что константы  $\gamma_3$  и  $\gamma_4$  учитывают как радиационный, так и нерадиационный распад возбужденных состояний молекулы.

Ограничимся в дальнейшем рассмотрением таких моделей молекулы и атомов, в которых  $\gamma_4 = \gamma_3 \equiv \gamma$ . С использованием таких обозначений решение системы уравнений (1) имеет вид:

$$G_{40}(E) = \frac{E - E_{30} + i\hbar\gamma}{(E - E_{40} + i\hbar\gamma)(E - E_{30} + i\hbar\gamma) - (\hbar w)^2},$$

$$G_{30}(E) = \frac{\hbar w}{E - E_{30} + i\hbar\gamma} G_{40}(E),$$

$$G_{2\nu}(E) = V_{2\nu}^{30} \zeta(E - E_{2\nu}) G_{30}(E),$$

$$G_{1\sigma}(E) = V_{1\sigma}^{40} \zeta(E - E_{1\sigma}) G_{40}(E).$$

Введем следующие обозначения:  $E_{40} - E_{30} = 2\hbar\Delta$ ,  $\delta = \sqrt{w^2 + \Delta^2}$ .

С использованием этих обозначений знаменатель выражения  $G_{40}(E)$  при  $E = E_{30} + \hbar x$  представим в виде  $\hbar^2(x - x_1)(x - x_2)$ , где  $x_{1,2} = \Delta - i\gamma \pm \delta$ , и, переходя к обратным Фурье-представлениям приведенных выше выражений  $G_m(E)$ , получаем:

$$b_{40}(t) = \delta^{-1} [\delta \cos(\delta t) - i\Delta \sin(\delta t)] \exp[(i\Delta - \gamma)t],$$

$$b_{30}(t) = -i w \delta^{-1} \sin(\delta t) \exp[(-i\Delta - \gamma)t],$$

$$b_{2\nu}(t) = \frac{w V_{\nu 2}^{03}}{\hbar} \left\{ \frac{1}{(\bar{\omega}_\nu - \delta + i\gamma)(\bar{\omega}_\nu + \delta + i\gamma)} - \frac{\exp[(i\bar{\omega}_\nu - \gamma)t]}{2\delta} \left[ \frac{\exp(-i\delta t)}{\bar{\omega}_\nu - \delta + i\gamma} - \frac{\exp(i\delta t)}{\bar{\omega}_\nu + \delta + i\gamma} \right] \right\},$$

$$b_{1\sigma}(t) = \frac{V_{\sigma 1}^{04}}{\hbar} \left\{ \frac{\bar{\omega}_\sigma + \Delta + i\gamma}{(\bar{\omega}_\sigma - \delta + i\gamma)(\bar{\omega}_\sigma + \delta + i\gamma)} - \frac{\exp[(i\bar{\omega}_\sigma - \gamma)t]}{2\delta} \left[ \frac{(\Delta + \delta) \exp(-i\delta t)}{\bar{\omega}_\sigma - \delta + i\gamma} - \frac{(\Delta - \delta) \exp(i\delta t)}{\bar{\omega}_\sigma + \delta + i\gamma} \right] \right\},$$

где  $\bar{\omega}_\nu = \omega_\nu - \omega_{32} - \Delta$ ,  $\bar{\omega}_\sigma = \omega_\sigma - \omega_{41} + \Delta$ .

Динамика заселенности резонирующих состояний 4 и 3 молекулы определяется выражениями:

$$|b_{40}(t)|^2 \equiv P_4(w, \gamma, \Delta, t) = (2\delta^2)^{-1} [2\Delta^2 + w^2 + w^2 \cos(2\delta t)] \exp(-2\gamma t),$$

$$|b_{30}(t)|^2 \equiv P_3(w, \gamma, \Delta, t) = (2\delta^2)^{-1} w^2 [1 - \cos(2\delta t)] \exp(-2\gamma t).$$

Для определения динамики заселенности состояний 1 и 2 молекулы в процессе спонтанной флуоресценции примем общие представления теории

преобразования света молекулой и квантовых измерений относительно характеристик состояний открытых систем [7]. Согласно этим представлениям непрерывное взаимодействие излучающей свет молекулы с естественным макроскопическим окружением приводит к потере когерентности в суперпозиции состояний составной системы («декогеренции») и при этом осуществляется реальная регистрация («измерение») состояния частицы при детектировании состояний поля излучения, приводящего к «уничтожению» соответствующего фотона. Такое измерение имеет селективный характер и позволяет определять вероятность парциальных эволюций состояния молекулы. С учетом этого, заселенности состояний молекулы определяем суммой вероятностей состояний составной системы по возможным состояниям тех фотонов, которые могут быть излучены молекулой в процессе ее «спектроскопического перехода» (по терминологии [14]) в рассматриваемое состояние и поглощены окружением («зарегистрированы»).

Руководствуясь этими положениями, для зависимости от времени заселенности состояния 2, в котором молекула оказывается в результате излучения  $\nu$  – компоненты рассматриваемой флуоресценции, получаем следующее выражение:

$$\sum_{\nu} |b_{2\nu}(t)|^2 \equiv P_2(w, \gamma, \Delta, t) = \gamma w^2 \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2\gamma(\delta^2 + \gamma^2)} - \frac{\exp(-2\gamma t)}{2\gamma\delta^2} - \\ + \frac{\exp(-2\gamma t)[\gamma \cos(2\delta t) - \delta \sin(2\delta t)]}{2\delta^2(\gamma^2 + \delta^2)} \end{array} \right\}.$$

При этом

$$\sum_{\sigma} |b_{1\sigma}(t)|^2 \equiv P_1(t) = 1 - P_2(t) - P_3(t) - P_4(t).$$

При вычислении этих значений заселенности состояний молекулы использовался обычный переход от суммирования по параметрам фотонов  $\nu$  и  $\sigma$  к интегрированию по значениям их частоты и направлениям распространения с учетом двух состояний поляризации, и то обстоятельство, что матричные элементы операторов  $V$  и  $W$  можно считать медленно меняющимися функциями  $E$  в области тех значений, которые захватывают максимум резонансного знаменателя выражений  $G_n(E)$ , и выносить их из под знака интеграла при том значении переменной интегрирования, которое соответствует этому максимуму. Полученные выражения при  $\Delta = 0$  совпадают с соответствующими выражениями в работе [15].

Для скоростей изменения заселенности состояний молекулы получаем следующие выражения:

$$\dot{P}_4(t) = -2\gamma P_4(t) - \delta^{-1} w^2 \exp(-2\gamma t) \sin(2\delta t),$$

$$\dot{P}_3(t) = -2\gamma P_3(t) + \delta^{-1} w^2 \exp(-2\gamma t) \sin(2\delta t),$$

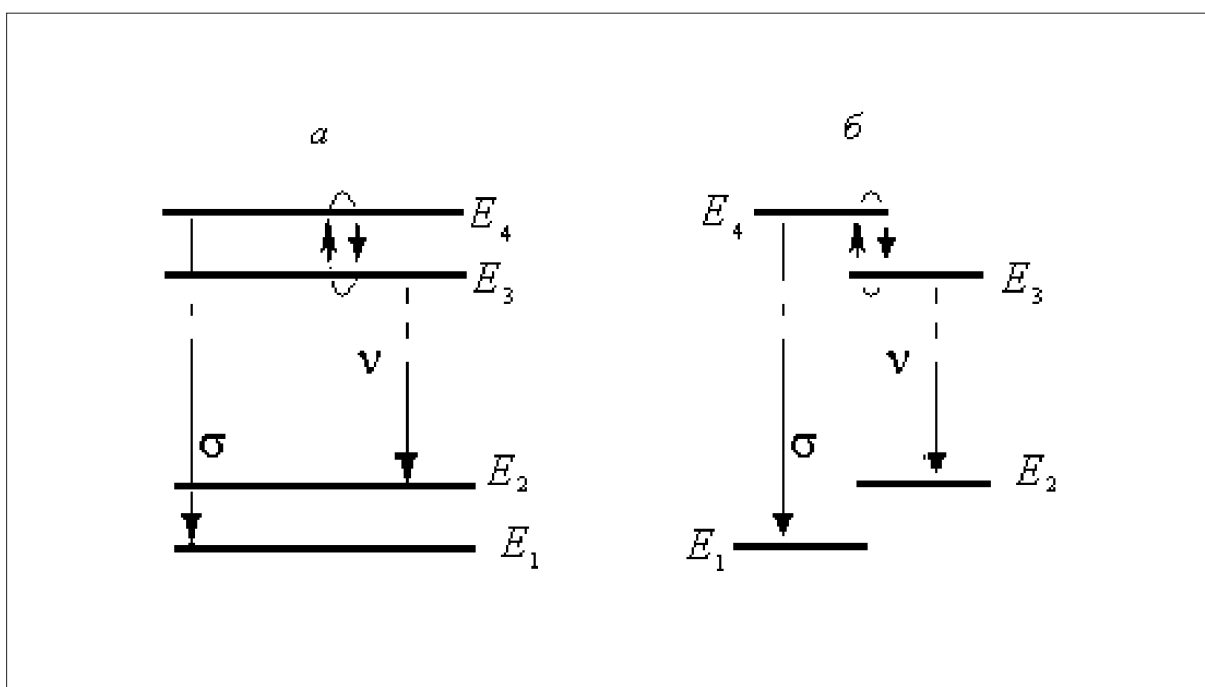
$$\dot{P}_2(t) = 2\gamma P_3(t) \text{ и } \dot{P}_1(t) = 2\gamma P_4(t).$$

а «эффективность  $R$  такой реакции» (вероятность перехода молекулы из состояния 4 в состояние 2) можно характеризовать величиной:

$$R(w, \gamma, \Delta) \equiv P_2(w, \gamma, \Delta, \infty) = \frac{w^2}{2(w^2 + \Delta^2 + \gamma^2)}.$$

### Система из двух атомов

При рассмотрении фотореакции на основе использования модели из двух двухуровневых атомов, в качестве модели реагента возьмем атом «А» (или «первый» атом), значения энергии собственных состояний которого соответствуют значениям энергии состояний 1 и 4 рассмотренной молекулы, а в качестве модели продукта – атом «В» (или «второй» атом), значения энергии собственных состояний которого соответствуют значениям энергии состояний 2 и 3 рассмотренной молекулы. Атомы связаны динамическим взаимодействием, аналогичным взаимодействию возбужденных состояний молекулы (часть «б» Рис. 1.)



Схемы относительного положения уровней энергии четырехуровневой модели молекулы и модели из двух двухуровневых атомов с указанием учитываемых переходов между ними.

Гамильтониан общей системы из атомов и поля излучения:

$$H = {}_1H + {}_2H + W + {}_1H_f + {}_2H_f + {}_1V + {}_2V ,$$

где  ${}_1H$  ( ${}_2H$ ) – гамильтониан первого (второго) атома,  $W$  – оператор энергии динамического взаимодействия между атомами,  ${}_1H_f$  ( ${}_2H_f$ ) – гамильтониан  $\sigma - (\nu -)$  мод поля флуоресценции;  ${}_1V$  ( ${}_2V$ ) оператор энергии взаимодействия между первым (вторым) атомом и полем излучения (или полем фононов).

Вектор состояния общей системы представим в виде тензорного произведения состояний каждого из атома и соответствующего поля флуоресценции:

$$|\Psi^{AB}(x_1, x_2, t) \Psi_f\rangle = |\Psi^B(x_2, t) \Psi_{f1}\rangle \otimes |\Psi^A(x_1, t) \Psi_{f2}\rangle$$

где  $x_1$  совокупность координат, описывающих пространственное положение первого атома, а  $x_2$  – второго атома;

Соответственно, базисные состояния для описания общей системы из двух атомов и поля излучения также представляют собой тензорное произведение базисных состояний атома и соответствующего поля излучения. При этом, для описания динамики заселенности состояний общей системы при спонтанной флуоресценции из первоначально возбужденного одного из атомов, можно ограничиться использованием ортонормированного базиса пространства состояний двухатомной системы и поля излучения, состоящего из четырех следующих состояний этой общей системы.

