ISSN 2224-8412

23(2) 2024

НАНОСТРУКТУРЫ

математическая физика и моделирование

Nanostructures. Mathematical physics & modelling

2024, том 23, № 2

НАНОСТРУКТУРЫ

математическая физика и моделирование

Nanostructures.
Mathematical Physics & Modelling

2024, volume 23(2)

Наноструктуры.
Математическая физика и моделирование

Электронная версия журнала размещается на сайте
http://nano-journal.ru

Адрес редакции:
123458, Москва, ул. Таллинская, д. 34, каб. 429
+7 (495) 916-88-76
nanostructures@hse.ru

Контакты для представления статей и деловой переписки
Ответственный секретарь Махиборода А.В.
+7 (916) 578-95-27
makhiboroda@yandex.ru

Москва

Содержание

Contents

Actual matter published in the last years

ПАМЯТИ В.М. ХАМЕТОВА: ПУТЬ В ПРОФЕССИИ, ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ В ФИНАНСОВОЙ МАТЕМАТИКЕ И ВОСПОМИНАНИЯ КОЛЛЕГ

Богомолов Р.О., Зверев О.В., Шелемех Е.А.

Богомолов Р.О., ЦЭМИ РАН, rostik@cemi.rssi.ru
Зверев О.В., ЦЭМИ РАН, zv-oleg@yandex.ru
Шелемех Е.А., ЦЭМИ РАН, letis@mail.ru

Поступила 23.03.2024

Статья посвящена памяти д.ф.-м.н., профессора В.М. Хаметова (18.11.1946 – 02.09.2023): приведены основные вехи его пути как ученого и преподавателя, кратко описан круг его научных интересов и полученных результатов. Одним из основных направлений его исследований в последние двадцать лет стало моделирование эволюции стоимости финансовых инструментов. Дан обзор основных результатов по этой теме, основная роль в получении которых принадлежит В.М. Хаметову. В заключении приведены воспоминания его коллег и учеников.
Ключевые слова: В.М. Хаметов, минимаксная модель расчета опциона, неполный рынок, стохастическая игра, квантильное хеджирование, байесовская модель облигации.

DOI: 10/31145/2224-8412-2024-23-2-5-28
УДК: 519.863

Владимир Минирович Хаметов родился 18 ноября 1946 года в г. Нойштрелиц (ГДР). В 1968 году он окончил Уральский политехнический институт им. С. М. Кирова по специальности “Радиоэлектронные устройства”.

К моменту окончания учебы в институте круг интересов Владимира Минировича стал шире того, что предлагала инженерная специальность. Одним из направлений исследований, привлекших его внимание, была теория случайных процессов. После окончания института он поступает в аспирантуру Московского государственного института электронного машиностроения (МИЭМ) на кафедру Прикладной математики по специальности “Теория вероятностей и математическая статистика”. В это время он занимается проблемами нелинейной фильтрации случайных процессов [1], [2] и интерполяции по наблюдениям за ними [3], а в 1979 году защищает диссертацию на соискание степени кандидата физико-математических наук [4]. Тогда же он знакомится с Виктором Павловичем Масловым, которого всегда с гордостью называл своим учителем. После защиты кандидатской диссертации он продолжает заниматься проблемами восстановления случайных процессов [5], [6], [7], [8] и одновременно с этим начинает работать над задачами оптимального управления случайными процессами [9], [10], [11], [12], [13], [14]. В 2001 году защищает диссертацию на соискание степени доктора физико-математических наук на тему “Оптимальные стратегии управляемых в слабом смысле стохастических систем с полной информацией” по специальности “Системный анализ, управление и обработка информации” [15].

В связи с кардинальными изменениями, происходившими в стране в девяностые годы прошлого века, Владимир Минирович был вынужден значительную часть времени в этот период посвятить работе, не связанной с наукой и преподаванием. В новой для себя финансовой сфере он проработал несколько лет. В результате Владимир Минирович заинтересовался вопросами моделирования эволюции цен финансовых инструментов в близкой ему стохастической постановке. В конце девяностых годов, вернувшись в науку, он начал активно заниматься проблемами финансовой математики, условиями существования и свойствами экстремальных вероятностных мер, задачей оптимальной остановки случайных последовательностей. Данные исследования нашли отражение в его публикациях, посвященных проблемам расчета опционов. Этими задачами он занимался до последнего времени. Идеям, результатам и публикациям В. М. Хаметова на эту тему посвящен следующий раздел статьи. Еще одним направлением исследований, которым он также занимался последние двадцать лет, стала теория оптимального восстановления функций по наблюдениям с ошибками [16], [17], [18], [19], [20].

Владимиру Минировичу были присущи широта научных интересов, умение быстро погружаться в ранее не рассматривавшиеся задачи и предлагать новые подходы к их решению. Всего опубликовано более 100 его научных работ. Публикации Владимира Минировича удостаивались включения в список лучших научных работ ЦЭМИ РАН: за 2011 год (цикл статей в соавторстве со Зверевым О. В. [21], [22]) и за 2017 год (цикл статей в соавторстве с Шелемех Е. А. [23], [24], [25]). Его ученица Шелемех Е. А. была удостоена второй премии им. проф. Б. Л. Овсиевича (присуждается молодым ученым за фундаментальные экономико-математические исследования, выполненные в России) 2015 года за цикл работ, написанных в соавторстве с В. М. Хаметовым и на основе его идей.

С момента поступления в аспирантуру и до последнего времени жизнь Владимира Минировича как ученого и преподавателя была наиболее тесно связана с МИЭМ. Кроме того, с 2005 года он работал также в лаборатории теории риска ЦЭМИ РАН, а в 2018–2019 годах еще и в Московском Авиационном Институте (МАИ). В 1985 году в МИЭМ он получил ученое звание доцента, а в 2006 году — профессора. Разнообразие научных интересов Владимира Минировича проявилось и в широком круге дисциплин, которые он преподавал: финансовая математика, введение в теорию опционов, математические методы финансового анализа, математические методы экономики, теория вероятностей, случайные процессы, случайные процессы и теория массового обслуживания, точечные процессы, функциональный анализ, управление рисками и страхование, управление рисками и актуарные методы, теория игр, квантовые вычисления, теория функции комплексного переменного. Он также является соавтором 4 учебно-методических пособий [6], [9], [5], [26]. Заслуги Владимира Минировича в области преподавательской деятельности отмечены наградами: в 2009 году он был награжден нагрудным знаком "Почетный работник высшего профессионального образования России", в 2017 году отмечен благодарностью НИУ ВШЭ, в 2021 году награжден Почетной грамотой НИУ ВШЭ.

Особое значение Владимир Минирович придавал наставничеству. Он брал на себя научное руководство аспирантами в МИЭМ, с 2005 года, работая в лаборатории теории риска ЦЭМИ РАН, руководил исследованиями своих учеников в области построения и анализа новых моделей ценообразования активов на финансовых рынках. Под его руководством защищены пять диссертаций на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук [27], [28], [29], [30], [31].

Как эксперт по оценке риска Владимир Минирович консультировал МЧС России. За свой вклад он был награжден медалью "За пропаганду спасательного дела" МЧС

России (2010 год) и памятной медалью МЧС России "Маршал Василий Чуйков" (2014 год).

Владимир Минирович ушел из жизни 2 сентября 2023 года.

Далее в статье представлен обзор результатов, полученных Владимиром Минировичем и его учениками в области ценообразования финансовых инструментов. Этими задачами он заинтересовался, столкнувшись с проблемами практического применения существовавшей на тот момент весьма обширной теории. Его вклад состоит в предложении новаторских подходов к уже достаточно изученным проблемам, которые позволили по-новому доказать известные теоретические положения и наметить способы их практического применения.

1 Минимаксный подход к расчету опционов на неполных рынках

В. М. Хаметов начал работать над проблемой расчета опционов на неполных рынках в начале 2000-х годов. На тот момент было известно (см., например, [32, гл. 5, 7]), что на неполном рынке с дискретным временем для интегрируемого платежного обязательства: 1) существует континуум безарбитражных цен, при этом само платежное обязательство не достижимо, 2) существует самофинансируемый портфель с минимальным начальным капиталом, почти наверное покрывающим в момент исполнения опциона все обязательства продавца по этому контракту (суперхеджирующий портфель). Существование суперхеджирующего портфеля в случае модели неполного рынка с дискретным временем впервые было доказано Фельмером и Кабановым [33] с помощью равномерного разложения Дуба. В этом подходе компоненты суперхеджирующего портфеля существуют как множители Лагранжа в некоторой стохастической оптимизационной задаче. Капитал такого портфеля равен верхней грани по множеству эквивалентных вероятностных мер от ожидаемого значения платежного обязательства. Трудности, связанные с вычислением существенной верхней грани по множеству вероятностных мер и нахождением соответствующих множителей Лагранжа, привели к тому, что даже для сравнительно простых примеров неполных рынков задача построения суперхеджирующего портфеля оставалась нерешенной.

В. М. Хаметов предложил способ построения равномерного разложения Дуба на основе решения стохастической оптимизационной задачи [34], [35], [36], а затем сформулировал задачу расчета опциона на неполном рыке как антагонистическую игру [37]. Суть предложенного им игрового подхода состоит в следующем: рассматривается игра продавца опциона (эмитента), рынка (а, в случае американского опциона, еще и покупателя контракта). В момент продажи опциона продавец получает от покупателя стоимость опциона (премию), за счет которой формирует портфель первичных финансовых активов. Он управляет этим портфелем вплоть до момента предъявления опциона к исполнению покупателем (если такой наступит) с тем, чтобы за счет стоимости портфеля исполнить все обязательства по контракту. Предполагается, что внешние поступления и изъятия капитала из портфеля отсутствуют (самофинансируемый портфель). Стратегиями рынка являются распределения вероятностей цен первичных рисковых активов из числа эквивалентных базовому. Покупатель американского опциона вправе выбрать момент предъявления опциона к исполнению. (В случае европейского опциона этот момент не выбирается, он закреплен в контракте.) Игра рассматривается с точки зрения продавца опциона: в наихудшей для себя ситуации, когда рынок и покупатель действуют на максимизацию величины ожидаемого экспоненциального риска продавца, он стремится минимизировать ее. Оказывается, что в этой минимаксной задаче на безарбитражном рынке всегда существует суперхеджирующий портфель, доставляющий минимальное значение верхней грани ожидаемого риска продавца опциона, и он является суперхеджирующим с минимальным первоначальным капиталом, т.е. с капиталом, равным верхней цене хеджирования. Исследование свойств решения минимаксной задачи в части свойств вероятностной меры, доставляющей верхнюю грань ожидаемого риска продавца (если она существует), позволило предложить алгоритм построения решения этой задачи и, соответственно, суперхеджирующего портфеля с минимальным капиталом.

Основные результаты были получены В. М. Хаметовым и его учениками сначала для европейского опциона, а затем распространены на случай американского опциона. Далее все результаты сформулированы в наиболее общем виде.

1.1 Описание игры

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$, где $\Omega = (\mathbb{R}^+)^{d(N+1)}$, N — натуральное число (горизонт), $\mathcal{F} := \mathcal{B}(\Omega)$, $N_0 := \{0, 1, 2, ..., N\}$, а $N_1 = N_0 \setminus \{0\}$. На нем определены d-мерные случайные величины $\{S_t\}_{t \in N_0}$. Зададим $\mathcal{F}_0 := \{\varnothing, \Omega\}$, $\mathcal{F}_t := \sigma(S_s, s \le t)$, $t \in N_1$. Для удобства записи примем, что $\mathcal{F}_{-1} := \mathcal{F}_0$. Без ограничения общности будем полагать, что фильтрация $(\mathcal{F}_t)_{t \in N_0}$ универсально полна.

Введенные объекты задают многошаговую стохастическую модель финансового рынка с дискретным временем и конечным горизонтом N, состоящего из d рисковых активов, эволюция стоимости которых описывается случайными величинами $\{S_t\}_{t \in N_0}$, и одного безрискового актива с постоянной стоимостью, равной 1 [32, разд. 5.1]. Торги на рынке осуществляются в моменты времени $t \in N_0$.

Через $\mathfrak{M}$ обозначим множество всех мартингальных вероятностных мер Q, заданных на $(\Omega, \mathcal{F})$, т.е. мер, относительно которых $\mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[S_{t+s}|\mathcal{F}_t] = S_t$, $0 \le t \le t+s \le N$ [32], а через $\mathfrak{R}$ — совокупность мер, состоящую из меры P и всех вероятностных мер на $(\Omega, \mathcal{F})$, эквивалентных P. Известно, что построенная модель рынка является безарбитражной, если $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R} \neq \varnothing$ [32, теор. 5.17], и неполной, если $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R}$ состоит из более, чем одной меры.

Пусть на рынке также имеется динамическое платежное обязательство $f := \{f_t\}_{t \in N_0}$. Последнее означает [32, разд. 5.1], что заданы интегрируемые п.н. неотрицательные $\mathcal{F}_t$-измеримые случайные величины f_t, $t \in N_0$. Всюду далее будем предполагать, что все f_t, $t \in N_0$, п.н. ограничены. В общем случае f представляет собой чистые совокупные обязательства продавца американского опциона, обусловленные этим контрактом. Частный случай $f_t \equiv 0$, $t \in N_0 \setminus \{N\}$, и $\mathsf{P}(f_N > 0) > 0$ соответствует платежному обязательству европейского опциона.