Будем обозначать каждое из этих базисных состояний четырьмя индексами, первые два из которых характеризуют состояние первого атома и состояние поля соответствующей  $\sigma -$  флуоресценции, а вторые – состояние второго атома и состояние поля соответствующей  $\nu -$  флуоресценции. Для сравнения с проведенным рассмотрением динамики реакции при использовании четырехуровневой модели молекулы, сохраним соответствующую нумерацию, так что начальное состояние  $|4020\rangle$  общей системы – это состояние двухатомной системы и поля излучения, в котором первый атом находится в возбужденном состоянии с собственной энергией  $E_4$ , поле флуоресценции в состоянии 0, а второй атом – в основном состоянии с собственной энергией  $E_2$  и поле флуоресценции в состоянии 0. Следующие три базисных состояния общей системы:  $|1030\rangle$ ,  $|102\nu\rangle$  и  $|1\sigma 20\rangle$ . Соответственно, каждое из значений собственной энергии общей системы и амплитуды этих состояний будем помечать совокупностью четырех индексов:  $E_{4020}$ ,  $b_{4020}(t)$  и т.п. При использовании такого вычислительного базиса получаем следующую систему



уравнений для коэффициентов фурье-представления амплитуд заселенности состояний общей системы из двух атомов и полей флуоресценции:

$$\begin{aligned}
 (E - E_{4020}) \cdot G_{4020}(E) &= W_{4020}^{1030} G_{1030}(E) + \sum_{\sigma} {}_1V_{40}^{1\sigma} G_{1\sigma 20} + 1, \\
 (E - E_{1030}) \cdot G_{1030}(E) &= W_{1030}^{4020} G_{4020}(E) + \sum_{\nu} {}_2V_{30}^{2\nu} G_{102\nu}, \\
 (E - E_{1\sigma 20}) \cdot G_{1\sigma 20}(E) &= {}_1V_{1\sigma}^{40} G_{4020}(E), \\
 (E - E_{102\nu}) \cdot G_{102\nu}(E) &= {}_2V_{2\nu}^{30} G_{1030}(E).
 \end{aligned} \tag{2}$$

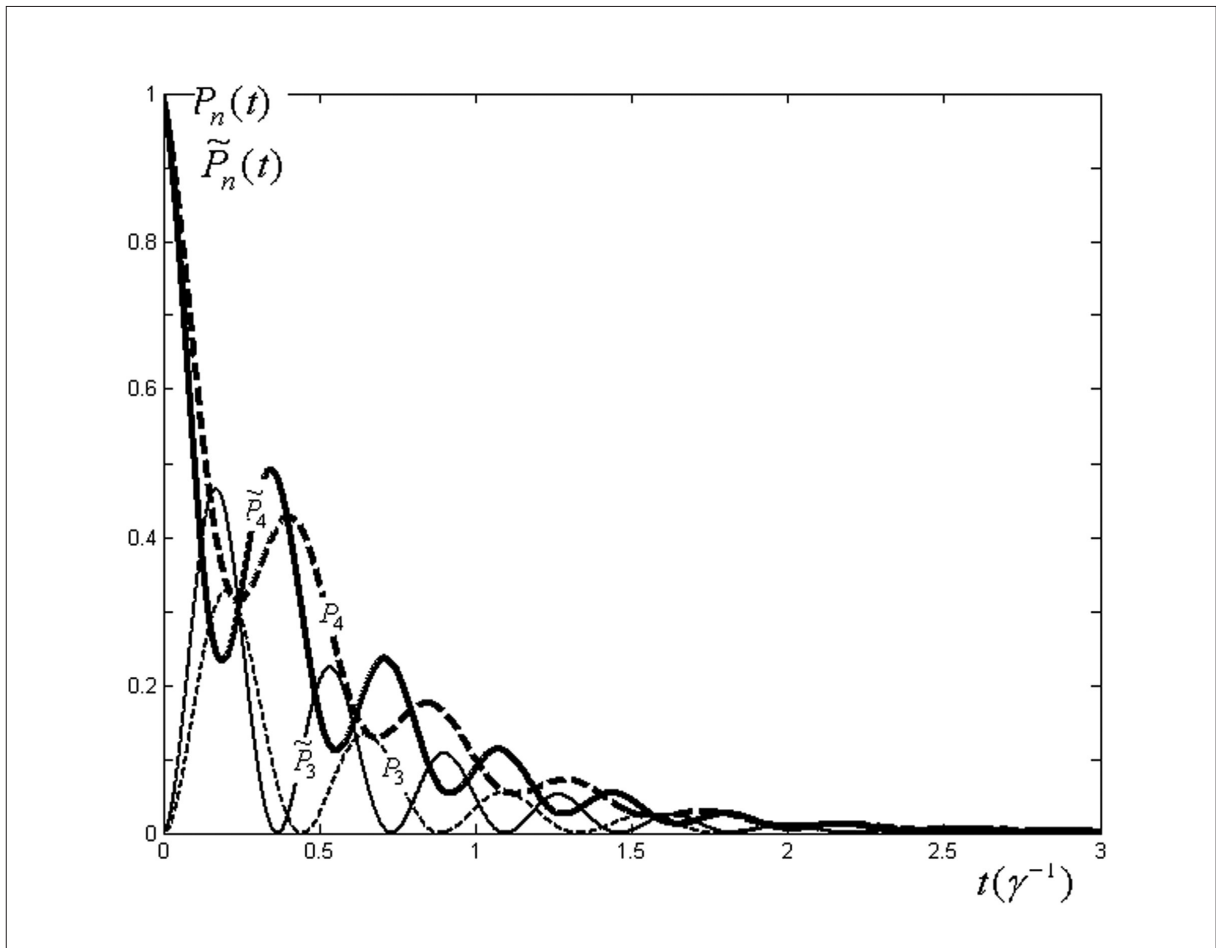
Если вместо использованного при решении системы (1) обозначения  $E_{40} - E_{30} = 2\hbar\Delta$  использовать обозначение  $E_{4020} - E_{1030} = 2\hbar\Delta + (E_2 - E_1) \equiv 2\hbar\tilde{\Delta}$ , то решения системы уравнений (2) имеют такой же вид, как решения системы уравнений (1), в которых  $w$  заменено на  $\tilde{w} \equiv \hbar^{-1}W_{4020}^{1030} = \hbar^{-1}W_{1030}^{4020}$ ,  $V_{2\nu}^{30}$  заменено на  ${}_2V_{2\nu}^{30}$ ,  $V_{1\sigma}^{40}$  заменено на  ${}_1V_{1\sigma}^{40}$ ,  $\gamma_4 = \gamma_3 = \gamma$  — на  $\tilde{\gamma} = \pi\hbar^{-2} \sum_{\sigma} |{}_1V_{1\sigma}^{40}|^2 \delta(E_{40} - E_{1\sigma}) = \pi\hbar^{-2} \sum_{\nu} |{}_2V_{2\nu}^{30}|^2 \delta(E_{30} - E_{2\nu})$ ,  $E_{40}$  — на  $E_{4020} = E_{40} + E_{20}$ ,  $E_{30}$  — на  $E_{1030} = E_{10} + E_{30}$ ,  $E_{1\sigma}$  — на  $E_{1\sigma 20} = E_{1\sigma} + E_{20}$ ,  $E_{2\nu}$  — на  $E_{102\nu} = E_{10} + E_{2\nu}$ . С учетом этого, вместо  $b_n(w, \gamma, \Delta, t)$ ,  $P_n(w, \gamma, \Delta, t)$  для четырехуровневой молекулы и поля излучения (где  $n \div 40, 30, 1\sigma, 2\nu$ ), для системы из двух двухуровневых атомов и поля излучения будем иметь соответствующие выражения  $\tilde{b}_n(\tilde{w}, \tilde{\gamma}, \tilde{\Delta}, t)$  и  $\tilde{P}_n(\tilde{w}, \tilde{\gamma}, \tilde{\Delta}, t)$ , где  $n \div 4020, 1030, 1\sigma 20, 102\nu$ .

Таким образом, результаты моделирования динамики рассматриваемых фотореакций одинаковы при применении двух использованных подходов при равенстве параметров  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{\gamma}$ ,  $\tilde{\Delta}$  параметрам  $w$ ,  $\gamma$ ,  $\Delta$ . Отличие величины  $\tilde{w}$  от величины  $w$ ,  $\tilde{\gamma}$  от  $\gamma$  и  $\tilde{\Delta}$  от  $\Delta$  обуславливает разницу между зависимостями  $P_n(w, \gamma, \Delta, t)$  и  $\tilde{P}_n(\tilde{w}, \tilde{\gamma}, \tilde{\Delta}, t)$ , и разницу между эффективностью реакции  $R(w, \gamma, \Delta)$  и  $\tilde{R}(\tilde{w}, \tilde{\gamma}, \tilde{\Delta})$ . Эти различия и отражают отличие результатов моделирования динамики рассматриваемой фотореакции при использовании в качестве модели молекулы четырехуровневую частицу от результатов моделирования этой фотореакции при использовании модели из двух двухуровневых частиц. Представляет интерес определить характер изменения отмеченных полученных зависимостей характеристик динамики фотореакции в зависимости от изменения величин  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{\gamma}$  по сравнению с  $w$ ,  $\gamma$ , которое определяется строением рассматриваемых конкретных молекулярных систем и от изменения величин  $\tilde{\Delta}$  и  $\Delta$ , которое обусловлено разной формой записи разности уровней энергии между состояниями частиц в рассмотренных моделях и проявляется при невырожденных уровнях  $E_2$  и  $E_1$ . Достаточно полное представление относительно проявления характерных случаев таких изменений динамики фотореакции можно составить на основе рассмотрения приведенных ниже двух примеров.



## Сравнение результатов применения двух подходов

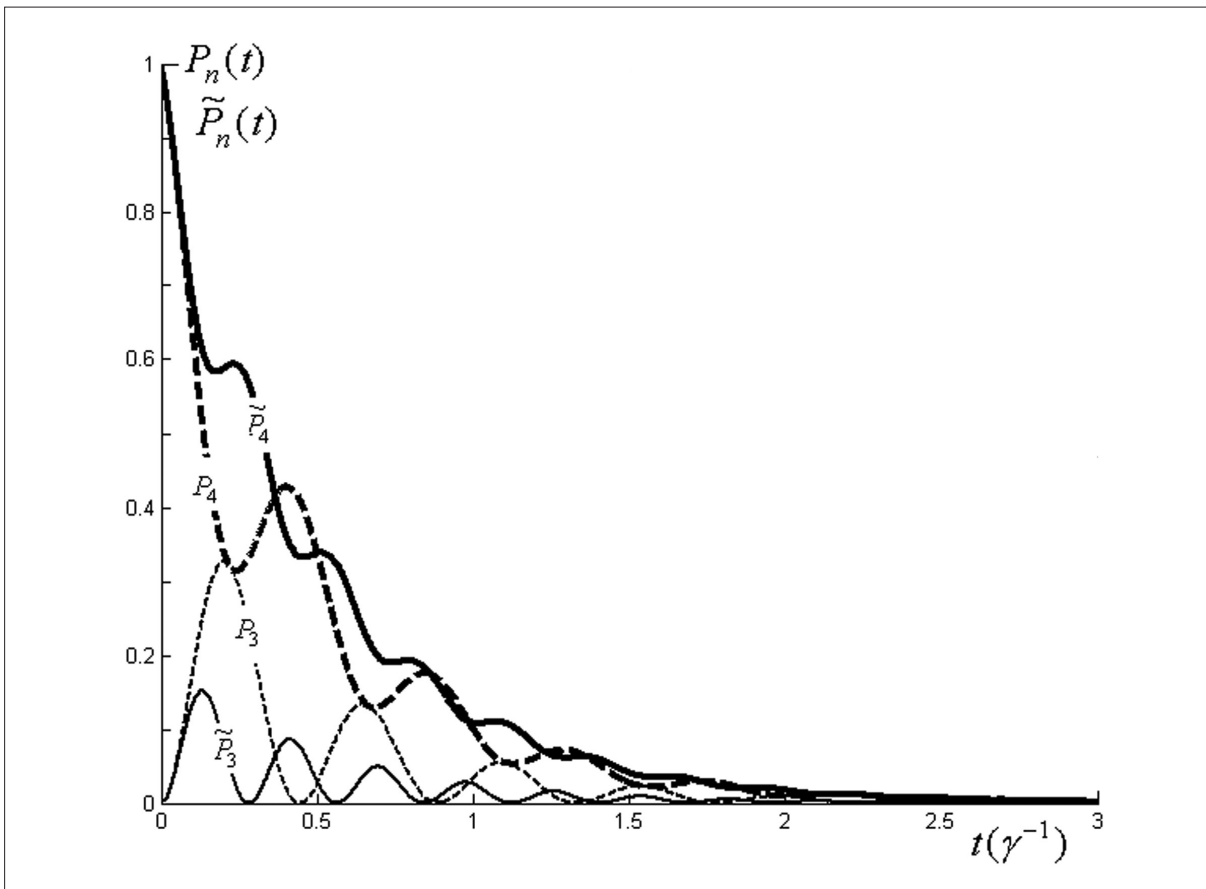
Иллюстрацию отличия результатов моделирования динамики фотореакции, которое обусловлено отличием величины  $\tilde{w}$  от величины  $w$ , демонстрирует Рис. 2. На этом рисунке по оси абсцисс отложено время в единицах  $(\gamma)^{-1}$ , а по оси ординат отложены значения заселенности возбужденных состояний молекулы  $P_n$  при  $n = 40$  и при  $n = 30$ , и состояний заселенности возбужденных состояний атомов  $\tilde{P}_n$  при  $n = 4020$  и при  $n = 1030$ . Сплошными кривыми изображены функции  $\tilde{P}_n(t)$ , а штриховыми кривыми – функции  $P_n(t)$ . Утолщенные кривые изображают зависимости  $P_4(t)$  и  $\tilde{P}_4(t)$ , а тонкие – зависимости  $P_3(t)$  и  $\tilde{P}_3(t)$ . Для краткости, на этом рисунке у кривых, помеченных буквами  $P_n$  или  $\tilde{P}_n$ , приведен только один индекс 4 или 3 вместо полного набора чисел 40 или 30 и, соответственно, 4020 или 1030. Зависимости  $P_n(t)$  соответствуют значениям  $w = 5\gamma$  и  $\Delta = 5\gamma$ , зависимости  $\tilde{P}_n(t)$  – значениям  $\tilde{w} = 7\gamma$  и  $\tilde{\Delta} = 5\gamma = \Delta$ .



Сравнение динамики заселенности возбужденных состояний четырехуровневой молекулы с вырожденными уровнями основного и первого возбужденного состояния и двух двухуровневых атомов при различных значениях константы взаимодействия их возбужденных состояний (пояснения в тексте).

Как видно из этого рисунка, при увеличении значения  $\tilde{w}$  по сравнению со значением  $w$  характер зависимостей  $\tilde{P}_n(t)$  существенно отличается от характера зависимостей  $P_n(t)$ . Так, функции  $\tilde{P}_n(t)$  осциллируют быстрее соответствующих функций  $P_n(t)$  и их осцилляции выражены более четко; значительно различаются моменты времени, при которых  $\tilde{P}_4(t) = \tilde{P}_3(t)$ , от моментов времени, при которых  $P_4(t) = P_3(t)$ ; эффективность реакции увеличивается:  $R(w = 5\gamma, \Delta = 5\gamma, \gamma) \cong 0.25$ , а  $\tilde{R}(\tilde{w} = 7\gamma, \tilde{\Delta} = 5\gamma, \tilde{\gamma} = \gamma) \cong 0.33$ .

Отметим, что Рис. 2 иллюстрирует отличие вида динамики вторичной фотореакции четырехуровневой молекулы и двухуровневой двухатомной системы, характеризующихся значениями  $E_4 - E_3 = 2\Delta$ ,  $E_2 - E_1 = 0$ , т.е. при вырождении основного и первого возбужденного состояния четырехуровневой системы, при котором  $\tilde{\Delta} = \Delta$  и одинаковые значения энергии основных состояний атомов. Заметим, что при снятии этого вырождения рассматриваемая динамика заселенности состояний четырехуровневой частицы не меняется, тогда как динамика заселенности соответствующих состояний двухатомной системы меняется, независимо от соотношения значений параметров частиц  $\tilde{w}$  и  $w$ , как это видно из сравнения полученных выражений  $P_n(w, \gamma, \Delta, t)$  и  $\tilde{P}_n(\tilde{w}, \tilde{\gamma}, \tilde{\Delta}, t)$  при  $\tilde{\Delta} = \Delta$  и  $\tilde{w} = w$ .



Сравнение динамики заселенности возбужденных состояний четырехуровневой молекулы и состояний двух двухуровневых атомов при вырожденных и при невырожденных уровнях

основного и первого возбужденного состояния четырехуровневой молекулы (пояснения в тексте).

На Рис. 3 изображены функции  $P_n(w, \gamma, \Delta, t)$  и  $\tilde{P}_n(\tilde{w}, \tilde{\gamma}, \tilde{\Delta}, t)$ , отражающие различие вида динамики вторичной фотореакции вырожденной и невырожденной четырехуровневой частицы от динамики соответствующей двухуровневой двухатомной системы, характеризующихся значениями  $E_4 - E_3 = 2\Delta$ ,  $E_2 - E_1 = 2\Delta$ , т.е.  $\tilde{\Delta} = 2\Delta$ . Рассмотрен случай  $w = 5\gamma$  и  $\Delta = 5\gamma$ . Все обозначения на этом рисунке совпадают с обозначениями на Рис. 2, кроме зависимости  $\tilde{P}_n(t)$ , которая соответствует значениям  $\tilde{w} = 5\gamma = w$ ,  $\tilde{\Delta} = 2\Delta = 10\gamma$ ,  $\tilde{\gamma} = \gamma$ , тогда как на Рис. 2 она соответствует значениям  $\tilde{w} = 7\gamma$ ,  $\tilde{\Delta} = 5\gamma = \Delta$ ,  $\tilde{\gamma} = \gamma$ .

Как видно из сравнения разных кривых, приведенных на Рис. 3, между собой и с соответствующими кривыми, приведенными на Рис. 2, вследствие снятия вырождения основного и первого уровней четырехуровневой частицы, которое отражается неравенством  $\tilde{\Delta} > \Delta$ , функции  $\tilde{P}_n(t)$  осциллируют быстрее соответствующих функций  $P_n(t)$  – так же, как и вследствие увеличения параметра  $w$  (см. Рис. 2.) – однако их осцилляции значительно меньше выражены; значительно различаются моменты времени, при которых  $\tilde{P}_4(t) = \tilde{P}_3(t)$ , от моментов времени, при которых  $P_4(t) = P_3(t)$ ; эффективность реакции уменьшается:  $R(w = 5\gamma, \Delta = 5\gamma, \gamma) \cong 0.25$ , а  $\tilde{R}(\tilde{w} = 5\gamma, \tilde{\Delta} = 10\gamma, \tilde{\gamma} = \gamma) \cong 0.1$ .

### Заключение

Полученные выражения для зависимости от времени заселенности состояний частиц при рассмотренных вторичных фотопревращениях отражают существенные различия характера динамики этих превращений, описываемой двумя соответственно применявшимися подходами. В случае вырождения двух нижайших уровней частиц эти различия обусловлены различием констант, характеризующих взаимодействие между двумя возбужденными состояниями частиц и их спонтанный распад, а в общем случае невырожденных отмеченных уровней различия характера динамики имеют место независимо от отмеченного различия констант. Различие характеров динамики реакции четырехуровневой частицы и двух двухуровневых частиц отражает различие в описании механизма рассматриваемых фотопревращений наночастиц. Соответствующую разницу характера динамики этих фотопревращений следует иметь ввиду при интерпретации экспериментальных данных изучения динамики фотопревращений наночастиц и определения их структурных параметров.

## Список литературы

1. Грибов Л.А., Баранов В.И. Теория и методы расчета молекулярных процессов: спектры, химические превращения и молекулярная логика. М.: КомКнига, 2006. 474.
2. Федоров А.В., Рухленко И.Д., Баранов А.В., Кручинин С.Ю. Оптические свойства полупроводниковых квантовых точек. СПб: «Наука», 2011. 188.
3. Нильсен М., Чанг И. Квантовые вычисления и квантовая информация. М.: «МИР», 2006. 822.
4. Ficek Z., Tanas R. Delayed sudden birth of entanglement. // Phys. Rev. 2008. V. A77. P. 054301.
5. Bashkirov E.K. Entanglement between two dipole-coupled qubits interacting with two independent slightly detuned cavity modes. // Internal. J. Of Theor. Physics. 2019. V. 58. P. 2346.
6. Аракелов К.С., Ожигов Ю.И. Моделирование динамики запутанных Квантовых состояний. // Вестн. Моск. Ун-та. Сер. 15. Вычисл. матем. и киберн. 2008. №4. С. 34.
7. Менский М.Б. Квантовые измерения и декогеренция. Модели и феноменология. М.: «ФИЗМАТЛИТ», 2001. 232.
8. Weiss U. Quantum Dissipative Systems. World Scientific, Singapore. 2012. 448.
9. Ficek Z. Swain S. Quantum Interference and Coherence: Theory and Experiments. Springer, New York. 2005. 418.
10. Леонов М.Ю., Турков В.К., Рухленко И.Д., Федоров Ф.В. Кинетика термализованной люминесценции одиночной квантовой точки при комнатной температуре. // Оптика и спектр. 2012. Т. 113. С. 288, С. 295.
11. Медведев Э.С. Неэкспоненциальное затухание флуоресценции многоатомных молекул. // Успехи физ. наук. 1991. Т. 161. С. 31.
12. Гайтлер В. Квантовая теория излучения. М.: Изд-во иностр. лит., 1956. 491.
13. Скалли М.О., Зубайри М.С. Квантовая оптика. М.: «ФИЗМАТЛИТ», 2003. 504.
14. Макомбер Дж. Д. Динамика спектроскопических переходов. М.: МИР, 1979. 347.
15. Морозов В.А. Моделирование квантовых биений заселенности состояний молекулы. // Хим. физика. 2017. Т. 36. №5. С. 3.

## MODELING THE DYNAMICS OF SECONDARY PHOTOREACTIONS

V. A. Morozov

*morozov@mail.ioc.ac.ru*

*Institute of organic chemistry N. D. Zelinsky  
Russian Academy of Sciences, Moscow*

Received 08.10.2019

Two approaches to modeling the dynamics of secondary phototransformations of individual nanoparticles are considered. In one of them, a four-level particle initially excited to the state with the highest energy value is used as a model, and in the other – a model of two two-level particles, one of which is initially excited. For each of the approaches, based on solutions of the Schrödinger equation for the states of the common (composite) system of particles and the spontaneous fluorescence field expressions for the population of 4 particle states of particles as a function of time are obtained, which reflect the dynamics of secondary photoreaction. The differences in the characteristics of reactions dynamics described by the two approaches are established. An explanation of the origin of such differences is given. Examples of the established differences of these characteristics are illustrated by the images the dependences on the time of the population of the states of the particles used in the two models.

Key words: mathematical modeling, composite system, the dynamics of the populations of the states of the nanoparticles, the secondary photoreaction.

# РЕЗОНАНСНЫЕ СОСТОЯНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ЛОВУШКИ ПЕННИНГА

Г.А. Сафьянов

*gasafyanov@yandex.ru*

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»*

Поступила 05.08.2019

В работе рассмотрена цилиндрическая ловушка Пеннинга в случае трехчастотного резонанса в отношении . В условиях вторичного резонанса построены неприводимые представления вторичной алгебры симметрий. Найдена асимптотика спектра и собственные функции эффективного гамильтониана ловушки.

УДК 517.927.25:530.145

DOI: 10.31145/2224-8412-2020-20-1-86-104

## 1. Введение

Ловушка Пеннинга – устройство, использующее комбинацию статического электрического и магнитного полей для удержания заряженных частиц [1]. Ловушки могут использоваться для высокоточных измерений свойств заряженных частиц [2-8], или играть роль кубита [9]. Статическое электрическое поле седлового типа в идеальной ловушке создается системой трех электродов, имеющих форму гиперболоидов. Реальные ловушки

имеют конечный размер и различную геометрию управляющих электродов [1]. В данной работе рассматриваются цилиндрические ловушки с плоскими концевыми электродами. Такое устройство ловушки имеет некоторые преимущества, например, простоту изготовления [10,11], по сравнению с гиперболической формой.