Имеются три игрока: рынок, покупатель и продавец опциона. *Множеством стратегий рынка* назовем совокупность $\mathfrak{R}$. *Покупатель* опциона выбирает момент остановки τ из множества $\mathcal{T}$ моментов остановки со значениями из $N_0 \cup \{N+1\}$. Здесь $N+1$ — вспомогательный момент времени, отвечающий случаю отсутствия запроса покупателя на исполнение опциона до момента времени N включительно. Таким образом, мы считаем, что $\mathsf{P}(\tau = N+1 | \tau > N) = 1$. Для определенности зададим $\mathcal{F}_{N+1} := \mathcal{F}_N$ и $f_{N+1} \equiv 0$.

Продавец опциона управляет самофинансируемым портфелем [32, разд. 5.1], сформированным в момент $t = 0$ за счет премии от продажи контракта и состоящим из одного безрискового и d рисковых активов. Предполагается, что транзакционные издержки и торговые ограничения отсутствуют. Количество активов каждого вида в портфеле в момент $t \in N_0$ моделируется $\mathcal{F}_{t-1}$-измеримыми случайными величинами: для безрискового актива — одномерной β_t, а для рисковых активов — d-мерной γ_t. Портфель — это набор пар $\pi = \{\beta_t, \gamma_t\}_{t \in N_0}$. Через U обозначим множество всех наборов γ, состоящих из d-мерных п.н. конечных $\mathcal{F}_{t-1}$-измеримых случайных величин γ_t, $t \in N_1$, а через U_t — его сужение на $\{t\}$, состоящее из всех γ_t, $t \in N_1$. Известно [32, разд. 5.1], что самофинансируемый портфель полностью определен, если задано количество всех входящих в него активов в момент $t = 0$, а также количество рисковых активов в каждый момент времени $t \in N_1$. Совокупная стоимость активов в портфеле в начальный момент времени определяется величиной премии опциона. Распределить эту стоимость между активами можно произвольным образом. Значит, в качестве *стратегий продавца опциона* достаточно рассматривать наборы γ. Капитал самофинансируемого портфеля π в момент времени t, обозначаемый X_t^π, $t \in N_1$, можно вычислить по формуле $X_t^\pi = X_0^\pi + \sum\limits_{i=1}^{t} \gamma_i \cdot \triangle S_i$ [32, разд. 5.1], где $\triangle S_i := S_i - S_{i-1}$, $\cdot$ — знак скалярного произведения. Портфелем с потреблением назовем пару (π, C), где π — самофинансируемый портфель, а C — набор п.н. неотрицательных $\mathcal{F}_t$-измеримых случайных величин C_t, $t \in N_0$, называемых потреблением. Капитал портфеля с потреблением определяют формулой $X_t^{(\pi,C)} := X_t^\pi - C_t$, $t \in N_0$.

Будем также предполагать, что: 1) в каждый момент времени $t \in N_0$ обоим игрокам доступна вся информация $\mathcal{F}_t$, 2) игроки действуют независимо друг от друга.

Пусть игроки выбрали стратегии $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}$, $\tau \in \mathcal{T}$ и $\gamma \in U$. Тогда ожидаемое значение *риска продавца* опциона определено формулой

$$I_0^{\mathsf{Q},\tau,\gamma} := I_0^{\mathsf{Q},\tau,\gamma}(S_0) := \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \exp\left\{ f_\tau - \sum_{i=1}^{\tau} \gamma_i \cdot \triangle S_i \right\}. \tag{1}$$

Рассмотрим задачу расчета опциона с точки зрения продавца. Предположим, что он стремится минимизировать свой ожидаемый риск в наихудшей для себя ситуации: покупатель опциона и рынок выбирают стратегии, максимизирующие ожидаемый риск продавца. Пришли к минимаксной задаче:

$$\inf_{\gamma \in U} \sup_{(\mathsf{Q},\tau) \in \mathfrak{R} \times \mathcal{T}} I_0^{\mathsf{Q},\tau,\gamma}. \tag{2}$$

Определение 1. *Решением минимаксной задачи* (2) *назовем четверку* $(\mathsf{Q}^*, \tau^*, \gamma^*, V_0)$ *такую, что* $V_0 = \inf\limits_{\gamma \in U} \sup\limits_{(\mathsf{Q},\tau) \in \mathfrak{R} \times \mathcal{T}} I_0^{\mathsf{Q},\tau,\gamma} = I_0^{\mathsf{Q}^*,\tau^*,\gamma^*}$, *где* Q^* *— вероятностная мера,* $\tau^* \in \mathcal{T}$, *а* $\gamma^* \in U$. *Величину* V_0 *назовем верхним гарантированным значением в задаче* (2), *меру* Q^* *— наихудшей, момент остановки* $\tau^* \in \mathcal{T}$ *— "оптимальным", а* γ^* *— минимаксной стратегией.*

Заметим, что в силу п.н. ограниченности динамического платежного обязательства f и допустимости стратегии "не вкладывать в рисковые активы" (т.е. $\gamma = (0, ..., 0) \in U$) верхнее гарантированное значение V_0 в (2) п.н. ограничено.

Замечание (о выборе экспоненциальной функции риска). Функция риска в (1) $\rho(x) = e^{-x}$ соответствует функции полезности с постоянным абсолютным неприятием риска (CARA — constant absolute risk aversion, [32, пример 2.46]). Экспоненциальная функция риска была выбрана из-за мультипликативного и ряда других свойств, позволяющих выписать уравнение Беллмана для задачи (2) в сравнительно простом виде (см. теорему 1). Этот выбор оправдался свойствами построенного для нее портфеля продавца опциона: он оказался суперхеджирующим с минимальным капиталом среди всех суперхеджирующих портфелей (теорема 2). Использование любой другой функции риска не может "улучшить" этот результат в смысле снижения капитала суперхеджрующего портфеля.

1.2 Основные результаты

Будем искать решение минимаксной задачи (2) с помощью стохастического варианта метода динамического программирования. Сначала обоснуем применимость этого метода, получив рекуррентные соотношения Беллмановского типа для верхнего гарантированного значения. Нам понадобятся следующие объекты и обозначения, $t \in N_1$: 1) $I_t^{\mathsf{Q},\tau,\gamma} := 1_{\{\tau \geq t\}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[\exp\left\{ f_\tau - \sum\limits_{i=t+1}^{\tau} \gamma_i \cdot \triangle S_i \right\} |\mathcal{F}_t \right]$; 2) верхнее гарантированное значение в момент времени: $V_t := \operatorname*{ess\,inf}\limits_{\gamma \in U_{t+1,N}} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{(\mathsf{Q},\tau) \in \mathfrak{R} \times \mathcal{T}} I_t^{\mathsf{Q},\tau,\gamma}$, где $U_{t+1,N}$ есть сужение множества U на $\{t+1, ..., N\}$. Ограниченность величин V_t, $t \in N_1$, следует из тех же соображений, что и ограниченность верхнего гарантированного значения V_0 задачи (2).

Рекуррентные соотношения для верхних гарантированных значений в задаче расчета европейского опциона были получены в [21], для американского опциона — в [23]. См. также [38].

Теорема 1. *Величины $\{V_t\}_{t \in N_0}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям п.н.*

$$\begin{cases} V_{t-1} = \max\left\{ \exp\{f_{t-1}\}, \operatorname*{ess\,inf}\limits_{\gamma \in U_t} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[V_t e^{-\gamma \cdot \triangle S_t} | \mathcal{F}_{t-1} \right] \right\}, \quad t \in N_1, \\ V_N = \exp\{f_N\}. \end{cases} \tag{3}$$

Будем искать стратегии игроков, доставляющие верхнюю и нижнюю грани в правой части равенств (3). Начнем поиск решения с внешней существенной нижней грани по множеству U_t, $t \in N_1$. Обозначим $\tilde{\tau} := \min\{t \in N_0 : V_t = \exp\{f_t\}\}$.

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны.*

1. $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{M} \neq \varnothing$.
2. *Найдется $\gamma^* \in U$ такая, что при любом $t \in N_1$ для γ_t^* п.н. выполняется равенство*
$$\operatorname*{ess\,inf}\limits_{\gamma \in U_t} \operatorname*{ess\,sup}\limits_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[V_t e^{-\gamma \cdot \triangle S_t} | \mathcal{F}_{t-1} \right] = \left(\operatorname*{ess\,sup}\limits_{\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}} \left[V_t e^{-\gamma \cdot \triangle S_t} | \mathcal{F}_{t-1} \right] \right) \Big|_{\gamma = \gamma_t^*}. \tag{4}$$
3. *Найдутся $\gamma^* \in U$ и неубывающий набор п.н. неотрицательных $\mathcal{F}_t$-измеримых случайных величин $C^* := \{C_t^*\}_{t \in N_0}$, $C_0^* = 0$, такие, что п.н. для любого $t \in N_1$*
$$\ln V_{t \wedge \tilde{\tau}} = \ln V_0 + \sum_{i=1}^{t \wedge \tilde{\tau}} \gamma_i^* \cdot \triangle S_i - C_{t \wedge \tilde{\tau}}^*. \tag{5}$$

4. *Найдутся $\gamma^* \in U$ и неубывающий набор п.н. неотрицательных $\mathcal{F}_t$-измеримых случайных величин $C^* := \{C_t^*\}_{t \in N_0}$, $C_0^* = 0$, такие, что самофинансируемый портфель с потреблением (π^*, C^*), где $\pi^* = \{\beta_t^*, \gamma_t^*\}_{t \in N_0}$ и $X_t^* := X_t^{(\pi^*, C^*)} = \ln V_t$, $t \in N_0$, имеет следующие свойства:*

   - *$f_\tau \leq X_\tau^*$, $\tau \in \mathcal{T}$, п.н. и*
   - *для любого другого портфеля с потреблением (π, C): $f_\tau \leq X_\tau^{(\pi, C)}$, $\tau \in \mathcal{T}$, п.н. справедливо неравенство $X_t^* \leq X_t^{(\pi, C)}$, $t \in N_0$.*

Условие $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{M} \neq \varnothing$ в теореме 2 означает безарбитражность рынка [32, теор. 5.17].

Представление вида (5) называют опциональным разложением или равномерным разложением Дуба для $\{\ln V_t\}_{t \in N_0}$. В классической статье [33] равномерное разложение Дуба — это основа доказательства утверждения о существовании суперхеджирующего портфеля опциона на неполном рынке. Известно, что случайные величины $\{Y_t\}_{t \in N_0}$ допускают равномерное разложение Дуба, если и только если $\{Y_t\}_{t \in N_0}$ — супермартингал [32]. Коэффициенты γ^* разложения есть коэффициенты Лагранжа некоторой оптимизационной задачи [33]. Их существование также обосновывают методами функционального анализа [32].

Работа над получением новых условий существования равномерного разложения Дуба велась В. М. Хаметовым и его учениками с начала 2000-х годов. Первые опубликованные результаты относятся к 2002 году ([27], [28], [34], [36], [37], [39]). Они представляют собой труднопроверяемые достаточные условия существования разложения (5) и, соответственно, суперхеджирующего портфеля. Первые утверждения, содержащие условия, приведенные в теореме 2, были опубликованы для опционов европейского типа и относятся к 2009 году [40]. В [21] и [40] обоснована достаточность безарбитражности рынка (пункт 1 теоремы 2) для выполнения пунктов 2–4 теоремы 2. Для американского опциона аналогичные утверждения были опубликованы в [23]. Там же доказана эквивалентность пунктов 2–4 теоремы 2. Доказательство эквивалентности пунктов 1 и 2 теоремы 2 содержится в [31].

Из доказательства теоремы 2 следует, что γ^* в пунктах 2–4 теоремы есть один и тот же объект. Утверждение теоремы 2 отличается от известных тем, что: 1) не предполагается супермартингальность $\{\ln V_t, \mathcal{F}_t\}_{t \in N_0}$, это свойство следует из теоремы 2 и известных результатов [32]; 2) оно дает альтернативный метод построения равномерного разложения Дуба и суперхеджирующего портфеля опциона с минимальным начальным капиталом. Предложенный метод вместе с приведенными ниже результатами относительно свойств "наихудшей" вероятностной меры (если она существует) позволил построить новые примеры суперхеджирования опционов на неполных рынках с конечным или компактным носителем [22], [24], [25], [38], [41].

Достаточные условия единственности разложения (5) и, соответственно, суперхеджирующего портфеля были впервые опубликованы в 2016 году [24], [42]. В более привычных терминах неизбыточности рынка — в 2018 году [43]. Напомним, что рынок называют неизбыточным, если для любого $t \in N_1$ из равенства $\gamma_t \cdot \triangle S_t = 0$ п.н., $\gamma_t \in U_t$, следует, что $\gamma_t = (0, ..., 0)$ п.н. [32, опр. 1.13].

Теорема 3. *Пусть рынок неизбыточен и $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{R} \neq \varnothing$. Тогда $\{\ln V_t\}_{t \in N_0}$ допускает п.н. единственное равномерное разложение Дуба (5).*

Равномерное разложение Дуба (5) позволило также выписать вид момента остановки, доставляющего верхнюю грань в задаче (2) [23], [44], [45].

Теорема 4. *Пусть* $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{M} \neq \varnothing$ *и* $\gamma^* \in U$ *удовлетворяет* (4). *Тогда для момента остановки* $\tau^* := \min\{t \in N_0 : V_t = \exp\{f_t\}\}$ *имеет место равенство* $V_0 = \sup\limits_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}} I_0^{\mathsf{Q},\tau^*,\gamma^*}$.

Были получены примеры явного построения оптимального правила остановки для процессов специального вида [46], [47]; предложен алгоритм решения задачи об оптимальной остановке с конечным горизонтом в случае рынка с конечным носителем [48].

Перейдем теперь к проблеме существования вероятностной меры, доставляющей внутреннюю существенную верхнюю грань в рекуррентных соотношениях (3). В наиболее общем виде они были опубликованы в работах [49], [50].

Теорема 5. *Для произвольной* $\mathcal{F}$*–измеримой п.н. ограниченной случайной величины* ξ *справедливы утверждения:*

1) существуют

— заданная на $(\Omega, \mathcal{F})$ *вероятностная мера* λ *такая, что* $\lambda \gg \mathsf{Q}$ *для любой* $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}$, *и*

— последовательность неотрицательных $\mathcal{F}$*-измеримых случайных величин* $\{X_k\}_{k\geq 1}$, *для которых* $\mathsf{E}^\lambda X_k = 1$, $k \geq 1$, *и* $\sup\limits_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\xi = \lim\limits_{k\to\infty} \mathsf{E}^\lambda X_k \xi$;

2) если $\{X_k\}_{k\geq 1}$ *относительно слабо компактно в* $L^1(\Omega, \mathcal{F}, \lambda)$, *то найдется вероятностная мера* Q^*, *заданная на* $(\Omega, \mathcal{F})$, *такая, что* $\sup\limits_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}\xi = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\xi$.

Условие теоремы 5 об относительной слабой компактности последовательности $\{X_k\}_{k\geq 1}$ сложно проверить. Тем не менее, теорема 5 существенна для наших построений: она дает достаточные условия того, что верхняя грань в правой части рекуррентных соотношений (3) достигается именно на вероятностной мере. Известно [51], [52], что, как правило, верхняя грань достигается на конечно-аддитивной мере. В таком случае математическое ожидание не определено, что, в свою очередь, затрудняет практическое построение решения задачи расчета опциона в минимаксной постановке и его интерпретацию.

Теперь мы готовы сформулировать условия существования решения задачи (2) (см. [24], [50]).

Теорема 6. *Пусть* $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{M} \neq \varnothing$ *и при любых* $t \in N_0$ *и* $\gamma \in U$ *для случайной величины* $\exp\left\{f_t - \sum\limits_{i=1}^{t} \gamma_i \cdot \triangle S_i\right\}$ *выполнены условия теоремы* 5. *Тогда существует решение минимаксной задачи* (2), *т.е. четверка* $(\mathsf{Q}^*, \tau^*, \gamma^*, V_0)$, *где* Q^* *— вероятностная мера, а* V_0 *является решением рекуррентных уравнений* Q^**-п.н.*

$$\begin{cases} V_{t-1} = \max\{f_{t-1}, \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[V_t e^{-\gamma_t^* \cdot \triangle S_t} | \mathcal{F}_{t-1}\right]\}, & t \in N_1, \\ V_N = \exp\{f_N\}. \end{cases}$$

В ходе исследований были выявлены важные свойства "наихудшей" вероятностной меры в составе решения задачи (2). В наиболее общей постановке для вероятностных мер, доставляющих экстремум интегралу Лебега произвольной ограниченной случайной величины, эти свойства были установлены в [49], [53]. Для минимаксной задачи расчета европейского опциона — в [21] и [50], а для американского опциона — в [24].

Теорема 7. *Пусть модель рынка является неполной и* $(\mathsf{Q}^*, \tau^*, \gamma^*, V_0)$ *— решение задачи* (2). *Тогда: 1)* $\mathsf{Q}^* \notin \mathfrak{R}$; *2)* $\mathsf{Q}^* \in \mathfrak{M}$; *3) относительно нее справедливо равномерное разложение Дуба* (5) *с* $C_t^* \equiv 0$ Q^**-п.н. Кроме того, найдется мартингальная дискретная вероятностная мера, сосредоточенная не более чем на* $N(d+1)$ *элементе из* $\operatorname{supp} \mathsf{P}$*, относительно которой для любого* $t \in N_1$:

$$\ln V_{t\wedge\tau^*} = \ln V_0 + \sum_{i=1}^{t\wedge\tau^*} \gamma_i^* \cdot \triangle S_i. \tag{6}$$

Таким образом, из утверждения теоремы 7 следует, что задача расчета опциона на исходном неполном рынке сводится к задаче расчета этого опциона на "наихудшем" полном рынке, заданном мартингальной мерой с конечным носителем.

Утверждения теорем 2 и 7 позволили предложить алгоритм построения решения задачи (2), разделив задачи поиска конечного носителя дискретной меры, о которой сказано в теореме 7, и суперхеджирующего портфеля (подробнее см. в [24], [31]): 1) известные равенства $\ln V_{t-1} = \max\{f_{t-1}, \operatorname*{ess\,sup}_{\mathsf{Q}\in\mathfrak{R}\cap\mathfrak{M}} \mathsf{E}^{\mathsf{Q}}[\ln V_t|\mathcal{F}_{t-1}]\}$, $t \in N_1$, $\ln V_N = f_N$ и результаты теоремы 7 о мере с конечным носителем позволяют найти эту меру и $\ln V_{t-1}$; 2) из равенств (6) и условия самофинансируемости можно найти $\pi^* = \{\beta_t^*, \gamma_t^*\}_{t\in N_0}$; 3) момент остановки определяется из утверждения теоремы 4.

Описанный алгоритм позволил построить "наихудшие" меры и рынки, а также суперхеджирующие портфели для ряда примеров [22], [24], [25], [38], [41], [54].

Как отмечалось выше, выполнение условий теоремы 5 и, соответственно, теоремы 6 трудно проверить. Одновременно, предложен алгоритм построения решения задачи (2), если оно существует. Тогда можно подойти к решению задачи (2) следующим образом: построить "кандидата" в соответствии с предложенным алгоритмом, а затем проверить, является ли он решением задачи. Следующая теорема, сформулированная для европейского опциона в [21] и [50], помогает осуществить такую проверку. В утверждении используется понятие верхней S-оценивающей последовательности. Обратим внимание, что в определении и теореме ниже $\tau^* = N$ на любой траектории, что соответствует задаче (2) для европейского опциона.

Определение 2. *Верхней* S*-оценивающей последовательностью для европейского опциона будем называть набор* $\mu := \{\mu_t\}_{t\in N_0}$*, элементы которого определены равенством* $\mu_t := V_t \exp\left\{-\sum\limits_{i=1}^{t} \gamma_i^* \cdot \triangle S_i\right\}$, *где* $\{V_t\}_{t\in N_0}$ *удовлетворяет* (3)*, а* γ^* *— равенствам* (4).

Теорема 8. *Пусть* $\mathfrak{R}\cap\mathfrak{M} \neq \varnothing$ *и* γ^* *удовлетворяет равенствам* (4)*. Следующие утверждения эквивалентны:*

- Q^* *— наихудшая;*
- $\mathsf{Q}^* \in \mathfrak{M}$ *и справедливы равенства* Q^**-п.н.*

$$\begin{cases} V_{t-1} = \mathsf{E}^{\mathsf{Q}^*}\left[V_t e^{-\gamma_t^*\cdot\triangle S_t}|\mathcal{F}_{t-1}\right], & t \in N_1, \\ V_N = \exp\{f_N\}; \end{cases}$$

- μ *— мартингал относительно меры* $\mathsf{Q}^* \in \mathfrak{M}$.

2 Квантильное хеджирование европейского опциона на неполном рынке

Суперхеджирование позволяет гарантировать исполнение продавцом опциона обязательств по контракту с вероятностью 1. Однако, минимальная необходимая для этого стоимость контракта (верхняя цена хеджирования), как правило, слишком высока с практической точки зрения (подробнее см. [32, гл. 8]). Одной из альтернатив суперхеджированию является квантильное хеджирование, когда требуется исполнение продавцом обязательств по контракту с заданной вероятностью $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. Такой подход позволяет снизить стоимость опциона. Известно, что на неполном рынке существует соответствующая стратегия продавца опциона [32, § 8.1]. Оказалось, что результаты, полученные для минимаксной задачи (2) для случая европейского опциона, позволяют построить эту стратегию и вычислить соответствующую премию для европейского опциона следующим образом. Необходимо построить решения двух минимаксных задач: с исходным платежным обязательством f_N и с платежным обязательством вида $1_{\{A\}}$, где A — событие, которое будет определено ниже. Комбинация построенных решений (как она определена теоремой 9 ниже) дает решение задачи квантильного хеджирования. Всюду ниже обозначения, совпадающие с обозначениями предыдущего раздела, относятся к минимаксной задаче для исходного платежного обязательства, аналогичные обозначения с верхним индексом A — к задаче с платежным обязательством $1_{\{A\}}$, а с индексом α — к решению задачи квантильного хеджирования.

Результаты, приведенные в этом разделе, впервые были опубликованы в [55], [56].

Сначала формально определим, что мы будем понимать под решением задачи квантильного хеждирования. Пусть π — самофинансируемый портфель, а $\chi := \{\chi_t\}_{t\in N_1}$ — набор $\mathcal{F}_t$-измеримых случайных величин (не обязательно положительных). В этом случае пара (π,χ) представляет собой портфель, допускающий в каждый момент времени $t \in N_1$ как поступления, так и выбытия средств. Капитал такого портфеля определим равенствами $X_t^{(\pi,\chi)} := X_t^\pi - \chi_t$, $t \in N_1$, $X_0^{(\pi,\chi)} := X_0^\pi$.

Определение 3. *Решением задачи расчета европейского опциона с платежным обязательством f_N на неполном рынке без торговых издержек и ограничений с квантильным критерием уровня $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, назовем портфель (π^α,χ^α) и его начальный капитал $X_0^\alpha := X_0^{(\pi^\alpha,\chi^\alpha)}$ такие, что в момент времени N для любой меры $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}$ имеет место равенство $\mathsf{Q}\left(X_N^\alpha \geq f_N\right) \geq 1-\alpha$. Портфель (π^α,χ^α) назовем квантильным хеджирующим уровня $1-\alpha$, а множество $\{\omega\in\Omega : X_N^\alpha \geq f_N\}$ — множеством успешного хеджирования этого портфеля.*

Обозначим $\bar{A} := \left\{\omega \in \Omega : \bigcap\limits_{i=1}^{N}\bigcap\limits_{j=1}^{d}\left(S_i^{(j)} \geq \lambda_i^{(j)}\right)\right\}$, где $\lambda_i^{(j)}$ — некоторые константы, $A := \Omega \setminus \bar{A}$.

Теорема 9. *Пусть $\mathfrak{R}\cap\mathfrak{M} \neq \varnothing$ и для заданного $\alpha \in (0,1)$ найдутся $\lambda_i^{(j)} \in \mathbb{R}^+$, $j = \overline{1,d}$, $i \in N_1$, такие, что относительно любой меры $\mathsf{Q} \in \mathfrak{R}$ выполняются неравенства $\mathsf{Q}(\bar{A}) \geq 1-\alpha$. Тогда существует квантильный хеджирующий портфель уровня $1-\alpha$, который имеет вид $\gamma_t^\alpha = \gamma_t^* - \gamma_t^A \ln V_0$, $\beta_t^\alpha = \beta_t^* - \beta_t^A \ln V_0$ и $\chi_t^\alpha = C_t^* - C_t^A \ln V_0$, $t \in N_1$, а его начальный капитал $X_0^\alpha = \ln V_0\left(1-\ln V_0^A\right) > 0$.*

3 Байесовская модель облигации

В.М. Хаметов интересовался задачами не только теоретического, но и прикладного характера. Одна из таких задач — построение модели облигации, отвечающей одновременно следующим требованиям: 1) простота (для анализа и с вычислительной точки зрения), 2) высокая точность, 3) неотрицательность и убывание доходности по времени, 4) заданное значение цены в момент погашения, 5) простая калибровка.

Для решения этой проблемы им был предложен новый подход, суть которого состоит в построении случайного процесса, зависящего всего от одного параметра, с п.н. закрепленным правым концом. Для этого выбирается базовая случайная последовательность $\{S_t\}_{t\in N_0}$, $N_0 := \{0, ..., N\}$, где N — заданное натуральное число. Для этой последовательности вводится новое распределение вероятностей, соответствующее условному распределению исходной последовательности относительно сигма-алгебры $\sigma\{S_t, S_N\}$. Предложенный подход можно интерпретировать следующим образом: в каждый момент времени $t \in N_0$ наблюдателю доступна информация как о текущей стоимости облигации, так и о ее номинале. Условное распределение может быть вычислено с помощью формулы Байеса. Отсюда название "байесовская модель облигации".