Модель ловушки Пеннинга представляется трехчастотным осциллятором, частоты которого зависят от величины электрического и магнитных полей. Гамильтониан ловушки имеет бесконечное спектральное вырождение. При некотором резонансе частот увеличиваются щели между энергетическими уровнями вплоть до значений, различимых в эксперименте [12-16]. В случае резонанса алгебра симметрий основной части гамильтониана задается нелинейными коммутационными соотношениями. При этом можно подобрать резонансное условие на возмущение магнитного поля (вторичный резонанс), которое приведет к увеличению энергетических щелей, появляющихся от возмущений младших порядков [13]. В условиях вторичного резонанса эффективный гамильтониан ловушки может быть реализован дифференциальным оператором второго порядка.

Ловушка определяется тремя параметрами [12]: это размер конденсатора  $r$ , магнитная длина  $l_0 = \sqrt{\frac{ch}{eB_0}}$  и размер неоднородности магнитного поля  $L^{-1} = \nabla B / B_0$ , через которые можно выразить следующие безразмерные параметры:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \sqrt{\frac{r}{L}} - \text{малый параметр,} \\ h &= \sqrt{\frac{l_0}{r}} - \text{эффективная постоянная Планка.} \end{aligned} \tag{1}$$

В качестве возмущения порядка  $\varepsilon$  рассматривается малое отклонение магнитного поля. В качестве вторичного возмущения рассматривается линейная неоднородность магнитного поля (поле Иоффе).

В работе найдена алгебра симметрий усредненной поправки первого порядка к основному гамильтониану ловушки. По общим методам [17] построено ее неприводимое представление в пространстве антиголоморфных функций. Спектр и приближенные собственные функции выражены через собственные значения и собственные функции вторичного усреднения в неприводимом представлении.

## 2. Электрический потенциал цилиндрической ловушки

Пусть кольцевой электрод имеет форму цилиндра радиуса  $r$  и высотой  $h$ . Будем считать, что на его поверхности поддерживается потенциал  $U_0$ . Кон-

цевые электроды имеют плоскую круглую форму и заземлены. Тогда потенциал внутри цилиндрической ловушки является решением задачи Дирихле для уравнения Лапласа:

$$\begin{cases} \Delta\Phi = 0 \\ \Phi|_{x^2+y^2=r^2} = U_0 \\ \Phi|_{z=\pm h} = 0, \end{cases}$$

здесь введена ортогональная система координат  $x, y, z$  с центром в центре ловушки и  $z$ , направленной вдоль оси цилиндра.

**Лемма 1.** *Электрический потенциал внутри цилиндрической ловушки Пеннинга задается функцией:*

$$\Phi(\rho, z) = U_0 \left( 1 - \sum_k \frac{J_0\left(\frac{\mu_k}{r} \rho\right) \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_k}{r} z\right)}{\mu_k J_1(\mu_k) \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_k}{r} h\right)} \right),$$

где  $\rho^2 = x^2 + y^2$ ,  $J_0, J_1$  — функции Бесселя первого рода порядка 0 и 1 соответственно, а  $\mu_k$  — нули  $J_0$ .

Действительно, положим  $\Phi = \Psi + U_0$  и перейдем к цилиндрическим координатам  $(\rho, \theta, z)$ . Заметим, что потенциал не должен зависеть от  $\theta$  из-за наличия вращательной симметрии относительно оси цилиндра. В новых координатах имеем:

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \rho} \right) + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = 0, \\ \Psi|_{\rho=r} = 0, \quad \Psi|_{z=\pm h} = -U_0. \end{cases}$$

Полученное уравнение решаем разделением переменных. Положим  $\Psi = R(\rho)Z(z)$ . Получаем:

$$\begin{cases} \rho R'' + R' + \lambda \rho R = 0, & \begin{cases} Z'' + \lambda Z = 0, \\ Z(-h) = Z(h) = -U_0. \end{cases} \\ R(r) = 0, \end{cases}$$

Слева мы получили уравнение Бесселя нулевого порядка. Его решение —  $R(\rho) = C J_0(\rho\sqrt{\lambda})$ . Из граничного условия  $R(r) = 0$  получим  $C J_0(r\sqrt{\lambda}) = 0$ , но  $C \neq 0$  (иначе  $R(\rho) \equiv 0$ ). Следовательно,  $\lambda_k = \left(\frac{\mu_k}{r}\right)^2$ , где  $\mu_k$  — нули  $J_0$ .



Из второго уравнения находим  $Z_k(z) = C_{1k} e^{\frac{\mu_k z}{r}} + C_{2k} e^{-\frac{\mu_k z}{r}}$ .

В итоге получаем

$$\Psi(\rho, z) = \sum_k \left( C_{1k} e^{\frac{\mu_k z}{r}} + C_{2k} e^{-\frac{\mu_k z}{r}} \right) J_0 \left( \frac{\mu_k}{r} \rho \right).$$

Из условия  $\Psi(\rho, -h) = \Psi(\rho, h) = -U_0$  находим, что  $C_{1k} = C_{2k} = C_k$ , а значит,  $-U_0 = \sum \gamma_k J_0 \left( \frac{\mu_k}{r} \rho \right)$ , где  $\gamma_k = 2C_k \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k}{r} h \right)$ . Умножим последнее равенство на  $\rho J_0 \left( \frac{\mu_n}{r} \rho \right)$  и проинтегрируем обе части от 0 до  $r$  учитывая, что

$$\int_0^r \rho J_0 \left( \frac{\mu_n}{r} \rho \right) J_0 \left( \frac{\mu_m}{r} \rho \right) d\rho = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ \frac{1}{2} r^2 J_1(\mu_n), & m = n, \end{cases}$$

а также

$$\int_0^r \rho J_0 \left( \frac{\mu_k}{r} \rho \right) d\rho = \frac{r^2}{\mu_k} J_1(\mu_k).$$

Находим  $\gamma_k = -\frac{2U_0}{\mu_k J_1(\mu_k)}$ , следовательно,  $C_k = \frac{-U_0}{\mu_k J_1(\mu_k) \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k}{r} h \right)}$ . Таким образом,

$$\Psi(\rho, z) = -U_0 \sum_k \frac{J_0 \left( \frac{\mu_k}{r} \rho \right) \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k}{r} z \right)}{\mu_k J_1(\mu_k) \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k}{r} h \right)},$$

и окончательно<sup>1</sup>:

$$\Phi(\rho, z) = U_0 \left( 1 - \sum_k \frac{J_0 \left( \frac{\mu_k}{r} \rho \right) \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k}{r} z \right)}{\mu_k J_1(\mu_k) \operatorname{ch} \left( \frac{\mu_k}{r} h \right)} \right). \quad (2)$$

<sup>1</sup> Может показаться, что потенциал не совпадает с расчетами для цилиндрических ловушек в работах [10,11]. Однако, на самом деле это разные записи одной и той же функции. Получить другой вид можно, поменяв порядок решения уравнений на  $R$  и  $Z$ .

Найдем разложение электрического потенциала (2) вблизи центра ловушки. В силу симметрии цилиндра и краевых условий, разложение будет иметь вид:

$$\Phi(\rho, z) = \Phi(0) + (A\rho^2 + Bz^2) + (C\rho^4 + D\rho^2z^2 + Ez^4) + (F\rho^6 + G\rho^4z^2 + H\rho^2z^4 + Iz^6) + O(q^8),$$

Подставляя это разложение в уравнение Лапласа, находим зависимости между коэффициентами

$$2A + B = 0; \quad \begin{cases} 8C + D = 0, \\ D + 3E = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 18F + G = 0, \\ 4G + 3H = 0, \\ 15I + 2H = 0. \end{cases}$$

Следовательно, можно представить потенциал (2) в виде:

$$\begin{aligned} \Phi(\rho, z) = & \Phi(0) + \alpha(2z^2 - \rho^2) + \frac{\beta}{8}(3\rho^4 - 24\rho^2z^2 + 8z^4) + \\ & + \frac{\gamma}{5}(5\rho^6 - 90\rho^4z^2 + 120\rho^2z^4 - 16z^6) + O(q^8), \end{aligned}$$

где  $\alpha, \beta, \gamma$  имеют вид:

$$\alpha = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}(0, 0); \quad \beta = \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \Phi}{\partial z^4}(0, 0); \quad \gamma = \frac{1}{720} \frac{\partial^6 \Phi}{\partial \rho^6}(0, 0).$$

Для коэффициента  $\alpha$  имеем:

$$\alpha = \frac{U_0}{r^2} \sum_k \frac{\mu_k}{J_1(\mu_k) \operatorname{ch}\left(\frac{\mu_k}{r} h\right)}.$$

Похожая зависимость  $\alpha$  от соотношения  $\frac{h}{r}$  (Рис. 1) уже наблюдалась в работах [10,11].

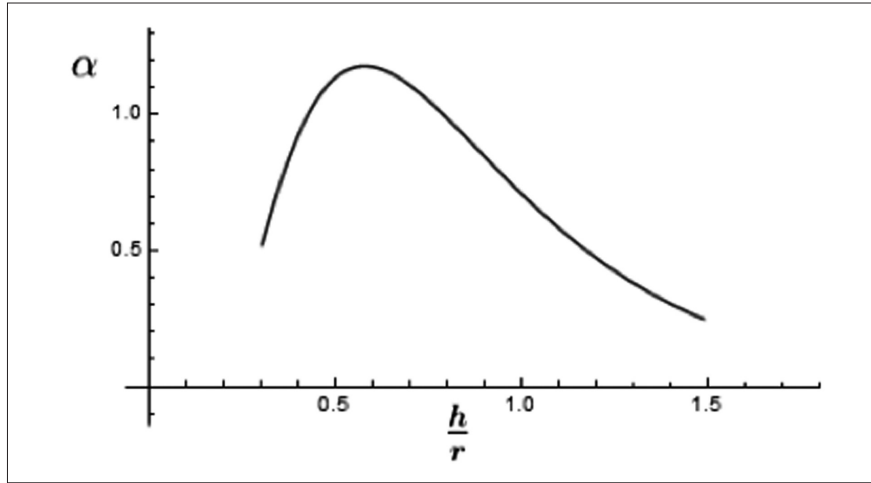


Рисунок 1. Зависимость коэффициента  $\alpha$  от  $\frac{h}{r}$ .

### 3. Гамильтониан цилиндрической ловушки

Предположим, что магнитное поле в ловушке в главном является однородным и направлено вдоль оси  $z$ . В качестве возмущений будем рассматривать малое отклонение и линейную неоднородность магнитного поля. То есть, будем рассматривать поле  $\mathbf{B}$  вида

$$\frac{\mathbf{B}}{B_0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \beta_2 - \beta_3 & 2\gamma_3 & 2\gamma_2 \\ 2\gamma_3 & \beta_3 - \beta_1 & 2\gamma_1 \\ 2\gamma_2 & 2\gamma_1 & \beta_1 - \beta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

С учетом возмущений, гамильтониан ловушки примет вид:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \left( \hat{p}' - \frac{e}{c} (\hat{A}_0 + \varepsilon \hat{A}' + \varepsilon^2 \hat{A}'') \right)^2 + e\Phi,$$

где  $\hat{p}' = \left( -ih \frac{\partial}{\partial x}, -ih \frac{\partial}{\partial y}, -ih \frac{\partial}{\partial z} \right)$ , а  $\varepsilon$  определяется в (1).

$$A_0 = B_0 \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \quad A' = \frac{B_0}{2} \begin{pmatrix} B_2 z - B_3 y \\ B_3 x - B_1 z \\ B_1 y - B_2 x \end{pmatrix}, \quad A'' = B_0 \begin{pmatrix} \gamma_1(z^2 - y^2) - \beta_1 yz \\ \gamma_2(x^2 - z^2) - \beta_2 zx \\ \gamma_3(y^2 - x^2) - \beta_3 xy \end{pmatrix}.$$

Далее перейдем к безразмерным переменным

$$(q_1, q_2, q_3) = \left( \frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right)$$

и вынесем размерный множитель  $e\Phi_0$ , где  $\Phi_0 = \frac{eB_0^2 r^2}{mc^2}$ . В безразмерных координатах электрический потенциал примет вид  $\Phi(q) = \frac{1}{2}\omega(2q_3^2 - q_1^2 - q_2^2) + O(q^4)$ . Здесь и далее будем рассматривать гамильтониан без размерного множителя, то есть  $\frac{\hat{H}}{e\Phi_0}$  а  $\hat{H}$ .