Эта идея была воплощена в работах [57], [58] для расчета бескупонной облигации.

В качестве базы было выбрано несимметричное геометрическое случайное блуждание $S_t = S_{t-1}\lambda^{\delta_t}$, $S_0 > 0$, где $t \in \{1, ..., N\}$, $\lambda > 0$, $\{\delta_t\}_{1\le t\le N}$ — последовательность независимых в совокупности бернуллиевских случайных величин, принимающих значения 0 и 1. С помощью формулы Байеса было установлено следующее утверждение.

Теорема 10. *Для любых $t \in N_0$ и $t \le \tau \le N$ справедливо равенство $\mathsf{P}(S_\tau = x|S_0, ..., S_t, S_N) = \mathsf{P}(S_\tau = x|S_t, S_N)$ и имеет место представление*

$$\mathsf{P}(S_\tau = x|S_{\tau-1}, S_N) = \begin{cases} 0, \quad \text{если} \quad |\log_\lambda x - \log_\lambda S_{\tau-1}| > 1, \\ 1 - (\log_\lambda S_N - \log_\lambda S_{\tau-1})/(N-\tau+1), \ \text{если}\ x = S_{\tau-1}, \\ (\log_\lambda S_N - \log_\lambda S_{\tau-1})/(N-\tau+1), \ \text{если}\ x = \lambda S_{\tau-1}, \end{cases}$$

причем $\mathsf{P}(S_N = x|S_{N-1}, S_N) = 1_{\{S_N = x\}}$.

Этот результат позволил предложить следующую *модель эволюции стоимости бескупонной облигации с номиналом* $A > 0$: стоимость в момент времени t задается случайной величиной

$$S_t = S_{t-1}\lambda^{\delta_t}, t \in \{1, ..., N-1\}, \quad S_0 > 0, \quad S_N = A, \tag{7}$$

где $\{\delta_t\}_{1\le t\le N}$ независимы в совокупности и принимают значения 0 и 1 с вероятностями

$$\mathsf{P}(\delta_{t+1} = 1|S_t, S_N = A) := (\log_\lambda A - \log_\lambda S_t)/(N-t) = 1 - \mathsf{P}(\delta_{t+1} = 0|S_t, S_N = A). \tag{8}$$

Установлено, что для набора $\{B_t\}_{t\in N_0}$, заданного соотношениями $B_0 = 1$, $B_{t+1} := B_t\left[1 + (\lambda-1)(\log_\lambda S_N - \log_\lambda S_t)/(N-t)\right]$, имеют место равенства $\mathsf{E}(S_{t+1}B_{t+1}^{-1}|S_0, ..., S_t, S_N) = S_t B_t^{-1} = S_{t-1}B_{t-1}^{-1}\lambda^{\delta_t}/\left[1 + (\lambda-1)(\log_\lambda S_N - \log_\lambda S_t)/(N-t)\right]$, где $t \in \{1, ..., N-1\}$, что дает основание назвать набор $\{B_t\}_{t\in N_0}$ дисконтирующим для модели бескупонной облигации (7)–(8).

Для байесовской модели облигации (7)–(8) предложено следующее определение отсутствия арбитража: у неотрицательных случайных величин $\{g_t\}_{t\in N_0}$, где g_t есть функция от S_t и S_N, а $g_0 = 0$, имеется арбитражная возможность при наблюдениях S_t, S_N, если $\mathsf{P}(g_{t'} > 0|S_t, S_N) > 0$ п.н. для некоторого $t' \in N_0$. Установлено, что для дисконтированного набора $\{S_t B_t^{-1}\}_{t\in N_0}$ арбитражная возможность отсутствует.

В работе [57] вычислена волатильность последовательности $\{\ln S_t\}_{t\in N_0}$. Она равна $\ln\lambda$. Приведены формулы для доходности бескупонной облигации к погашению в момент времени t, форвардной и мгновенной форвардной процентной ставки.

Калибровка модели (7)–(8) сводится к выбору значения единственного параметра λ. Наблюдению доступен двухкомпонентный набор $\{(\hat S_t, \hat S_N)\}_{t\in N_0}$, а $\delta_t = 1_{\{\ln \hat S_t > \ln \hat S_{t-1}\}}$. Пусть $\hat p_N := \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{N}\delta_i$. Легко проверить, что в построенной модели $\ln(\hat S_N/\hat S_0) = (\ln\lambda)\sum\limits_{i=1}^{N}\delta_i = N\hat p_N(\ln\lambda)$. Отсюда получаем простую формулу для оценки параметра модели $\hat\lambda := (\hat S_N/\hat S_0)^{1/(N\hat p_N)}$.

В статье [57] подробно описаны и обоснованы алгоритмы имитационного моделирования и прогноза стоимости бескупонной облигации, а также приведен пример применения описанных алгоритмов к реальным данным, демонстрирующий хорошую точность прогноза. Эти результаты позволяют использовать байесовскую модель бескупонной облигации на практике. Приведем краткое описание этих алгоритмов.

Алгоритм имитационного моделирования стоимости бескупонной облигации. Пусть: 1) на основе наблюдений вычислено $\hat\lambda$ по приведенной выше формуле; 2) для любого $t \in \{1, ..., N\}$ по наблюдениям $\{(\hat S_t, \hat S_N)\}_{t\in N_0}$ вычислена условная вероятность $\mathsf{P}(\delta_{t+1} = 1|\hat S_t, \hat S_N) = [\ln \hat S_N - \ln \hat S_t]/[(N-t)\ln\hat\lambda]$; 3) $\hat S_0 = a$, $\hat S_N = A$, $0 < a < A$. Тогда процедура имитационного моделирования для модели бескупонной облигации (7)–(8) состоит в следующем:

Шаг 0. Генерируем равномерно распределенную на отрезке $[0, 1]$ случайную величину ξ_1.

Шаг 1. Вычисляем $\ln S_1 = \ln a + (\ln\hat\lambda)1_{\{\xi_1 \le [\ln A - \ln a]/[N\ln\hat\lambda]\}}$.

Шаг i ($i > 1$). Генерируем равномерно распределенную на отрезке $[0, 1]$ случайную величину ξ_i, не зависящую от $\{\xi_j\}_{1\le j\le i-1}$, и вычисляем $\ln S_i = \ln S_{i-1} + (\ln\hat\lambda)1_{\{\xi_i \le [\ln A - \ln \hat S_{i-1}]/[(N-i+1)\ln\hat\lambda]\}}$. Последнее рекуррентное соотношение является другой формой описания модели бескупонной облигации, удобной для применения метода Монте-Карло.

Оптимальный в среднеквадратичном смысле прогноз стоимости бескупонной облигации $S_{t|t_0}$ для модели (7)–(8) задается равенствами $\ln S_{t+1|t_0} := \ln S_{t|t_0} + (\ln\hat\lambda)1_{\{\xi_{t+1} \le [\ln A - \ln \hat S_{t|t_0}]/[N-t]\}}$, $\ln S_{t_0|t_0} = \ln \hat S_{t_0}$, где $0 \le t_0 \le t \le N$, $\hat S_{t_0}$ — заданная начальная рыночная стоимость облигации в момент времени t_0.

Заключение

Преподавание и наука занимали для Владимира Минировича одно из важнейших мест в жизни. Его отличал живой интерес ко многим областям математики и ее приложений. Одно из таких направлений, которому он посвятил много времени в последние двадцать лет, — финансовая математика в части проблем ценообразования различных финансовых инструментов. Его вклад в эту область знаний мы постарались осветить в этой статье. У Владимира Минировича всегда было много идей и планов работы на будущее, он смотрел на каждый полученный результат с точки зрения дальнейших перспектив его развития и синтеза с другими результатами. Уверены, что его идеи и результаты послужат хорошей основой для дальнейших исследований в этой области.

Владимир Минирович навсегда останется в памяти его коллег и учеников.

Воспоминания о В. М. Хаметове коллег и учеников

Белкина Татьяна Андреевна (к.ф.-м.н., доцент; руководитель лаборатории, ведущий научный сотрудник ЦЭМИ РАН). Образ Владимира Минировича Хаметова для меня неразрывно связан с именем моего родного вуза — МИЭМ. Того МИЭМ, каким он был на Большом Вузовском, и в котором мне посчастливилось учиться на факультете прикладной математики, потом в аспирантуре, а по окончании ее — работать на экономико-математическом факультете в течение почти 20 лет. И, несмотря на то, что Владимир Минирович никогда не был ни моим преподавателем, ни научным руководителем, он оказался тем человеком, общение с которым стало очень ценным для меня. И происходило оно на протяжении всех этих долгих лет — сначала в МИЭМ, а потом и в нашей лаборатории стохастической оптимизации и теории риска в ЦЭМИ, куда со временем он пришел работать, возглавив новое для нас направление финансовой математики и приведя с собой своих учеников. Собственно, он был первым человеком, кто заговорил однажды со мной как с коллегой, хотя я училась еще тогда на старших курсах, но уже начала писать свои первые научные работы. Широта научных интересов Владимира Минировача была известна всем, при этом он не обходил вниманием и работы начинающих исследователей — таких, каким была и я.

Имя Владимира Минировича Хаметова я впервые услышала, наверное, в конце третьего курса от Владимира Ильича Ротаря, который произвел тогда на нас сильное впечатление своими лекциями по теории вероятностей и позже стал моим научным руководителем. Мнение Ротаря для меня было очень важным, а тогда он сказал, что на кафедре исследования операций есть такой преподаватель, Владимир Минирович Хаметов, очень способный и умный человек, отличный специалист по случайным процессам, и что он будет очень хорошим научным руководителем (в частности, для моей подруги — ей сначала почему-то отказывали в распределении на кафедру теории вероятностей). Впоследствии я полностью убедилась в словах своего учителя — научная эрудиция Владимира Минировича, и не только в области случайных процессов, всегда меня удивляла, с ним можно было обсуждать задачи из разных областей, даже, на первый взгляд, далеких от его научных интересов, потому что и там он обладал широкими познаниями. И при этом всегда в его образе для меня оставалась какая-то загадка ...

Теперь, когда не стало ни того МИЭМ, каким он был во времена моей учебы и работы там, ни Владимира Минировича Хаметова, в памяти как наиболее ценное вспоминаются неповторимая вдохновляющая атмосфера МИЭМ, ее прекрасные преподаватели и влюбленные в свой институт студенты. А лично для меня — это и неизменное доброе участие и дружеская поддержка Владимира Минировича на протяжении долгих лет, его постоянная готовность с радостью помочь при решении разнообразных вопросов и проблем. И все это навсегда останется со мной.

Богомолов Ростислав Олегович (младший научный сотрудник ЦЭМИ РАН). Мое знакомство с Владимиром Минировичем Хаметовым состоялось в период моего обучения в МИЭМ, когда он преподавал у нас на старших курсах финансовую математику. Данный предмет сильно отличался от других, как и сама манера преподавания Владимира Минировича, что сразу было отмечено студентами. Его образ мышления и широкие познания в области математики производили сильное впечатление и вызывали глубокое уважение. Он был целеустремленным и всегда ставил амбициозные задачи, решения которых виделись ему заранее. Когда я был его аспирантом, он постоянно удивлял широтой своих знаний, кругозором, способностью видеть суть задачи. Владимир Минирович всегда видел перспективы развития любой задачи и всегда четко и продуманно следовал заранее сформированному им плану. Он понимал, каким должен быть результат и всегда знал способы его достижения. Арсенал накопленных знаний и опыта позволял ему делать неожиданные, но эффективные ходы, которые в итоге приводили к успеху. Как научный руководитель он всегда поддерживал своих учеников, делился своими знаниями и очень хотел, чтобы они послужили его ученикам. В то же время он был готов поддержать и дать совет в любой жизненной ситуации. В этом он также обладал обширными знаниями. Владимир Минирович имел широкий круг общения и всегда вызывал уважение у коллег и друзей.

Гущин Александр Александрович (д.ф.-м.н.; ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова; профессор МГУ; профессор НИУ ВШЭ).

... память моя однобока (В. С. Высоцкий, "Баллада о детстве")

Для меня Володя всегда будет ассоциироваться с семинаром под руководством Н. В. Крылова и А. Н. Ширяева в Стекловке. Память моя не удержала его выступления на этом семинаре. Я даже не помню, кто выступал, когда я пришел на него в первый раз. Это было 3 ноября 1976 года. Накануне Альберт Николаевич Ширяев согласился быть моим научным руководителем, так же как и у двоих моих однокурсников. У меня сохранилась рукописная запись доклада на том первом для меня семинаре, но по ней можно установить только, что доклад делал, скорее всего, Ю. М. Кабанов, или, может быть, Р. Ш. Липцер. Я не понял из доклада ничего, но слова "мартингал" и "компенсатор" так очаровали меня, что стали моими спутниками на протяжении 47 лет и останутся до конца. Думаю, что такой же шок испытали многие, впервые попав на семинар, где царили атмосфера высокой науки и демократический стиль общения.

Состав участников семинара со временем, конечно, менялся. Но Володя Хаметов был одним из постоянных участников. Мы с ним были какое-то время на "Вы", потом перешли на "ты", всегда обращались друг к другу по имени. Его отчество я узнал только, когда, годы спустя, я был секретарем этого семинара и составлял списки участников для прохода в здание МИАН. Несмотря на то, что Володя был меня заметно старше, он проявлял ко мне очень уважительное отношение. Вспоминаю, как на конференции в Бакуриани в 1985 году Володя выразил восхищение по поводу того, что я успеваю, серьезно занимаясь наукой, еще и участвовать в развлечениях.

В январе 2001 года мы встретились в курилке в МИЭМе, где я делал доклад на семинаре В. Б. Колмановского и А. Д. Мышкиса. В тот момент я занимался стохастическими дифференциальными уравнениями с запаздыванием совместно с Уве Кюхлером.

Думаю, что моя вовлеченность в эту тематику послужила причиной для приглашения меня в качестве оппонента на докторскую диссертацию Хаметова. Должен сказать, что читать диссертацию было нелегко. То же можно сказать и о многих его работах. В любом случае, его работы отличала сильная математическая составляющая и оригинальный стиль мышления. Наградой за мой труд по изучению диссертации была случайно услышанная мной фраза Володи о моем выступлении на его защите о том, что я объяснил суть его работы, так что он, наконец, понял, чем он занимается.

Позднее мы неоднократно встречались на семинарах в ЦЭМИ, а также в НИУ ВШЭ на факультете экономических наук. Нас объединяло общее поле деятельности, а именно, финансовая математика. Нас даже интересовали общие задачи, но мы подходили к их постановке и решению с разных сторон. Последний раз мы с ним виделись онлайн на защите докторской диссертации С. Н. Смирнова летом 2023 года, где мы оба были оппонентами. Володино выступление было достаточно коротким, но в нем были четко сформулированы причины, по которым диссертацию следовало поддержать. Я слышал о его болезни до этого, но не мог представить, что вижу его в последний раз ...

Зверев Олег Владимирович (к.ф.-м.н.; старший научный сотрудник ЦЭМИ РАН). Мое знакомство с Владимиром Минировичем произошло в МИЭМе, когда нам, студентам пятого курса, он читал лекции по оптимальному стохастическому управлению. Уже позже, в аспирантуре я начал работать под его руководством, что открыло передо мной поистине бескрайние просторы математики, о которых я, будучи студентом, и не подозревал. Только спустя время можешь оценить, сколько сил он терпеливо вкладывал в каждого из нас, тогда еще зеленых аспирантов. Не уставал восхищаться его кругозором и уровнем компетенции в области проводимых им исследований. Хочу отметить одно из многих достоинств Владимира Минировича — его отзывчивость и готовность всегда помочь, несмотря на загруженность работой. Часто от него приходилось слышать фразу: "Все решим!", что рождало уверенность в преодолении любых препятствий. Мне повезло найти в лице научного руководителя наставника, который помог сформироваться мне как личности и эксперту. Благодарен судьбе за возможность работать бок о бок с таким человеком как Владимир Минирович.

Каштанов Виктор Алексеевич (д.ф.-м.н., профессор; профессор–исследователь МИЭМ НИУ ВШЭ; декан факультета прикладной математики МИЭМ (1979–2011) и заведующий кафедрой "Исследование операций" МИЭМ (1981–2012)). С Владимиром Минировичем Хаметовым я познакомился в конце семидесятых годов, когда он был принят на работу на кафедру Прикладной математики в должности научного сотрудника. В 1981 году, когда была организована кафедра "Исследование операций" и были выделены преподавательские ставки, я предложил Владимиру Минировичу перейти на новую кафедру на должность старшего преподавателя. К этому моменту Владимир Минирович уже имел степень кандидата физико-математических наук и продемонстрировал свою высокую квалификацию математика. Я рад, что не ошибся в этой оценке. Владимир Минирович за короткое время очень хорошо проявил себя как преподаватель, подготовил и прочитал ряд основных и специальных курсов, в частности, потоковый годовой курс "Теория случайных процессов и теория массового обслуживания". По его инициативе было написано в 1990 году учебное пособие "Исследование операций", подбор материала, редактирование, оформление и другие "проблемы" — все это выполнено и преодолено В. М. Хаметовым и целиком является его заслугой.

Должен сказать, что Владимир Минирович во многом сделал себя сам. Его целе-

Должен сказать, что Владимир Минирович во многом сделал себя сам. Его целеустремленность, колоссальный труд, направленный на решение поставленных задач, заслуживают большого уважения. Я был несколько неожиданно удивлен, узнав, что он готовит докторскую диссертацию. Он не просил творческий отпуск для подготовки диссертации, кафедра не выделяла ему научного консультанта (сейчас не помню, возможно, научным консультантом был Виктор Павлович Маслов). Кафедра пошла навстречу, частично освободив его от преподавательской нагрузки. Остальное все — подготовка и успешная защита докторской диссертации — несомненно жизненный успех В. М. Хаметова. Этот успех разделил и коллектив кафедры, именно по кафедре "Исследование операций" Владимиру Мировичу было присвоено ученое звание доцента, а чуть позже — ученое звание профессора.

Хочу обратить внимание на смелое решение Владимира Минировича заняться математическими проблемами финансовой математики. Здесь ему пришлось доказывать свою квалификацию и компетенции ученикам Альберта Николаевича Ширяева, школа которого хорошо известна. На этом поприще Владимиру Минировичу также сопутствовал успех, о чем свидетельствует перечень научных работ и армия молодых учеников, которых он воспитывал как родных детей и которые, я надеюсь, с успехом продолжат дело своего Учителя.

Лось Алексей Борисович (к.т.н., доцент; заведующий кафедрой, доцент МИЭМ НИУ ВШЭ). Владимир Минирович с 2010 года работал в должности профессора на кафедре Компьютерной безопасности МИЭМ. Кафедра имеет специализацию "Математические методы защиты информации", и он нашел там для себя много интересных задач. С его приходом на кафедру уровень научных работ существенно возрос. Но Владимир Минирович был не только ученым, но и талантливым педагогом. Он руководил аспирантами и дипломными работами, с успехом читал студентам курсы по функциональному анализу и теории случайных процессов, посвящал много времени дополнительным занятиям со студентами, испытывавшими трудности с освоением математических дисциплин. Владимира Минировича до последних дней отличала высокая степень ответственности за свой участок работы. Даже тяжело больным он принимал участие в заседаниях кафедры, научном семинаре, работе экзаменационных комиссий и защите дипломных работ.

Паламарчук Екатерина Сергеевна (к.ф.-м.н.; ведущий научный сотрудник ЦЭМИ РАН; старший научный сотрудник НИУ ВШЭ). Я была наслышана о В. М. Хаметове как о специалисте с кафедры "Исследование операций" еще во время моей учебы на экономико-математическом факультете МИЭМ, но непосредственное знакомство с ним произошло на научном семинаре "Вероятностные проблемы управления и стохастические модели в экономике, финансах и страховании" в ЦЭМИ РАН. Этот семинар известен обширной тематикой представляемых докладов, и В.М. Хаметов был его активным участником. Вспоминаю, как при одном из первых посещений сразу обратил на себя внимание человек, задающий четкие вопросы по ходу заседания. Это был Владимир Минирович, который также имел обыкновение присутствовать и на последующей дискуссии в комнате 801. Стремление к четкости, ясность изложения, нацеленность на результат и внимание к ученикам, на мой взгляд, в достаточно полной мере характеризуют В.М. Хаметова как исследователя и профессионала высочайшего уровня. В общении он был исключительно галантным человеком, а также большим ценителем хорошего кофе. Светлая память В. М. Хаметову!

Пиуновский Алексей Борисович (д.ф.-м.н.; reader in University of Liverpool). В 1976–77 годах, только что окончив МИЭМ по специальности "Автоматика и телемеханика" и учась на вечернем отделении ФПМ МИЭМа, я заинтересовался теорией оптимального управления, динамическим программированием, случайными процессами и пр. Но поскольку я работал инженером на кафедре автоматики и телемеханики, то хороших специалистов в этих областях рядом не было, и я стал искать каких-то единомышленников на других кафедрах. Так я и познакомился с Владимиром Минировичем. Он с готовностью откликнулся, проводил много времени в беседах, указал книги и статьи, которые нужно изучить (Юшкевича, Варайи, Дермана, Блекуэлла и др.). Потом, в 1970–80 годы мы совместно опубликовали ряд статей по марковским процессам принятия решений и учебное пособие. Формально в аспирантуре МИЭМ у меня были другие руководители, но Владимир Минирович был, по существу, моим основным руководителем. Благодаря ему я стал участником научных семинаров в Математическом институте им. В. А. Стеклова (руководители — А. Н. Ширяев, Н. В. Крылов), в ЦЭМИ (руководитель — В. И. Аркин), выступал на конференциях, лично познакомился с Е. А. Файнбергом, А. А. Юшкевичем, И. М. Сониным, Э. Л. Пресманом и другими известными специалистами. Такая помощь в начале карьеры совершенно неоценима, и я очень благодарен за это В. М. Хаметову.

Ротарь Владимир Ильич (д.ф.-м.н., профессор; professor in University of California at San Diego; главный научный сотрудник ЦЭМИ РАН). Мы дружили с Владимиром Минировичем, много говорили о разных вещах. Он был очень открыт и дружествен. Я помню, как в один из моих приездов мне надо было поехать на дачу с одним неприятным делом, и он сам предложил поехать со мной "на всякий случай". Я был тронут. Он был отличный специалист и очень хороший человек.

Сластников Александр Дмитриевич (к.ф.-м.н.; ведущий научный сотрудник ЦЭМИ РАН). С Владимиром Минировичем мы были знакомы достаточно давно, но более тесное общение у нас началось в начале 2000-х годов. Мой сын Сергей тогда оканчивал школу, и возник естественный вопрос: куда идти дальше? У него были склонности к математическим наукам, но не настолько ярко выраженные, чтобы поступать, например, на мехмат МГУ. И Владимир Минирович обратил наше внимание на МИЭМ, тогда еще живший своей, самостоятельной жизнью. При этом он посоветовал сначала поступить в вечернюю физико-математическую школу при МИЭМ. И не только посоветовал, ведь в эту школу надо было еще сдавать экзамен, но и раздобыл варианты заданий прошлых лет, на которых Сергей и тренировался целый месяц. А когда сын уже оканчивал МИЭМ, Владимир Минирович звал Сергея к себе в аспирантуру, но он выбрал несколько другое направление и другого руководителя. Учеба сына в аспирантуре пришлась на время, когда МИЭМ вошел в состав ВШЭ и существовавшие в нем диссертационные советы, на которые все ориентировались, поступая в аспирантуру, были закрыты на переформирование. Когда диссертация была готова, и надо было с ней определяться, Владимир Минирович участвовал в поисках места возможной защиты и оппонентов, хотя Сергей совсем не был его учеником. Несколько раз он устраивал Сергею "генеральные репетиции" защиты, стремясь довести его доклад до совершенства; сам выступал на его защите. Пересекаясь потом с Сергеем в ВШЭ, Владимир Минирович непременно интересовался его успехами и делами. Характерным для Владимира Минировича было желание помочь человеку в его работе, при этом он не просто помогал, но и чувствовал свою внутреннюю ответственность перед ним. Он был требовательным к научной деятельности себя самого и своих учеников, стремился максимально совершенствовать ее и в публикациях, и в выступлениях. Возможно, не будь этого, Владимир Минирович оставил бы после себя намного больше учеников и работ, но жизнь, к сожалению, распорядилась иначе. Светлая ему память.

Шелемех Елена Александровна (к.ф.-м.н.; научный сотрудник ЦЭМИ РАН). Впервые я увидела Владимира Минировича на его лекциях в МИЭМ, будучи студенткой экономико-математического факультета. Тогда студенты шутили, что одна его лекция вмещает целый курс, настолько насыщенными они были. Позже я поступила к Владимиру Минировичу в аспирантуру МИЭМ, факультет прикладной математики, и он рассказал мне о своем новом подходе к решению задачи расчета американского опциона на неполном рынке. Он всегда был в поиске способов решения возникающих задач и возможностей применения и расширения достигнутых результатов. Каждый разговор с ним обязательно содержал обсуждение его новых идей и планов. Так было и в последний наш разговор. Говоря о нерешенной проблеме, Владимир Минирович говорил: "Мы это победим!". Мне кажется, эта фраза во многом характеризовала и его отношение к жизни. Еще одной важной чертой Владимира Минировича была готовность всем помочь, даже отложив собственные дела и планы. Он всегда был очень занят, часто даже перегружен. Но, кажется, иначе и быть не могло. Знакомство с Владимиром Минировичем дало мне очень многое: введение в профессию, новые знания и умения, уверенность в поддержке, заряд бодрости и веры в себя. Когда я думаю о Владимире Минировиче, всегда представляю его деятельным, вдохновленным новыми идеями и планами. Для меня он всегда будет именно таким.