Представим гамильтониан в виде  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \varepsilon\hat{H}_1 + \varepsilon^2\hat{H}_2 + O(\varepsilon^3)$ , где

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}(\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2 + \hat{p}_3^2 + 2(\hat{p}_1\hat{q}_2 - \hat{p}_2\hat{q}_1) + (1 - \omega^2)(q_1^2 + q_2^2) + 2\omega^2q_3),$$

$$\hat{H}_1 = -((\hat{p}_1 + \hat{q}_2)(B_2\hat{q}_3 - B_3\hat{q}_2) + (\hat{p}_2 - \hat{q}_1)(B_3\hat{q}_1 - B_1\hat{q}_3) + \hat{p}_3(B_1\hat{q}_2 - B_2\hat{q}_1)),$$

$$\hat{H}_2 = -((\hat{p}_1 + \hat{q}_2)(\gamma_1(\hat{q}_3^2 - \hat{q}_2^2) - \beta_1\hat{q}_2\hat{q}_3) + (\hat{p}_2 - \hat{q}_1)(\gamma_2(\hat{q}_1^2 - \hat{q}_3^2) - \beta_2\hat{q}_3\hat{q}_1) + \hat{p}_3(\gamma_3(\hat{q}_2^2 - \hat{q}_1^2) - \beta_3\hat{q}_1\hat{q}_2)) + \frac{1}{8}((B_2\hat{q}_3 - B_3\hat{q}_2)^2 + (B_3\hat{q}_1 - B_1\hat{q}_3)^2 + (B_1\hat{q}_2 - B_2\hat{q}_1)^2).$$

Здесь  $\hat{p}_j = -i\hbar\frac{\partial}{\partial q_j}$ , а  $\hbar$  определено в (1).

Для дальнейшего исследования приведем главную часть гамильтониана к нормальной форме с помощью канонической замены

$$\begin{cases} q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-\omega^2}} (x_+ + x_-), & p_1 = \frac{\sqrt[4]{1-\omega^2}}{\sqrt{2}} (p_+ + p_-), \\ q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt[4]{1-\omega^2}} (p_+ - p_-), & p_2 = -\frac{\sqrt[4]{1-\omega^2}}{\sqrt{2}} (x_+ - x_-), \\ q_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{2}\sqrt{\omega}} x_0; & p_3 = \sqrt[4]{2}\sqrt{\omega} p_0. \end{cases}$$

После такой замены гамильтониан  $\hat{H}_0$  примет вид

$$\hat{H}_0 = \frac{1}{2}(\omega_+(\hat{p}_+^2 + \hat{x}_+^2) + \omega_-(\hat{p}_-^2 + \hat{x}_-^2) + \omega_0(\hat{p}_0^2 + \hat{x}_0^2)),$$

где  $\omega_{\pm} = \sqrt{1-\omega^2} \pm 1$ ,  $\omega_0 = \sqrt{2}\omega$ . Тогда при выборе

$$\omega^2 = 8/9 \tag{3}$$

наступает трехчастотный резонанс в отношении  $2:-1:2$ . Аналогичный гамильтониан был рассмотрен в [12].

#### 4. Усредняющее преобразование

Перепишем поправки  $\hat{H}_1, \hat{H}_2$  в новых координатах и с учетом резонансного условия:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= B_3 \left( 2(\hat{p}_+^2 + \hat{x}_+^2) + (\hat{p}_-^2 + \hat{x}_-^2) - 3\hat{p}_+\hat{p}_- + 3\hat{x}_+\hat{x}_- \right) - \frac{B_1}{\sqrt{2}} \left( 2\hat{p}_0(\hat{p}_+ + \hat{p}_-) + \hat{x}_0(2\hat{x}_+ + \hat{x}_-) \right) + \\ &+ \frac{B_2}{\sqrt{2}} \left( 2\hat{p}_0(\hat{x}_+ + \hat{x}_-) + \hat{x}_0(\hat{p}_- - 2\hat{p}_+) \right); \\ \hat{H}_2 &= \frac{3}{16} \left( (B_1(\hat{p}_+ - \hat{p}_-) - B_2(\hat{x}_+ + \hat{x}_-))^2 + \left( B_3(\hat{x}_+ + \hat{x}_-) - \frac{B_1}{\sqrt{2}}\hat{x}_0 \right)^2 + \left( B_3(\hat{p}_+ - \hat{p}_-) - \frac{B_2}{\sqrt{2}}\hat{x}_0 \right)^2 \right) + \\ &+ \sqrt{3}\hat{p}_0 \left( \beta_3(\hat{p}_+ - \hat{p}_-)(\hat{x}_+ + \hat{x}_-) + \gamma_3 \left( (\hat{p}_+ - \hat{p}_-)^2 - (\hat{x}_+ + \hat{x}_-)^2 \right) \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} (2\hat{p}_+ - \hat{p}_-) \left( \sqrt{2}\beta_1\hat{x}_0(\hat{p}_+ - \hat{p}_-) + \gamma_1 (\hat{x}_0^2 - 2(\hat{p}_+ - \hat{p}_-)^2) \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} (2\hat{x}_+ + \hat{x}_-) \left( \sqrt{2}\beta_2\hat{x}_0(\hat{x}_+ + \hat{x}_-) + \gamma_2 (2(\hat{x}_+ + \hat{x}_-)^2 - \hat{x}_0^2) \right). \end{aligned}$$

Воспользуемся методом алгебраического усреднения [19,20], чтобы привести поправки  $\hat{H}_1, \hat{H}_2$  к коммутирующему с  $\hat{H}_0$  виду. Найдется такое унитарное преобразование  $U$ , что  $U^{-1}\hat{H}U = \hat{H}_0 + \varepsilon\hat{H}_1 + \varepsilon^2\hat{H}_2 + O(\varepsilon^3)$ , где  $[\hat{H}_0, \hat{H}_1] = [\hat{H}_0, \hat{H}_2] = 0$ . Точные формулы для подсчета  $U, \hat{H}_1, \hat{H}_2$  можно найти в [12,20].

Явный вид усредненных поправок:

$$\begin{aligned} \hat{H}_1 &= \left( B_3 \left( 2\hat{z}_+\hat{z}_+^* + \hat{z}_-\hat{z}_-^* + \frac{3h}{2} \right) - \frac{B_1 - iB_2}{\sqrt{2}} \hat{z}_+\hat{z}_0^* - \frac{B_1 + iB_2}{\sqrt{2}} \hat{z}_+\hat{z}_0^* \right) \\ \hat{H}_2 &= \frac{3}{16} (B_1^2 + B_2^2 - 16B_3) \hat{z}_+\hat{z}_+^* - \frac{1}{4} (B_1^2 + B_2^2 + 12B_3) \hat{z}_-\hat{z}_-^* - \frac{5}{16} (B_1^2 + B_2^2) \hat{z}_0\hat{z}_0^* + \\ &\frac{3}{2} B_3 \left( \frac{B_1 - iB_2}{\sqrt{2}} \hat{z}_+\hat{z}_0^* + \frac{B_1 + iB_2}{\sqrt{2}} \hat{z}_+\hat{z}_0^* \right) - 2\sqrt{6} \left( (\gamma_2 - i\gamma_1) \hat{z}_+^*(\hat{z}_-^*)^2 + (\gamma_2 + i\gamma_1) \hat{z}_+(\hat{z}_-)^2 \right) + \\ &+ \frac{\sqrt{3}}{2} \left( (2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 - 4i\gamma_3) (\hat{z}_-)^2 \hat{z}_0 + (2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 + 4i\gamma_3) (\hat{z}_-^*)^2 \hat{z}_0^* \right) - \frac{3h}{16} (B_1^2 + B_2^2 + 16B_3), \end{aligned}$$

где введены обозначения  $\hat{z}_j = \frac{\hat{x}_j + i\hat{p}_j}{\sqrt{2}}$ ,  $j = +, -, 0$ .

#### 5. Алгебра симметрий главной части гамильтониана

Найдем операторы, составляющие алгебру симметрий  $\hat{H}_0$ . С помощью введенных обозначений  $\hat{z}_i$  можно представить гамильтониан в виде:

$$\hat{H}_0 \sim const \sum_{l=\pm,0} \omega_l \hat{z}_l^* \hat{z}_l.$$

Из такой записи становится очевидно, что операторы вида  $\hat{z}_l^* \hat{z}_l$ ,  $l = \pm, 0$  коммутируют с  $\hat{H}_0$ .

Будем искать другие симметрии в виде  $\hat{z}_j^\alpha \hat{z}_k^\beta$ , где  $\alpha, \beta \in \Gamma$  и  $j \neq k$ , и отрицательный показатель степени  $a < 0$  означает взятие сопряжения  $\hat{z}_j^a$  а  $(\hat{z}_j^*)^{-a}$ .

Рассмотрим коммутатор  $[\sum \omega_l \hat{z}_l^* \hat{z}_l, \hat{z}_j^\alpha \hat{z}_k^\beta]$ , который распадается на сумму трех коммутаторов, из которых два ненулевых. Посчитаем их значения, пользуясь свойствами коммутатора:

$$[\hat{z}_j^* \hat{z}_j, \hat{z}_j^\alpha \hat{z}_k^\beta] = -\hbar \alpha \hat{z}_j^\alpha \hat{z}_k^\beta; [\hat{z}_k^* \hat{z}_k, \hat{z}_j^\alpha \hat{z}_k^\beta] = -\hbar \beta \hat{z}_j^\alpha \hat{z}_k^\beta.$$

Откуда получаем, что коммутатор  $[\hat{H}_0, \hat{z}_j^\alpha \hat{z}_k^\beta]$  с точностью до постоянного множителя это

$$[\hat{H}_0, \hat{z}_j^\alpha \hat{z}_k^\beta] \sim -\hbar (\alpha \omega_j + \beta \omega_k) \hat{z}_j^\alpha \hat{z}_k^\beta.$$

Отсюда получаем условие на  $\alpha, \beta$ :  $\alpha \omega_j + \beta \omega_k = 0$ , пользуясь которым, находим еще 6 симметрий:  $\hat{z}_+^* \hat{z}_0, \hat{z}_+ \hat{z}_0^*, \hat{z}_+ (\hat{z}_-^*)^2, \hat{z}_+^* (\hat{z}_-^*)^2, (\hat{z}_-^*)^2 \hat{z}_0, (\hat{z}_-^*)^2 \hat{z}_0^*$ .