Смирнов Сергей Николаевич (д.ф.-м.н.; доцент ВМК МГУ; с 2004 г. по 2014 г. — заведующий кафедрой управления рисками и страхования факультета экономики ГУ-ВШЭ (с 2010 г. НИУ ВШЭ)) Не могу точно вспомнить, когда мы познакомились с Владимиром Минировичем. Могу только сказать, что до того, как мы впервые встретились, был уже знаком с его работами. У нас было близкое видение задачи хеджирования обусловленного обязательства по проданному опциону. Владимир Минирович — один из первых математиков, кто увидел теоретико-игровую природу этой задачи. Даже название его статьи (вместе с Чаловым) 2004 года "Европейский опцион — это антагонистическая игра" непосредственно об этом свидетельствует.

Более близко довелось общаться с Владимиром Минировичем уже по работе, в Высшей школе экономики. С 2004 года мне пришлось возглавить кафедру управления рисками и страхования, и вместе с Алексеем Геннадьевичем Шоломицким мы создали магистерскую программу "Управление рисками и актуарные методы". Поскольку мы использовали международные стандарты сертификации как финансовых риск-менеджеров, так и актуариев, получилась программа, опередившая лет на десять аналоги зарубежных коллег. Мы использовали то, что у этих сертификаций было большое пересечение — финансовая теория и, разумеется, математика. В результате наши выпускники получали уникальное на тот период времени образование, позволявшее им работать как риск-менеджерами, так и актуариями (и некоторым это пригодилось). Для качественного прочтения задуманных курсов были привлечены лучшие специалисты в нашей стране, и одним из них оказался Владимир Минирович, в это время уже активно работающий в области финансовой математики. Вряд ли можно было найти лучшую кандидатуру. Студентам нравились его лекции, не только благодаря его высокой квалификации, но и поскольку он сумел их расположить к себе чисто человеческими качествами. Он был непоколебимым оптимистом и всех заражал уверенностью в завтрашнем дне и в собственных силах.

На кафедре мы время от времени устраивали чаепития по каким-либо приятным поводам, таким, например, как дни рождения. Владимир Минирович неизменно участвовал в таких мероприятиях, всегда умел и пошутить, и найти доброе слово. Душой кафедры была секретарь — Ольга Борисовна Седова. Она вспоминает о беседах с Владимиром Минировичем — они говорили об истории, в которой он хорошо разбирался, рассказывали друг другу, что знали. Например, о Пушкине, как он танцевал на балах в знаменитом доме на Покровке 22, который называется "Трубецкие-комод", или просто комод (именно там произошла помолвка М. Н. Волконской и Н. И. Толстова, а в их браке родился Лев Николаевич Толстой). С Владимиром Минировичем было интересно — он запомнился как яркая личность, с широким кругом интересов и познаний. Пользуясь тем, что у Ольги Борисовны дар божий слагать стихи, попросил ее что-нибудь написать для этой статьи.

Седова Ольга Борисовна

Беседы о разном.

Начитан, тактичен, а круг интересов
Выходит за рамки финансовых рисков.
Мы с ним обсуждали Паскевич — повеса?
Герой в ратном деле иль в строчке из списков?

Апраксин, Волконский и дом на Покровке,
Сегодня известный как замок–комод.
От ВЫШки всего в одной остановке,
А раньше — балов и интриг хоровод.

Всего не расскажешь, да и не надо.
Меж строчек для лекций и семинаров
Живут разговоры о вечном. Досада,
Так рано настала пора мемуаров ...

Памяти Владимира Минировича Хаметова.

Как хорошо, что в жизни есть начало!
Конца, как такового, в жизни нет.
Есть в ней этапы, пункты, перевалы,
Есть время радости, печали и побед!

Есть все, чем дорожим и что весомо:
Наставничество, Помощь, Доброта,
Улыбка, Понимание и Слово,
Поддержка, что в учении нужна.

Все это Вы! Печалью голос рвется ...
Прощаться трудно, тяжело всегда,
Но счастье то, что с нами остаются
Ваш оптимизм, поступки и дела.

Список литературы

1. *Кульман Н. К., Хаметов В. М.* Оптимальная фильтрация в случае косвенного наблюдения диффузионного процесса с запаздывающим аргументом // Проблемы передачи информации, 1978, **14** (3), 55–64. https://www.mathnet.ru/rus/ppi1546

2. *Кульман Н. К., Хаметов В. М.* Уравнения нелинейной фильтрации семимартингала // Изв. вузов. Матем., 1979, 11, 80–84. https://www.mathnet.ru/rus/ivm5681

3. *Хаметов В. М., Яшин А. И.* Об эффективном решении задачи интерполяции по наблюдениям скачкообразных процессов // Проблемы передачи информации, 1983, **19** (2), 38–51. https://www.mathnet.ru/rus/ppi1175

4. *Хаметов В. М.* Некоторые вопросы нелинейной фильтрации случайных процессов. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, МИЭМ, Москва, 1979, 153 стр.

5. *Кульман Н. К., Хаметов В.М.* Нелинейная фильтрация случайных процессов // МИЭМ, Москва, 1982, 80 стр.

6. *Хаметов В.М., Яшин А.И.* Скачкообразные случайные процессы // МИЭМ, Москва, 1984, 80 стр.

7. *Хаметов В. М.* О существовании и единственности решения уравнения нелинейной фильтрации скачкообразных процессов // Изв. вузов. Матем., 1987, 2, 78–82. https://www.mathnet.ru/rus/ivm7691

8. *Хаметов В. М.* Фильтрация, интерполяция, экстраполяция марковских цепей с непрерывным параметром // Автоматика и телемеханика, 1986, 8, 34–46. https://www.mathnet.ru/rus/at6407

9. *Хаметов В.М., Пиуновский А.Б.* Оптимальное управление скачкообразными случайными процессами // МИЭМ, Москва, 1984, 80 стр.

10. *Khametov V. M., Piynovskiy A. B.* New effective solution of optimality's equations // Problems of Control and Information Theory, 1985, **14** (4), 303–318.

11. *Aliseenko O. V., Piynovskiy A. B., Khametov V. M.* The optimal Control of stochastic sequences with delay // Problems of Control and Information Theory, 1986, **15** (1).

12. *Хаметов В. М.* Оптимальное управление с запаздыванием скачкообразными случайными процессами // Автоматика и телемеханика, 1990, 2, 75–86. https://www.mathnet.ru/rus/at5302

13. *Пиуновский А. Б., Хаметов В. М.* Новые точно решаемые примеры для управляемых цепей Маркова // Кибернетика, 1991, **3** (3), 82–90.

14. *Пиуновский А. Б., Хаметов В. М.* Оптимальное управление случайными последовательностями при ограничениях // Математические заметки, 1991, **49** (6), 143–145. https://www.mathnet.ru/rus/mzm2994, https://doi.org/10.1007/BF01156595

15. *Хаметов В. М.* Оптимальные стратегии управляемых в слабом смысле стохастических систем с полной информацией. Диссертация на соискание ученой степени д.ф.-м.н, Москва, 2001.

16. *Сиверцев О. Н., Хаметов В. М.* Задача восстановления функций // ОППМ, 2006, **13** (2), 354–356.

17. *Булгаков С. А., Хаметов В. М.* Восстановление квадратично интегрируемой функции по наблюдениям с Гауссовскими ошибками // Управление большими системами, 2015, **54**, 45–65. https://www.mathnet.ru/rus/ubs798

18. *Булгаков С. А., Хаметов В. М.* Оптимальное восстановление квадратично интегрируемой функции по наблюдениям за ней с гауссовскими ошибками // Автоматика и телемеханика, 2023, 2, 122–149. https://doi.org/10.31857/S0005231023020071

19. *Булгаков С. А., Горшкова В. М., Хаметов В. М.* Стохастическое восстановление квадратично интегрируемых функций // Вестник Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана. Серия Естественные науки, 2020, 6, 4–22. https://doi.org/10.18698/1812-3368-2020-6-4-22

20. *Булгаков С. А., Хаметов В. М.* Моделирование оптимального и ε-оптимального алгоритмов восстановления квадратично интегрируемой функции по наблюдениям с гауссовскими ошибками // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2020, **20** (1), 57–69.

21. *Зверев О. В., Хаметов В. М.* Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (дискретное время) // ОППМ, 2011, **18** (1), 26–54.

22. *Зверев О. В., Хаметов В. М.* Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках (дискретное время). II // ОППМ, 2011, **18** (2), 193–204.

23. *Хаметов В. М., Шелемех Е. А.* Суперхеджирование американских опционов на неполном рынке с дискретным временем и конечным горизонтом // Автоматика и телемеханика, 2015, 9, 125–149. https://www.mathnet.ru/rus/at14286, https://doi.org/10.1134/S0005117915090088

24. *Хаметов В. М., Шелемех Е. А.* Экстремальные меры и хеджирование американских опционов // Автоматика и телемеханика, 2016, 6, 121–144. https://www.mathnet.ru/rus/at14489, https://doi.org/10.1134/S0005117916060084

25. *Шелемех Е.А.* Расчет экзотических опционов на неполных рынках // Экономика и математические методы, 2017, **53** (3), 78–92. https://emm.jes.su/s042473880000540-3-1-ru-5/

26. *Каштанов В.А., Хаметов В.М.* Исследование операций // МИЭМ, Москва, 1990, 125 стр.

27. *Бояринцева Н. С.* Представления мартингалов и их применение к расчету опционов европейского типа. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 2005.

28. *Чалов Д. М.* Хеджирование финансовых обязательств на неполных рынках. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 2006.

29. *Сиверцев О. Н.* Алгоритм восстановления функций. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 2007.

30. *Зверев О. В.* Минимаксное хеджирование европейского опциона на неполном рынке. Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 2018.

31. *Шелемех Е. А.* Минимаксный метод расчета экзотических и американских опционов на неполном рынке с конечным горизонтом (дискретное время). Диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук, 2021.

32. *Фельмер Г., Шид А.* Введение в стохастические финансы. Дискретное время //МЦНМО, Москва, 2008, 496 стр.

33. *Föllmer H., Kabanov Y.* Optional decomposition and Lagrange multipliers // Finance and Stochastics, 1997, **2** (1), 69–81. https://doi.org/10.1007/s007800050033

34. *Хаметов В. М., Чалов Д. М.* Опциональное разложение локальных полумартингалов // ОППМ, 2002, **9** (3).

35. *Хаметов В. М., Чалов Д. М.* S-опциональное разложение (дискретное время) // Международная конференция "Колмогоров и современная математика", тезисы докладов, Москва, 2003, 660–661.

36. *Бояринцева Н. С., Хаметов В. М.* Новая теорема о представлении мартингалов. (Дискретное время) // Математические заметки, 2004, **75** (1), 40–54. https://doi.org/10.4213/mzm5

37. *Хаметов В. М., Чалов Д. М.* Европейский опцион — это антагонистическая игра // ОППМ, 2004, **11** (2), 264–265.

38. *Зверев О. В., Хаметов В. М., Шелемех Е. А.* Математическая модель ценообразования для европейскго опциона на неполном рынке без транзакционных издержек (дискретное время). Часть II. // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2020, **20** (2), 05–22. https://nano-journal.ru/20_2_Zverev.html

39. *Хаметов В. М., Чалов Д. М.* Критерий мартингальности мер // ОППМ, 2004, **11** (4), 953–955.

40. *Зверев О. В., Хаметов В. М.* Об условиях справедливости опционального разложения // ОППМ, 2009, **16** (6), 1067–1068.

41. *Шелемех Е.А.* Примеры суперхеджирования опционов на максимум цены рискового актива на неполном 1,S-рынке // Материалы научно-практической конференции "Молодая экономика: экономическая наука глазами молодых ученых", 7 декабря 2016 г., ЦЭМИ РАН, Москва, 2016, 40–42.

42. *Хаметов В.М., Шелемех Е.А.* О единственности опционального разложения полумартингалов // Математические заметки, 2019, **105** (3), 476–480. https://doi.org/10.4213/mzm12106

43. *Хаметов В.М., Шелемех Е.А.* О единственности суперхеджирующего портфеля // Вестник ЦЭМИ РАН, 2018, **1** (3). https://cemi.jes.su/s111111110000130-6-1/

44. *Хаметов В.М., Шелемех Е.А.* Верхняя и нижняя границы оптимальной остановки // Вестник ЦЭМИ РАН, 2018, **1** (2). https://cemi.jes.su/s111111110000129-4-1/

45. *Хаметов В. М., Шелемех Е. А.* Верхняя и нижняя границы оптимальной остановки случайной последовательности (конечный горизонт) // Автоматика и телемеханика, 2019, 3, 152–172. https://doi.org/10.1134/S0005231019030103

46. *Зверев О. В., Хаметов В. М., Шелемех Е. А.* Оптимальное правило остановки геометрического случайного блуждания со степенной функцией выигрыша // Автоматика и телемеханика, 2020, 7, 34–55. https://doi.org/10.31857/S000523102007003X

47. *Нестеренко А. А., Хаметов В. М.* Оптимальная остановка случайного блуждания с экспоненциальной функцией полезности // Труды Карельского научного центра Российской академии наук, 2021, 6, 49–58. http://dx.doi.org/10.17076/mat1295

48. *Хаметов В. М., Шелемех Е. А., Ясонов Е. В.* Алгоритм решения задачи об оптимальной остановке с конечным горизонтом // Управление большими системами, 2014, **52**, 6–22. https://www.mathnet.ru/rus/ubs784

49. *Нестеренко А. А., Хаметов В. М., Шелемех Е. А.* Об условиях существования экстремальных вероятностных мер на польских пространствах и некоторые их свойства // Математические заметки, 2021, **109** (3), 470–474. https://doi.org/10.4213/mzm12816

50. *Зверев О. В., Хаметов В. М., Шелемех Е. А.* Математическая модель ценообразования для европейского опциона на неполном рынке без транзакционных издержек (дискретное время). Часть I. // Наноструктуры. Математическая физика и моделирование, 2020, **20** (1), 5–45. https://nano-journal.ru/20_1_Zverev.html

51. *Biagini S., Frittelli M.* A unified framework for utility maximization problems: an Orlicz space approach // Annals of Applied Probability, 2008, **18** (3), 929–966. https://doi.org/10.1214/07-AAP469

52. *Rokhlin D. B.* Equivalent supermartingale densities and measures in discrete time infinite horizon market models // Theory Probab. Appl., **53** (4), 626–647. https://doi.org/10.1137/S0040585X97983869

53. *Васильев Г. А., Хаметов В. М., Шелемех Е. А.* Об условиях дискретности экстремальных вероятностных мер (конечномерный случай) // Математические заметки, 2013, **94** (6), 944–948. https://doi.org/10.4213/mzm10368

54. *Зверев О. В., Хаметов В. М.* Минимаксное хеджирование опционов европейского типа на компактном (1,S)-рынке // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2011, **18** (1), 121–122.

55. *Зверев О. В., Хаметов В. М.* Квантильное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках без трения. Ч. 1. Суперхеджирование // Проблемы управления, 2014, 6, 31–44. https://www.mathnet.ru/rus/pu887

56. *Зверев О. В., Хаметов В. М.* Квантильное хеджирование опционов европейского типа на неполных рынках без трения. Ч. II. Минимаксное хеджирование // Проблемы управления, 2015, 1, 47–52. https://www.mathnet.ru/rus/pu898

57. *Богомолов Р. О., Хаметов В. М.* Биномиальная байесовская модель бескупонной облигации // Прикладная эконометрика, 2016, **42**, 100–120. http://pe.cemi.rssi.ru/pe_2016_42_100-120.pdf

58. *Богомолов Р.О.* Об одном методе прогнозирования стоимости бескупонной облигации// Молодая экономика: экономическая наука глазами молодых ученых. Материалы научно-практической конференции, ЦЭМИ РАН, Москва, 2015, 28–30.

IN MEMORIAM OF V. M. KHAMETOV: ON HIS CAREER, KEY RESULTS IN FINANCIAL MATHEMATICS AND MEMORIES OF COLLEAGUES

Bogomolov R.O., Zverev O.V., Shelemekh E.A.

Bogomolov R.O., rostik@cemi.rssi.ru
Zverev O.V., zv-oleg@yandex.ru
Shelemekh E.A., letis@mail.ru

Received 23.03.2024

The article is dedicated to memory of Doctor of Physics and Mathematics, Professor V.M. Khametov (18.11.1946 – 02.09.2023): the milestones of his career as a scientist and teacher are sketched, the scope of his scientific interests and the results obtained are briefly described. One of his main research interests in the last twenty years has been modeling of the value evolution for financial instruments. We present an overview of the most important results on this topic, the key role in obtaining which belongs to V.M. Khametov. In conclusion, the memoirs of his colleagues and followers are given.

Key words: V.M. Khametov, minimax model for option calculation, incomplete market, stochastic game, quantile hedging, the Bayesian bond model.

АКТУАЛЬНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПРОШЛЫХ ЛЕТ

Продолжение. Начало в предыдущих номерах.

НА ПУТИ К ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ БИОЛОГИИ.
I. ПРОЛЕГОМЕНЫ.

Перевод с английского
С.Г. Васецкого

Под редакцией и с предисловием
акад. Б.Л. Астаурова

Издательство «Мир» Москва, 1970.

Предисловие к английскому изданию

Теоретическая физика представляет собой вполне сложившуюся самостоятельную науку, и во многих университетах ею занимаются специальные лаборатории и кафедры. Более того, наши теории о природе окружающего нас материального мира, безусловно, оказывают глубокое влияние на общефилософские концепции. Что же касается теоретической биологии, то едва ли можно сказать, что такая наука уже существует. Трудно сказать, чем она должна заниматься и по каким путям ей следует развиваться; к тому же очень редко случается, что философы ощущают связь таких биологических проблем, как теория эволюции или восприятие раздражения, с традиционными проблемами философии.

Международный союз биологических наук (МСБН) счел своим долгом, как организация, объединяющая биологов из разных стран, стимулировать создание некоего костяка понятий и методов, на котором могла бы формироваться теоретическая биология. Это совсем не простая задача; поэтому было решено провести три симпозиума на эту тему с годичными интервалами. Эти симпозиумы предполагалось посвятить не обсуждению теоретических основ каких-либо частных биологических процессов, например проницаемости мембран, наследственности, нервной деятельности и т. д., а попыткам выявить и сформулировать основные концепции и логические связи, характеризующие живые системы в отличие от неживых, и рассмотрению вытекающих из них общефилософских представлений.

На меня была возложена обязанность пригласить докладчиков и организовать заседания.

Первый симпозиум проходил с 28 августа по 3 сентября 1966 г. на вилле Сербеллони в Беладжо (озеро Комо). Чтобы создать известную базу для дискуссии и сосредоточить внимание на некоторых проблемах, я разослал участникам симпозиума свои лекции, прочитанные за год до этого в университете Северного Уэльса и нарочито переработанные с тем, чтобы придать им несколько полемический характер. Одновременно были разосланы некоторые комментарии Рене Тома к этим лекциям, а также статья Эрнста Майра.

Заседания на вилле Сербеллони, носившие весьма непринужденный характер и оказавшиеся очень плодотворными, не стенографировались.

В процессе обсуждения внимание было сосредоточено главным образом на проблемах биологической теории, а не на более общих проблемах. Хотя в результате работы симпозиума стали вырисовываться пусть еще не очень четкие, но уже определенные контуры теоретической биологии, было совершенно ясно, что необходимо продолжить обсуждение и обмен мнениями между приверженцами различных точек зрения, прежде чем удастся разработать некое подобие схемы стройной и самостоятельной науки. Поэтому предлагаемая вниманию читателя книга состоит из отдельных статей, написанных после симпозиума в духе проводившегося на нем обсуждения. Они еще не связаны друг с другом в некое единое целое. Именно сознание того, что такого единого целого не существует, что его создание представляет собой длительную и нелегкую задачу, и заставило принять решение провести три симпозиума. Мы надеемся, что на втором симпозиуме будут сделаны дальнейшие шаги на пути к синтезу различных точек зрения. Поэтому этот первый том и получил подзаголовок «Пролегомены».

К. Уоддингтон

ТОЛЕРАНТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА И МОЗГ

Э. ЗИМАН и О. БЬЮНЕМАН
(Варвикский университет)

Введение. Толерантное пространство — это математическое понятие, которым удобно пользоваться при описании мозга. Сначала мы покажем, как такие пространства возникают при создании модели мозга, а в конце статьи приведем некоторые точные определения и характеристики.

Для любого мозга характерно создание внутренних образов внешнего мира. Допустим, что внешнее раздражение x вызывает появление в мозгу состояния y. Обозначим некоторое множество внешних раздражений через X, а соответствующее множество состоянии мозга через Y; тогда получим отображение (функцию)

$$f : X \to Y$$

Разумеется, между раздражением x и соответствующим состоянием у может не быть абсолютно никакого сходства; например, x может представлять собой картину, а y — тип волн, возникающих в коре головного мозга. Тем не менее если в мозгу происходит осмысливание всех поступающих сигналов, то способы организации и взаимосвязи различных раздражений друг с другом должны в известной степени отражаться в характере связей между соответствующими состояниями мозга.

Выражаясь математически, следует сказать, что множества X и Y обладают некоторой структурой, и отображение f должно сохранять эту структуру. Немедленно возникают два вопроса:

1. Что это за структура?
2. Что такое «состояния» мозга?

Что такое множество раздражений, понять легче — нас бы удовлетворила теория, в которую укладываются такие понятия, как зрительные образы, осязательные образы, звуки, цвета или запахи.

Математическая структура. Существует много типов математических структур, например симметрия зрительных образов или музыкальный ритм, но структура, которую мы хотим исследовать, выражена гораздо слабее и носит более общий характер; назовем ее *толерантностью*. Это понятие соответствует «наименьшему воспринимаемому различию» (дифференциальному порогу) в психологии. Предположим, что X — это множество раздражений. Если два раздражения x_1 и x_2 в X настолько близки, что не поддаются различению, то мы говорим, что они связаны *отношением толерантности*, или *находятся в пределах толерантности*, и пишем $x_1 \sim x_2$. Если же, напротив, x_1 и x_2 различимы, то мы говорим, что они *не толерантны между собой*. Толерантность ξ есть по определению множество пар (x_1, x_2), таких , что $x_1 \sim x_2$. Множество X с заданной толерантностью ξ называется *толерантным пространством*.

Например, если X — поле зрения, занимающее около четверти сферы, то две точки, находящиеся вблизи центра этого поля, неотличимы друг от друга, т. е. толерантны между собой, если они разделены расстоянием менее 1 угловой минуты, тогда как к периферии поля зрения острота зрения падает и там уже неразличимы точки, находящиеся на расстоянии до 1 углового градуса друг от друга.

Интуитивная идея, лежащая в основе математической теории толерантных пространств, заключается в том, что мы можем перемещаться в пределах толерантности, не замечая никаких различий: если мы должны доказать совпадение двух объектов, то нужно лишь доказать, что они совпадают в пределах толерантности, или, если мы хотим исследовать структурную устойчивость некоторого дифференциального уравнения, это можно сделать лишь в пределах толерантности и т. д. На первый взгляд это кажется серьезным препятствием, но после некоторого размышления подобная идея оказывается весьма гибкой. Другое интригующее обстоятельство состоит в том, что толерантность, подобно топологии, вносит в множество X некоторое понятие близости элементов. Возможно, что представление о близости точек — это несколько неточная аналогия, потому что толерантность в общем не транзитивна, т. е. из $x_1 \sim x_2$ и $x_2 \sim x_3$ не следует, что $x_1 \sim x_3$. Очень важно, чтобы толерантность не была транзитивной, поскольку при приближении к дифференциальному порогу мы всегда приходим к нетранзитивности.

С другой стороны, представление о том, что толерантность вносит в множество X некоторое понятие близости, интуитивно весьма важно. Например, если X — это множество всевозможных спектров излучения (представляющих собой с точки зрения физики бесконечномерное функциональное пространство), а ξ — толерантность, обусловленная характером цветового зрения человека, то ξ преобразует множество X в обычную двумерную цветовую диаграмму, дополненную шкалой интенсивностей.

Многое из того, что относится к топологическим пространствам, можно перенести и в теорию толерантных пространств; поэтому мы заимствуем термины и обозначения из топологии. В частности, мы можем использовать эффективные глобальные топологические инварианты и в то же время пренебречь локальными свойствами, так как последние все находятся в пределах толерантности. Поэтому толерантное пространство напоминает «размазанное» топологическое пространство. Но это и есть та самая математика, которая должна быть полезной при изучении мозга, поскольку в основе любой модели мозга должна лежать детально изученная нейрофизиологическая структура; и все же, построив модель, мы, как правило, ограничиваемся исследованием ее глобальных свойств для изучения мышления и памяти, пренебрегая локальными деталями, неразличимыми в пределах толерантности.

Динамические состояния мозга. Говоря о состоянии мозга в некое данное время, можно иметь в виду две разные вещи. Во-первых, это *динамическое* состояние, которое зависит от химического равновесия и от частоты разрядов всех нейронов в данный момент времени. Экспериментально установлено, что динамическое состояние связано с мыслями или ощущениями, и поэтому можно в общем виде допустить, что динамическое состояние мозга определяет мышление.

Во-вторых, это *статическое* состояние, определяемое наличием сети из 10^{14} нейронов и 10^{15} синапсов и, возможно, многого другого. Следует думать, что память связана со статическим состоянием (речь идет о потенциальной памяти, ибо реализованная память включается в динамическое состояние). Например, во время сна ритм импульсации нейронов и, следовательно, динамическое состояние мозга изменяются, однако статическое состояние будет по-прежнему хранить всю память.

Обозначим множество динамических состояний мозга через Y. Следует ожидать, что достаточно близкие состояния y_1 и y_2 будут определять одну и ту же мысль; записав это в виде $y_1 \sim y_2$, мы тем самым констатируем наличие в Y некоторой внутренне присущей ему толерантности η. Следовательно, эти динамические состояния образуют толерантное пространство (Y, η). Читатель может возразить, что мы еще не дали точного определения динамического состояния мозга, но, на наш взгляд, это не имеет особого значения, поскольку если у нас есть два толерантных пространства (Y, η) и (Y', η'), предназначенных для описания динамических состояний мозга, то между ними имеется толерантный гомеоморфизм (см. определение в конце статьи)

$$g : Y \to Y'.$$

Иными словами, эти два представления будут идентичны с точностью до толерантности. Поэтому понятие толерантного пространства позволяет нам без ущерба выбрать наиболее удобную форму представления с одним лишь условием: она должна быть достаточно детальной.