Найденные 9 операторов можно выбрать в качестве образующих алгебры симметрий<sup>2</sup>  $\hat{H}_0$  (обозначения выбраны, как в [12]):

$$\begin{aligned} \hat{S}_+ &= \hat{z}_+^* \hat{z}_+, \hat{S}_- = \hat{z}_-^* \hat{z}_-, \hat{S}_0 = \hat{z}_0^* \hat{z}_0, \\ \hat{A}_\rho &= \hat{z}_+^* \hat{z}_0, \hat{A}_\sigma = \hat{z}_+^* (\hat{z}_-^*)^2, \hat{A}_\theta = (\hat{z}_-^*)^2 \hat{z}_0^*, \\ \hat{A}_\rho^* &= \hat{z}_+ \hat{z}_0^*, \hat{A}_\sigma^* = \hat{z}_+ (\hat{z}_-^*)^2, \hat{A}_\theta^* = (\hat{z}_-^*)^2 \hat{z}_0, \end{aligned} \quad (4)$$

между которыми имеются коммутационные соотношения:

$$\begin{aligned} [\hat{S}_+, \hat{A}_\rho] &= \hbar \hat{A}_\rho, [\hat{S}_+, \hat{A}_\sigma] = \hbar \hat{A}_\sigma, [\hat{S}_-, \hat{A}_\theta] = 2\hbar \hat{A}_\theta, [\hat{S}_-, \hat{A}_\sigma] = 2\hbar \hat{A}_\sigma, \\ [\hat{S}_0, \hat{A}_\rho] &= -\hbar \hat{A}_\rho, [\hat{S}_0, \hat{A}_\theta] = \hbar \hat{A}_\theta, [\hat{A}_\rho, \hat{A}_\theta] = \hbar \hat{A}_\sigma, [\hat{A}_\sigma^*, \hat{A}_\rho] = \hbar \hat{A}_\theta^*, \\ [\hat{A}_\theta^*, \hat{A}_\sigma] &= 4\hbar \left( \hat{S}_- + \frac{\hbar}{2} \right) \hat{A}_\rho, [\hat{A}_\rho^*, \hat{A}_\rho] = \hbar (\hat{S}_0 - \hat{S}_+), \\ [\hat{A}_\theta^*, \hat{A}_\theta] &= \hbar (\hat{S}_-^2 + 4\hat{S}_- \hat{S}_0 + 3\hbar \hat{S}_- + 2\hbar \hat{S}_0 + 2\hbar^2), \\ [\hat{A}_\sigma^*, \hat{A}_\sigma] &= \hbar (4\hat{S}_+ \hat{S}_- + \hat{S}_+^2 + 2\hbar \hat{S}_+ + 3\hbar \hat{S}_- + 2\hbar^2). \end{aligned}$$

Таким образом, мы можем выразить усредненные поправки через образующие алгебры симметрий  $\hat{H}_0$ :

<sup>1</sup> Так как гамильтониан  $\hat{H}_0$  действует в трехмерном пространстве, то максимальное число независимых симметрий – 5, а значит в этом представлении полученные 9 симметрий не являются независимыми.

$$\begin{aligned}
\hat{H}_1 &= \left( B_3 \left( 2\hat{S}_+ + \hat{S}_- + \frac{3h}{2} \right) - \frac{B_1 - iB_2}{\sqrt{2}} \hat{A}_\rho^* - \frac{B_1 + iB_2}{\sqrt{2}} \hat{A}_\rho \right), \\
\hat{H}_2 &= \frac{3}{16} (B_1^2 + B_2^2 - 16B_3^2) \hat{S}_+ - \frac{1}{4} (B_1^2 + B_2^2 + 12B_3^2) \hat{S}_- - \frac{5}{16} (B_1^2 + B_2^2) \hat{S}_0 + \\
&+ \frac{3}{2} B_3 \left( \frac{B_1 - iB_2}{\sqrt{2}} \hat{A}_\rho^* + \frac{B_1 + iB_2}{\sqrt{2}} \hat{A}_\rho \right) + 2\sqrt{6} \left( (\gamma_2 - i\gamma_1) \hat{A}_\sigma + (\gamma_2 + i\gamma_1) \hat{A}_\sigma^* \right) + \\
&+ \frac{\sqrt{3}}{2} \left( (2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 - 4i\gamma_3) \hat{A}_\theta^* + (2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 + 4i\gamma_3) \hat{A}_\theta \right) - \\
&- \frac{3h}{16} (B_1^2 + B_2^2 + 16B_3^2).
\end{aligned}$$

## 6. Вторичное усреднение

Так как усредненные поправки  $\hat{H}_1, \hat{H}_2$  коммутируют с главной частью, то становится возможным перейти на собственное подпространство  $\hat{H}_0$  и рассматривать на нем гамильтониан  $\hat{H}_1 + \varepsilon \hat{H}_2$  [13]. Для дальнейшего исследования необходимо привести поправку  $\hat{H}_2$  к коммутирующему с  $\hat{H}_1$  виду.

Алгебра симметрий  $\hat{H}_1$  нетривиальна при некоторых условиях на компоненты  $B_1, B_2, B_3$  возмущающего поля (см. [12]). Рассмотрим простейший случай, когда:

$$B_1^2 + B_2^2 = 16B_3^2. \quad (5)$$

Тогда образующие имеют вид [12]:

$$\begin{aligned}
\hat{A}_0 &= \hat{S}_-, \\
\hat{A}_+ &= \frac{4}{3} \hat{S}_+ + \frac{2}{3} \hat{S}_0 - \frac{2\sqrt{2}}{3} \left( e^{i\varphi} \hat{A}_\rho + e^{-i\varphi} \hat{A}_\rho^* \right), \\
\hat{A}_- &= \frac{2}{3} \hat{S}_+ + \frac{4}{3} \hat{S}_0 + \frac{2\sqrt{2}}{3} \left( e^{i\varphi} \hat{A}_\rho + e^{-i\varphi} \hat{A}_\rho^* \right), \\
\hat{B} &= \sqrt{\frac{2}{3}} e^{\frac{i\varphi}{2}} \hat{A}_\sigma + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-\frac{i\varphi}{2}} \hat{A}_\theta,
\end{aligned} \quad (6)$$

и удовлетворяют коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned}
[A_0, B] &= 2hB, [A_-, B] = 2hB, [A_+, B] = 0, \\
[B^*, B] &= 2h(A_0^2 + 2A_0A_- + 3hA_0 + hA_- + 2h^2),
\end{aligned} \quad (7)$$

где  $\varphi$  определяется соотношением  $e^{i\varphi} = \frac{B_1 + iB_2}{\sqrt{B_1^2 + B_2^2}}$ .

Коммутационные соотношения (7) задают следующие элементы Казимира:

$$M = A_+ - A_- + A_0, C = A_+ + A_- - A_0, K = BB^* - A_0(A_0 - \hbar)A_-.$$

Через операторы (6) можно выразить  $\hat{H}_1$  следующим образом:

$$\hat{H}_1 = B_3 \left( 2\hat{A}_+ - \hat{A}_- + \hat{A}_0 + \frac{3\hbar}{2} \right)$$

или

$$\hat{H}_1 = B_3 \left( \hat{A}_+ + \hat{M} + \frac{3\hbar}{2} \right)$$

Будем усреднять  $\hat{H}_2$  по схеме, описанной в [13], а именно, воспользуемся тем, что образующие (7) алгебры симметрий  $\hat{H}_0$  можно выразить через операторы  $\hat{A}_+, \hat{A}_-, \hat{A}_0, \hat{B}, \hat{B}_+, \hat{F}$ , где

$$\begin{aligned} \hat{B}_+ &= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\varphi}{2}} \hat{A}_\sigma - \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-i\frac{\varphi}{2}} \hat{A}_\theta, \\ \hat{F} &= \frac{2}{3} \left( \sqrt{2} (\hat{S}_+ - \hat{S}_-) + 2e^{i\varphi} \hat{A}_\rho - e^{-i\varphi} \hat{A}_\rho^* \right), \end{aligned}$$

следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{S}_- &= \hat{A}_0, \hat{S}_+ + \hat{S}_0 = \frac{1}{2} (\hat{A}_+ + \hat{A}_-), \\ \hat{S}_+ - \hat{S}_0 &= \frac{1}{6} (\hat{A}_+ - \hat{A}_- + 2\sqrt{2} (\hat{F} + \hat{F}^*)), \\ e^{i\varphi} \hat{A}_\rho + e^{-i\varphi} \hat{A}_\rho^* &= \frac{1}{6} (\hat{F} + \hat{F}^* - 2\sqrt{2} (\hat{A}_+ - \hat{A}_-)), \\ e^{i\varphi} \hat{A}_\rho - e^{-i\varphi} \hat{A}_\rho^* &= \frac{1}{2} (\hat{F} - \hat{F}^*), \\ \hat{A}_\sigma &= \frac{1}{\sqrt{6}} e^{-i\frac{\varphi}{2}} (\sqrt{2}\hat{B}_+ + \hat{B}), \hat{A}_\theta = \frac{1}{\sqrt{6}} e^{i\frac{\varphi}{2}} (\sqrt{2}\hat{B} - \hat{B}_+). \end{aligned}$$

Значит,  $\hat{H}_2$  можно представить в виде линейной комбинации операторов  $\hat{A}_+, \hat{A}_-, \hat{A}_0, \hat{B}, \hat{B}^*, \hat{B}_+, \hat{B}_+^*, \hat{F}, \hat{F}^*$ :



$$\begin{aligned}
\hat{H}_2 = & -B_3^2 \left( \frac{5}{6} \hat{A}_+ + \frac{5}{3} \hat{A}_- + 7\hat{A}_0 + 6h \right) + \frac{13\sqrt{2}}{6} B_3^2 (\hat{F} + \hat{F}^*) + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( (2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 + 4i\gamma_3) e^{i\frac{\varphi}{2}} + 8(\gamma_2 - i\gamma_1) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right) \hat{B}_+ + \\
& + \frac{1}{2\sqrt{2}} \left( (2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 - 4i\gamma_3) e^{-i\frac{\varphi}{2}} + 8(\gamma_2 + i\gamma_1) e^{i\frac{\varphi}{2}} \right) \hat{B}_+^* + \\
& + 2 \left( (2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 + 4i\gamma_3) e^{i\frac{\varphi}{2}} + 4(\gamma_2 - i\gamma_1) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right) \hat{B} + \\
& + 2 \left( (2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 - 4i\gamma_3) e^{-i\frac{\varphi}{2}} + 4(\gamma_2 + i\gamma_1) e^{i\frac{\varphi}{2}} \right) \hat{B}^*.
\end{aligned}$$

С помощью следующих коммутационных соотношений:

$$[\hat{H}_1, \hat{F}] = h \left( \frac{10\sqrt{2}}{9} (\hat{A}_+ - \hat{A}_-) + \frac{20}{3} \hat{F} \right), [\hat{H}_1, \hat{B}_+] = \frac{2h}{9} (13\hat{B}_+ + 4\sqrt{2}\hat{B}),$$

можно найти коммутатор  $\hat{H}_2$  с группой оператора  $\hat{H}_1$ , и далее посчитать усредненный оператор  $\underline{\hat{H}}_2$ :

$$\underline{\hat{H}}_2 = -B_3^2 \left( \frac{5}{6} \hat{A}_+ + \frac{5}{3} \hat{A}_- + 7\hat{A}_0 + 6h \right) + g\hat{B} + \bar{g}\hat{B}^*, \quad (8)$$

$$\text{где } g = 2 \left( (2\beta_3 - \beta_2 - \beta_1 + 4i\gamma_3) e^{i\frac{\varphi}{2}} + 4(\gamma_2 - i\gamma_1) e^{-i\frac{\varphi}{2}} \right).$$

Теперь, когда поправки  $\hat{H}_1, \underline{\hat{H}}_2$  коммутируют и с главной частью, и друг с другом, становится возможным найти асимптотику спектра гамильтониана ловушки.

**Лемма 2.** В условиях трехчастотного резонанса (3) и вторичного резонанса (5) спектр гамильтониана цилиндрической ловушки Пеннинга может быть с точностью до  $\varepsilon^3$  представлен в виде:

$$\frac{2}{3} \left( n + \frac{3}{2} \right) h + \varepsilon \left( 6m - n + \frac{3}{2} \right) B_3 h + \varepsilon^2 \lambda_{n,m,k} + O(\varepsilon^3),$$

где  $\lambda_{n,m,k}$  – собственные значения  $\underline{\hat{H}}_2$ .

Рассмотрим операторы:

$$\begin{aligned}
\hat{b}_0 &= \hat{z}_-, \\
\hat{b}_+ &= \frac{2}{\sqrt{3}} e^{i\frac{\varphi}{2} \hat{z}_+^*} - \sqrt{\frac{2}{3}} e^{-i\frac{\varphi}{2} \hat{z}_0^*}, \\
\hat{b}_- &= \sqrt{\frac{2}{3}} e^{i\frac{\varphi}{2} \hat{z}_+^*} + \frac{2}{\sqrt{3}} e^{-i\frac{\varphi}{2} \hat{z}_0^*},
\end{aligned} \tag{9}$$

между которыми имеются следующие коммутационные соотношения:

$$[\hat{b}_0^*, \hat{b}_0] = \hbar, [\hat{b}_\pm^*, \hat{b}_\pm] = 2\hbar.$$

Обозначим  $\psi_0 = C_0 e^{(x_+^2 + x_-^2 + x_0^2)/2\hbar}$ .

Несложно заметить, что функции вида

$$\psi_{t_0, t_+, t_-} = C \hat{b}_0^{t_0} \hat{b}_-^{t_-} \hat{b}_+^{t_+} \psi_0, \tag{10}$$

где  $C, C_0$  – некоторые нормировочные константы, а  $t_0, t_\pm \in \Gamma_+$ , будут являться собственными для операторов  $\hat{b}_0 \hat{b}_0^*, \hat{b}_+ \hat{b}_+^*, \hat{b}_- \hat{b}_-^*$  с собственными значениями  $\hbar t_0, 2\hbar t_+, 2\hbar t_-$  соответственно.

Заметим, что

$$\hat{S}_- = \hat{b}_0 \hat{b}_0^*, \quad 2(\hat{S}_+ + \hat{S}_0) = \hat{b}_+ \hat{b}_+^* + \hat{b}_- \hat{b}_-^*.$$

Следовательно, через операторы (9) может быть выражен гамильтониан  $\hat{H}_0$ . А значит, функции (10) также будут являться собственными для  $\hat{H}_0$ :

$$\hat{H}_0 \psi_{t_0, t_+, t_-} = \frac{2}{3} \left( 2t_+ + 2t_- - t_0 + \frac{3}{2} \right) \hbar \psi_{t_0, t_+, t_-}.$$

Положим  $2t_+ + 2t_- - t_0 = n$ ,  $n \in \Gamma$ . Как можно заметить,  $n$ -й энергетический уровень бесконечно вырожден.

Заметим также, что операторы (6) выражаются через (10) следующим образом:

$$\hat{A}_0 = \hat{b}_0 \hat{b}_0^*, \hat{A}_\pm = \hat{b}_\pm \hat{b}_\pm^*, \hat{B} = \left( \hat{b}_0 \right)^2 \hat{b}_-, \tag{11}$$

а значит и  $\hat{H}_1$  выражается через операторы (6).

Тогда функция  $\psi_{t_0, t_+, t_-}$  является собственной для оператора  $\hat{H}_1$  с собственным значением  $\left( 4t_+ - 2t_- + t_0 + \frac{3}{2} \right) \hbar$  или, обозначив  $t_+ = m$ ,  $\left( 6m - n + \frac{3}{2} \right) \hbar$ , где  $m \in \Gamma_+$ .

## 7. Неприводимые представления

Построим неприводимые представления алгебры (7) в пространстве антиголоморфных функций. Будем называть операторы  $A_0, A_{\pm}$  нейтральными, а  $B^*$  – оператором уничтожения, так как он зануляет вакуумную функцию  $\psi_0$ .

В силу (11),  $\psi_0$  будет собственной для нейтральных операторов в представлении (6), то есть  $\hat{A}_0\psi_0 = a_0\psi_0, \hat{A}_{\pm} = a_{\pm}\psi_0$ , где  $a_0 = \hbar(2m + 2t_- - n), a_+ = 2\hbar m, a_- = 2\hbar t_-$ .

Далее воспользуемся тем, что элемент Казимира  $K$  алгебры (7) зануляется на нашем представлении (6). Подействуем им на вакуумный вектор, чтобы получить дополнительные условия на  $t_-$ :

$$\left( \hat{B}\hat{B}^* - \hat{A}_0(\hat{A}_0 - \hbar)\hat{A}_- \right)\psi_0 = 0,$$

а значит,  $(2m + 2t_- - n)(2m + 2t_- - n - 1)t_- = 0$ . Так как  $t_- \in \Gamma_+$ , то первые две скобки в последнем выражении зануляются только при  $n > 2m$ . Тогда получаем следующее условие на  $t_-$ :

$$t_- = \begin{cases} 0, & n \leq 2m, \\ \frac{n}{2} - m, & n > 2m, \text{ } n \text{ – четное,} \\ \frac{n+1}{2} - m, & n > 2m, \text{ } n \text{ – нечетное.} \end{cases}$$

Или

$$t_- = \begin{cases} 0, & n \leq 2m, \\ \left[ \frac{n+1}{2} \right] - m, & n > 2m, \end{cases}$$

где квадратные скобки означают целую часть числа.

Тогда имеем в случае  $n \leq 2m$ :

$$a_+ = 2\hbar m, a_- = 0, a_0 = \hbar(2m - n),$$

а в случае  $n > 2m$ :

$$a_+ = 2\hbar m, a_- = 2\hbar \left( \left[ \frac{n+1}{2} \right] - m \right), a_0 = \hbar \left( \frac{1 - (-1)^n}{2} \right).$$

Построим неприводимое представление по общей схеме, описанной в [17]. Перепишем коммутационные соотношения (7) в виде:

$$[B^*, B] = f(A), B^* A = \varphi(A)B^*, AB = B\varphi(A),$$

где  $A = (A_0, A_+, A_-)$ ,  $\varphi$  – векторнозначная функция векторного аргумента,  $f$  – скалярная функция.

Определим на  $\Gamma_+$  следующие функции:

$$A_a(k) = \varphi(\dots(\varphi(a))\dots), \quad F_a(k) = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k f(A_a(j)),$$

где  $a = (a_0, a_+, a_-)$ .

В нашем случае, получим функции:

$$A_a(k) = \begin{pmatrix} A_0(k) \\ A_+(k) \\ A_-(k) \end{pmatrix},$$

где  $A_0 = a_0 + 2kh$ ,  $A_+(k) = a_+$ ,  $A_-(k) = a_- + 2kh$ .

$$F_a(k) = 8h^3 \left( k^2 + \left( \frac{a_0}{h} + \frac{a_-}{2h} + \frac{3}{2} \right) k + \frac{3a_0}{4h} + \frac{a_-}{4h} + \frac{a_0 a_-}{2h^2} + \frac{a_0^2}{4h^2} + \frac{1}{2} \right).$$

Последняя может быть представлена в виде  $F_a(k) = V(k)C(k)$  следующим образом:

при  $n \leq 2m$ :

$$V(k) = 2h \left( k + m - \frac{n}{2} - 1 \right), \quad C(k) = 4h^2 \left( k + m - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right),$$

при  $n > 2m$ :

$$V(k) = 2h \left( k + -\frac{(-1)^n}{2} + 1 \right), \quad C(k) = 4h^2 \left( k - m + \left[ \frac{n+1}{2} \right] + 1 \right).$$

Теперь определим гильбертово пространство  $P_s$  антиголоморфных функций. Введем числа  $s_j$ :

$$s_j = \frac{j! F_a(j-1) \cdot \dots \cdot F_a(0)}{|B_a(j-1)|^2 \cdot \dots \cdot |B_a(0)|^2} = \begin{cases} (2h)^j j! \frac{\left( k + m - \frac{n}{2} - 1 \right)_j}{\left( k + m - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right)_j}, & n \leq 2m, \\ (2h)^j j! \frac{\left( k + -\frac{(-1)^n}{2} + 1 \right)_j}{\left( k - m + \left[ \frac{n+1}{2} \right] + 1 \right)_j}, & n > 2m, \end{cases}$$

где  $(\cdot)_j$  – символ Похгаммера.

Тогда  $g(\bar{z}) = \sum g_l \bar{z}^l$  принадлежит  $P_s$ , если  $\sum s_l |g_l|^2 < \infty$ . Скалярное произведение в  $P_s$  задается как  $(g', g) = \sum s_l g'_l \bar{g}_l$ .

### Лемма 3. Операторы

$$\mathring{B} = \bar{z} B \left( \bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right),$$

$$\mathring{C} = C \left( \bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right) \frac{d}{d\bar{z}},$$

$$\mathring{A}_j = A_j \left( \bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right), \quad (j = 0, +, -).$$

задают неприводимое эрмитово представление алгебры (7) в гильбертовом пространстве антиголоморфных функций  $P_s$  с вакуумным вектором 1, то есть,  $C1 = 0$  [17].

Таким образом,  $\mathring{B}, \mathring{C}, \mathring{A}_0, \mathring{A}_\pm$  – дифференциальные операторы порядка не выше 2.

при  $n \leq 2m$ :

$$\mathring{B} = 2h\bar{z} \left( \bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} + m - \frac{n}{2} - 1 \right), \quad \mathring{C} = 4h^2 \left( \bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} + m - \frac{n}{2} - \frac{1}{2} \right) \frac{d}{d\bar{z}},$$

$$\mathring{A}_0 = h \left( 2m - n + 2\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right), \quad \mathring{A}_+ = 2hm, \quad \mathring{A}_- = 2h\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}},$$

при  $n > 2m$ :

$$\mathring{B} = 2h\bar{z} \left( \bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} + -\frac{(-1)^n}{2} + 1 \right), \quad \mathring{C} = 4h^2 \left( \bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} - m + \left[ \frac{n+1}{2} \right] + 1 \right) \frac{d}{d\bar{z}},$$

$$\mathring{A}_0 = h \left( \frac{1 - (-1)^n}{2} + 2\bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right), \quad \mathring{A}_+ = 2hm, \quad \mathring{A}_- = 2h \left( \left( \frac{n+1}{2} \right) - m + \bar{z} \frac{d}{d\bar{z}} \right).$$

## 8. Семейство когерентных состояний

Зададим семейство когерентных состояний следующим образом:

$$p(z) = \begin{cases} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j! \left( m - \frac{n}{2} - 1 \right)_j} \left( \frac{z\hat{B}}{2h} \right)^j p(0), \\ \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j! \left( 1 - \frac{(-1)^n}{2} \right)_j} \left( \frac{z\hat{B}}{2h} \right)^j p(0), \end{cases}$$

здесь  $p(0) = \psi_0$ .

Когерентные состояния позволяют связать разные представления алгебры [17]:

$$\hat{A}_j p(z) = A_j p(z), \hat{B} p(z) = C p(z), \hat{B}^* p(z) = B p(z).$$

Скалярное произведение двух когерентных состояний есть воспроизводящее ядро [17]:

$$(p(z), p(w))_{P_s} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(z\bar{w})^j}{s_j} = K(z, \bar{w}).$$

Определим аналог оператора  $\hat{H}_2$  в пространстве  $P_s$  :

$$\underline{\underline{H}}_2 = -B_3^2 \left( \frac{5}{6} A_+ + \frac{5}{3} A_- + 7 A_0 + 6h \right) + g B + \bar{g} C. \quad (12)$$

Как видно,  $\underline{\underline{H}}_2$  – обыкновенный дифференциальный оператор второго порядка.

**Лемма 4.** Собственные функции гамильтониана ловушки в условиях резонансов (3), (5) с точностью до постоянного множителя приближаются:

$$\psi_{n,m,k} \sim \left( g(\bar{z}), \hat{U} \hat{U}_1 p(\bar{z}) \right)_{P_s},$$

где  $g(\bar{z})$  – собственные функции дифференциального оператора второго порядка (12),  $\hat{U}, \hat{U}_1$  – усредняющие преобразования.

Соответствующие им собственные значения:

$$\frac{2}{3} \left( n + \frac{3}{2} \right) h + \varepsilon \left( 6m - n + \frac{3}{2} \right) B_3 h + \varepsilon^2 \lambda_{n,m,k} + O(\varepsilon^3),$$

где  $\lambda_{n,m,k}$  – собственные значения оператора (12).

### Благодарности

Данная работа выполнена в лаборатории «Математические методы естествознания» ЦФИ НИУ ВШЭ при поддержке Научного фонда Национального исследовательского университета Высшая школа экономики.

**Список литературы:**

1. *M. Vogel* Particle Confinement in Penning Traps. An Introduction // Springer Series on Atomic, Optical, and Plasma Physics, 2018.
2. *F. Kohler et al.* Isotope dependence of the Zeeman effect in lithium-like calcium // Nature Communications volume 7 (10246), 2016.
3. *Z. Harman et al.* The  $g$  factor of highly charged ions // J. Phys.: Conf. Ser. 1138, 2018.
4. *A. Mooser, S. Ulmer, K. Blaum, K. Franke, H. Kracke, C. Leiteritz, W. Quint, C. Rodegheri, C. Smorra, J. Walz* Direct high-precision measurement of the magnetic moment of the proton // Nature, 509, 2014.
5. *S. Sturm, F. Köhler, J. Zatorski, A. Wagner, Z. Harman, G. Werth, W. Quint, C. Keitel, K. Blaum* High-precision measurement of the atomic mass of the electron // Nature, 506, 2014.
6. *S. Ulmer, C. Smorra, A. Mooser, K. Franke, H. Nagahama, T. Higuchi, S. Van Gorp, K. Blaum, Y. Matsuda, W. Quint, J. Walz, G. Schneider* High-Precision Comparison of the Antiproton-to-Proton Charge-To-Mass Ratio // Nature, 2015, p.196-199.
7. *C. Smorra, S. Sellner, M. Borchert, J.A. Harrington, T.Higuchi, H. Nagahama, T. Tanaka, A. Mooser, G. Schneider, M. Bohman, K. Blaum, Y. Matsuda, C. Ospelkaus, W. Quint, J. Walz, Y. Yamazaki, S. Ulmer* A parts-per-billion measurement of the antiproton magnetic moment // Nature, 550, 2017, p.371-374.
8. *M. Kretzschmar* Single Particle Motion in a Penning Trap: Description in the Classical Canonical Formalism // Phys. Scripta, 46, 1992, p.544–554.
9. *J. Goldman, G. Gabrielse* Optimized planar Penning traps for quantum information studies // Hyperfine Interact., 199, 2011, p.279-289.
10. *G. Gabrielse, F. C. Mackintosh* Cylindrical Penning Traps With Orthogonalized Anharmonicity Compensation // Internat. J. Mass Spectrom. Ion Processes, 57 (1), 1984.
11. *Kumar S., Quint W., Ringleb S., Safvan C., Stallkamp N., Stöhlker T., Vogel M.* Properties of a cylindrical Penning trap with conical endcap openings. // Physica Scripta., 94 (7), 2019.
12. *Karasev M.V., Novikova E. M.* Secondary Resonances in Penning Traps. Non-Lie Symmetry Algebras and Quantum States. // RJMP, 20 (3), 2013, p.283-294.
13. *Karasev M.V., Novikova E.M.* Eigenstates of Quantum Penning–Ioffe Nanotrap at Resonance. // Theoret. and Math. Phys., 179 (3), 2014, p.729–746.
14. *Karasev M.V., Novikova E.M., and Vybornyi E.V.* Instantons via Breaking Geometric Symmetry in Hyperbolic Traps. // Mathematical Notes, 102 (6), 2017.
15. *Karasev M.V., Novikova E.M., and Vybornyi E.V.* Non-Lie Top Tunneling and Quantum Bilocalization in Planar Penning Trap. // Mathematical Notes, 100 (6), 2016.
16. *Blagodyreva O., Karasev M.V., Novikova E.M.* Cubic Algebra and Averaged Hamiltonian for the Resonance  $3 : (-1)$  Penning-Ioffe Traps // RJMP, 19 (4), 2012, p. 441–450.
17. *Karasev M.V., Novikova E.M.* Non-Lie Permutation Relations, Coherent States, and Quantum Embedding, Coherent Transform, Quantization, and Poisson Geometry, Ed. by M. V. Karasev // AMS, Providence, RI, 187, 1998, p. 1–202.
18. *Karasev M.V., Новикова Е.М.* Устойчивые двумерные торы в ловушке Пеннинга при комбинированном частотном резонансе // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 13 (2), 2015, p.55-92.
19. *Karasev M.V. and Maslov V.P.* Asymptotic and Geometric Quantization // Uspekhi Mat. Nauk, 39 (6), 1984, p.115–173.
20. *Karasev M.V.* Noncommutative Algebras, Nano-Structures, and Quantum Dynamics Generated by Resonances // Part I: AMS Translations, Ser. 2, AMS, Providence, RI, 216, 2005, p.1-18.  
Part II: Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 11, 2005.  
Part III: RJMP, 13 (2), 2006, p.131-150.

## CYLINDRICAL PENNING TRAP RESONANCE STATES

Safyanov G.A.

*gasafyanov@yandex.ru*

*National Research University Higher School of Economics*

Received 05.08.2019

We considered a cylindrical Penning trap under resonance. In case of secondary resonance we constructed the irreducible representation of the secondary symmetry algebra. We found asymptotics of the Hamiltonian spectrum and built an approximation for eigenfunctions.



## Информация и правила для авторов

### Общие положения

Журнал «Наноструктуры. Математическая физика и моделирование» (сокращенно: НМФМ) публикуется с 2009 года и является периодическим научным изданием. Электронная версия журнала размещается на сайте <http://www.nano-journal.ru>. Основная цель издания: представление новых теоретических и вычислительных методов моделирования наноструктур и мягкой материи, общих подходов в исследовании мезосистем, а также ключевых экспериментальных результатов в данной области и связанных с этим проблем математической физики.

Журнал НМФМ имеет междисциплинарный характер и в силу этого несет определенную образовательную направленность, а не только узко научную. Работы, представляемые в журнал, должны содержать вводные сведения, которые обеспечат понимание постановок задач и восприятие результатов не только прямыми специалистами. Определения понятий, объяснение обозначений и терминов, оценки характерных параметров, теоретические предпосылки и идеи, используемые методы, и т.п., должны быть кратко объяснены в тексте статьи, имея в виду читателей, специализирующихся в иных направлениях. Должны быть описаны базовые математические модели и уравнения. Во Введении и в последующих разделах очерчивается стратегия и основные трудности, это увязывается с используемыми моделями. Структура статьи ориентируется на прояснение общей логики и методики исследования, содержит резюмирующие выводы. В тексте должны быть рассмотрены характерные примеры (хотя бы, методические), ясно иллюстрирующие предлагаемые алгоритмы.

Журнал публикует научные обзоры, исследовательские статьи и краткие научные сообщения, а также избранные аналитические и информационно-образовательные материалы, тексты докладов и циклов лекций, прочитанных в университетах, научных центрах, на школах-семинарах, конференциях, нигде ранее не публиковавшиеся и не принятые к публикации в других изданиях. Язык публикации в журнале НМФМ, как правило, русский. Работы, представляемые в журнал, не могут иметь научно-популярный или компилятивный характер. Все статьи рецензируются и могут быть отклонены редколлегией журнала. В случае принятия работы к печати ее авторы передают издателю журнала НМФМ право на разовую безвозмездную публикацию текста и его размещение в электронной версии на сайте журнала. Перевод опубликованных в журнале статей на другие языки может осуществляться только с разрешения и при участии авторов.

### Порядок представления статей

- В редакцию изначально представляются:
  - файл статьи, файлы с иллюстрациями;
  - сопроводительное письмо, можно в электронной форме, содержащее сведения об объеме статьи и обо всех авторах (фамилии, имена, отчества, полные названия мест работы, почтовый адрес с индексом, номер контактного телефона с кодом города, электронный адрес автора, ответственного за переписку с редакцией); предпочтительно, чтобы это письмо было выполнено на бланке учреждения, в котором работает кто-то из авторов, было заверено печатью и содержало утверждение о возможности открытого опубликования статьи;
  - файл с переводом на английский язык названия статьи, фамилий и инициалов авторов, аннотации, ключевых слов.
- Авторские файлы могут быть присланы на электронный адрес: [papers@nano-journal.ru](mailto:papers@nano-journal.ru); (резервный адрес в случаях затруднений с пересылкой: [nano@miem.edu.ru](mailto:nano@miem.edu.ru)) или переданы в редакцию на любом электронном носителе. Авторы получают из редакции подтверждение о получении их материалов.
- Телефон (факс) редакции: +7 (495) 916-8876. Адрес редакции: Москва 109028, Б. Трехсвятительский пер., 3/12, Московский институт электроники и математики (МИЭМ), комн. 449.

### Общие требования к представляемым файлам

- Допускается использование текстовых редакторов WORD и LATEX. К рабочим файлам должна быть приложена их pdf-копия. В названии файлов используется латинский алфавит, пробелы заменяются знаком `_`. Шапка статьи содержит название, инициалы и фамилии авторов, место работы, электронный адрес, краткую аннотацию, ключевые слова. В аннотации не следует использовать формулы и ссылки на текст работы или список литературы; в конце она должна содержать индекс УДК (к английской версии аннотации можно добавить индексы зарубежных рубрикаторов).
- Объем кратких сообщений 4-8 страниц, исследовательских статей, как правило, до 20 страниц, а обзоров – более 20 страниц. Верхняя граница согласуется с редколлегией. При подсчете объема нужно ориентироваться на страницы формата А4, шрифт 12, знаков в строке 80, интервалов между строками 1.
- Авторы не должны злоупотреблять сокращениями, составленными из заглавных начальных букв терминов. Предпочтительней каждый раз использовать полное наименование объекта. Возможно использование только устоявшихся аббревиатур.

### Требования к файлам Word

- Рекомендуемый шрифт – Times New Roman.
- Строки в пределах абзаца не должны разделяться символом возврата каретки (Enter).
- Нельзя использовать автоматическое создание сносок, автоматический перенос или автоматический запрет переносов, создание списков, автоматический отступ и т.п.
- Ссылки на список литературы даются цифрами в квадратных скобках: [1], [5,6,7], [1-9].
- Все без исключения формулы и обозначения размерности, даже состоящие из одной латинской буквы, и в тексте и вынесенные в отдельную строку, всегда набираются в формульном редакторе и никогда – в обычном текстовом редакторе.

- При создании таблицы рекомендуется использовать возможности Word или MS Excel. Таблицы, набранные вручную (с помощью большого числа пробелов), не принимаются.

#### **Требования к иллюстрациям**

- Иллюстрации представляются в отдельных файлах, черно-белыми. Они должны иметь разрешение не менее 600 dpi.
- Форматы файлов – TIFF, EPS, PSD, JPEG.

#### **Требования к списку литературы**

- Ф.И.О. авторов или редакторов выделяются курсивом.
- Для статей приводится название. Названия отделяются от выходных данных знаком //. Расположение выходных данных указано на образце ниже. Номер тома выделяется жирным шрифтом, номер выпуска дается в скобках. Указываются номера первой и последней страниц статьи, либо уникальный номер статьи и ее объем. Для книг желательно указывать их объем. Если известна ссылка на электронный архив или сайт, то ее желательно указать.

*Фамилия И.О.* Название статьи // Назв. журн., 2000, **1** (1), 1-6.

*Family F.M. and Family F.* Title of the paper // Name of the Journal, 2006, **73**, 165313, 9 pp.

*Фамилия И.О., Фамилия И.О.* Название книги // Наука, С.-П., 1999, 176 стр.

*Family F.M.* Title of the paper // In book: Family F.M. (et al. eds), Title of the collection, Publisher, Boston, 2005, 9-24.

*Family F.M.* (ed.), Title of the collection // Publisher, N.Y., 2005, 324 pp.

*Фамилия И.О.* Название доклада // Доклад на конференции «Название конференции (место и дата проведения)»; ссылка на электронный ресурс.

# Наноструктуры. Математическая физика и моделирование

## **Журнал зарегистрирован**

в Министерстве РФ по делам печати,  
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.

Свидетельство о регистрации

ПИ № ФС77-34934 от 29 декабря 2008 г.

## Учредители

Московский институт электроники и математики (МИЭМ),

Европейский центр по качеству

## **Издатель**

Европейский центр по качеству

Журнал входит в перечень ВАК РФ

Статьи рецензируются

---

## **ПОДПИСКА НА ЖУРНАЛ НМФМ**

Подписной индекс журнала в каталоге агентства «Урал-Пресс» 70017.

Электронный подписной каталог и контакты всех представительств «Урал-Пресс»  
на сайте [www.ural-press.ru](http://www.ural-press.ru).

Редакция предлагает подписчикам возможность безвозмездно получить подборку прошлых выпусков журнала. Пришлите на электронный адрес [nanostructures@hse.ru](mailto:nanostructures@hse.ru) (или на почтовый адрес: 123458, Москва, ул. Таллинская, д. 34, каб. 429, редакция журнала НМФМ) копию подписной квитанции, а также адрес для отсылки выпусков.