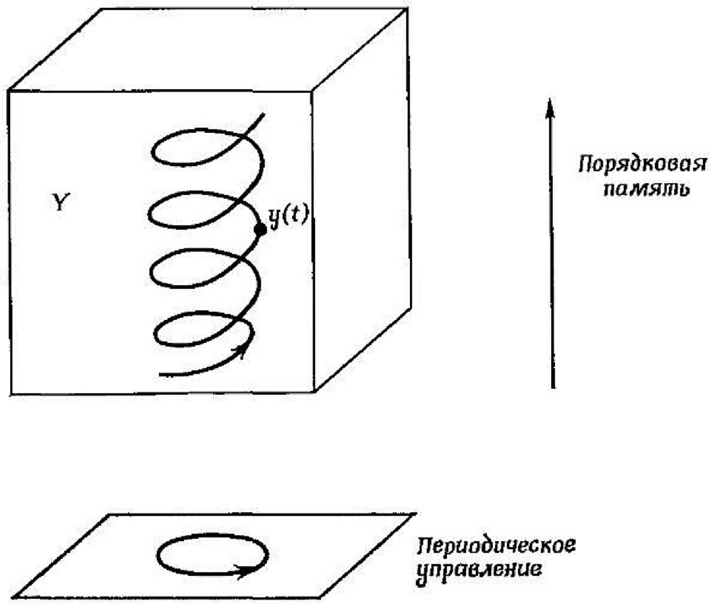
Введенное нами множество Y можно представить как единичный куб размерности 10^{14}. Каждая точка y из множества Y имеет координаты y_i, представляющие собой соответствующим образом параметрированные уровни возбуждения по всем 10^{14} нейронам. Следовательно, каждое состояние Y определяется уровнями возбуждения всех нейронов. Доказательством того, что такое описание достаточно детализировано, служит нормальная работа мозга (и, по-видимому, мышления) при утрате нескольких тысяч нейронов. Иными словами, хотя длина ребра куба равна единице, толерантность в данном случае, по-видимому, сравнительно велика — скажем, любые две точки, находящиеся на расстоянии менее 100, толерантны между собой (диагональ куба составляет 10^7).

Эта модель не учитывает, в частности, деятельности других частей мозга, например клеток глии, однако мы считаем, что этими структурами можно пренебречь в силу изложенных выше соображений. Она игнорирует также фазовые различия между разрядами отдельных нейронов. Однако мы опять-таки допускаем, что в пределах толерантности это не имеет значения, так как эффект залпа импульсов в одном нейроне носит прежде всего аддитивный характер [1]. Фазовые различия становятся существенными в области медленных волн: как показывают эксперименты [2],— в области частот порядка 10 *имп/сек* и ниже (тогда как частоты разрядов в отдельном нейроне составляют 50—1000 *имп/сек*). Сходное положение наблюдается в радиовещании, где нас не интересует фаза несущей радиоволны, тогда как фаза модулирующей звуковой волны имеет существенное значение.

В предлагаемой модели медленные волны могут быть обнаружены визуально, так как с течением времени t точка $y(t)$, представляющая определенное состояние мозга, движется по кубу Y. Медленные волны порядка 10 *имп/сек* будут представлены периодическим, или «спиральным», движением точки $y(t)$ (фиг. 1).

В одних координатах (возможно, представляющих управляющую группу нейронов) «спиральное» движение $y(t)$ может быть периодическим, а в других (возможно, представляющих порядковую память, например запоминание мелодии) — поступательным. Экспериментальные данные показывают, что у кошки и человека [3] подобная активность нейронов связана с памятью.

Поля памяти. Что заставляет точку $y(t)$ двигаться в определенном направлении? Дело в том, что на множестве Y имеется векторное поле υ (иными словами, обыкновенное дифференциальное уравнение), и $y(t)$ движется с точностью до толерантности вдоль траекторий этого поля. Поле υ определяется взаимодействием всех нейронов друг с другом, и, таким образом, в этот один символ υ мы вмещаем всю информацию об эффективности синапсов, величине их порогов, сведения о том, являются ли они возбуждающими или тормозными, и о том, как они действуют в совокупности при всех возможных обстоятельствах. Иными словами, υ — это наша потенциальная память.



Фиг. 1.

Пусть V — совокупность векторных полей на множестве Y. Как и прежде, V обладает некоторой внутренне присущей толерантностью, однако стоит отметить, что толерантные между собой поля могут иметь траектории, начинающиеся в пределах толерантности, но быстро выходящие за ее пределы. Это вносит в наше мышление и память элемент непредсказуемости.

Векторное поле υ, входящее в совокупность V, зависит от времени t и от внешнего раздражения x. Поэтому в данный фиксированный момент времени t соответствие $x \to \upsilon(x)$ даст отображение

$$\upsilon : X \to V$$

Это отображение представляет собой потенциальную память о раздражениях и показывает, как мозг будет реагировать на любое данное раздражение независимо от того, на что он реагировал раньше. Иными словами, υ представляет полную память в момент времени t.

Предположим теперь, что мозг находится в некотором исходном состоянии мышления z из множества Y; векторное поле υ переводит его в «следующую» мысль y. Таким образом, каждое векторное поле определяет некоторую мысль, и мы получаем отображение

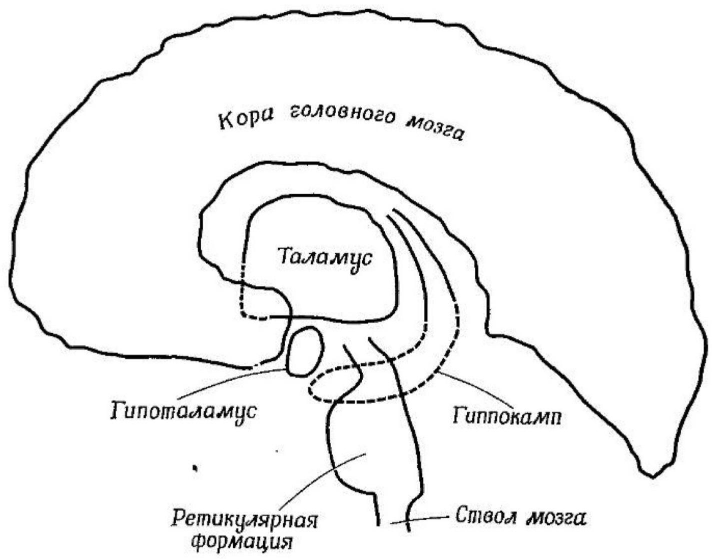
$$\omega_z : V \to Y,$$

представляющее «реализацию» памяти. Мы обозначили отображение через ω_z, потому что оно зависит от исходного состояния z.

Композиция

$$\underbrace{X \xrightarrow{v} V \xrightarrow{w_z} Y}_{f},$$

представляет собой то исходное отображение *f* о котором шла речь вначале. Экспериментальные данные показывают, что и υ и *f* являются *толерантными вложениями* (см. определение в конце статьи, а также [4]). Иными словами, толерантная структура, определенная на множестве раздражений *X*, сохраняется как отображением *f* (мышлением), так и памятью υ.



Фиг. 2.

Разумеется, когда психолог экспериментирует с мозгом, он должен исследовать отображение *f* (мышление). Но *f* зависит от времени и от исходного состояния *z* (которое также зависит от *t*). Поэтому психолог может проводить лишь такие эксперименты, которые по возможности независимы от *z* и *t*. На основании полученных им сведений об *f* он судит о свойствах отображения и (памяти), представляющих значительно больший интерес. В самом деле, υ не только представляет собой толерантное вложение, но, кроме того, соотносит каждому раздражению целую совокупность ассоциаций, потому что поле υ(*x*) прокладывает путь, по которому идет мышление, и почти мгновенно восстанавливает соответствующие ассоциации.

Наличие толерантности в множестве *V* объясняет также, как стирается память об отдаленных событиях. По мере запоминания новых событий поля старой памяти разрушаются и оказываются в пределах толеоантности.

Или, если подходить к этому с противоположной стороны, — возрастает толерантность памяти о старых событиях, что приводит к стиранию подробностей. Так, со временем стираются детские впечатления. Представление о стирании памяти значительно ближе к действительности, чем представление об утрате «битов хранящейся в памяти информации».

Разработка модели. Главная идея состоит в том, чтобы включить в модель различные части мозга (фиг. 2); мы надеемся показать, как представление о толерантных пространствах может облегчить обсуждение этой проблемы. Наша конечная цель (хотя она и не будет достигнута в этой статье) заключается в создании гипотез, поддающихся экспериментальной проверке.

Таламус и другие области среднего мозга отличаются от коры тем, что они содержат множество «паразитирующих» синапсов, которых нет в коре. «Паразитирующим» мы называем описанный Экклсом [1] тип синапса, способного изменять эффективность синапсов, на которых он расположен. Мы предполагаем, что эти синапсы активируются другими частями мозга: гипоталамусом, где расположены центры эмоций и так называемые центры «боли» и «удовольствия», или активирующей системой ретикулярной формации. Векторное поле υ_T, описывающее статическое состояние таламических центров, можно поэтому легко и быстро изменить. Вместе с тем данных, которые бы свидетельствовали о возможности легко изменять эффективность синапсов в коре, нет. Например, Крэгг [5] обнаружил, что, когда у котят прорезываются глаза, для роста синапсов в коре таламуса необходимо действие света в течение нескольких часов.

Для обозначения этих двух типов синапсов мы используем термины «гибкий» и «жесткий». Внезапное болевое ощущение, например, немедленно изменит υ_T «гибкого» таламуса, но не окажет непосредственного воздействия на υ_C «жесткой» коры. Мы предполагаем, что долговременная память связана с изменением «жесткой» коры.

Память. Из анатомии мы знаем, что нервные волокна, идущие к коре, проходят через таламические центры. Мы знаем также, что таламус участвует в формировании всех рефлексов, за исключением простейших. Обозначим множество стимулов через X, а динамические состояния коры и таламуса через C и T. Мы можем составить следующую схему толерантных отображений:

$$\begin{tikzcd} & & C \arrow[dd, "k"] \\ X \arrow[r, "f"] & T \arrow[ur, "g"] & \\ & & C \arrow[ul, "h"] \end{tikzcd}$$

Прежде чем исследовать возможную природу отображений g, h и k, рассмотрим следствия из этой схемы. Отображение k определяется статическим состоянием всех кортикальных синапсов; отметим, что оно не отличает кодирующие синапсы (например, те, которые возбуждают элементы Хьюбеля — Визеля [6]) и синапсы «памяти». Собственно, мы допустим, что единственное функциональное различие между этими синапсами, по-видимому, обусловлено различиями в их относительной жесткости и что «кодирующий» синапс в результате небольших изменений его эффективности может функционировать и как синапс памяти. В этом случае физиологическое или анатомическое подразделение коры на «анализаторы» и «хранилища» представляется довольно искусственным.

На первый взгляд кажется, что X— внешний мир, а C — внутренний мир нашей памяти и что мышление осуществляется в T посредством сопоставления того и другого; однако было бы неверным считать, что, по нашему мнению, мышление протекает только в таламусе. Мы знаем, что простая реакция в ответ, например, на звуковое раздражение может произойти независимо от коры, тогда как реакция на зрительное раздражение подразумевает участие коры. В одном случае таламус реагирует на f, а в другом — на сложное отображение $f \cdot g \cdot k \cdot h$ (порядок отображений — слева направо). Мы полагаем также, что таламус может взаимодействовать с корой более или менее независимо от раздражения x, и именно это *взаимодействие* мы предположительно называем мышлением.

Какова природа отображений g и h? Ван Геердеп [7] указал на интересную аналогию с голограммой или фотографией, сделанной с помощью лазера.

Преобразование образа P в голограмму H, которая обратным отображением снова переводится в этот образ, можно записать в виде

$$P \underset{h}{\overset{g}{\rightleftarrows}} H.$$

Изящество метода голографии состоит в том, что хранение в H не носит локального характера; удаление части голограммы H приводит лишь к некоторому размазыванию образа P. Аналогичным образом память об отдельных раздражениях, по-видимому, не специфична для тех или иных отделов коры. Более того, система ван Геердена «ассоциативна» в том смысле, что если в памяти хранится образ P, то сложное отображение $g \cdot h$ образа P_o, составляющего часть P, даст «теневой образ» всего P. Для системы ван Геердена требуется наличие когерентного источника, который, возможно, соответствует одному из ритмов гиппокампа, например наблюдавшемуся Эди [2, 8]. Однако вряд ли такой ритм мог обусловить высокие пространственные частоты в коре, необходимые для возникновения таламической активности.

Но вернемся к мозгу. Из анатомии мы знаем, что отображение g осуществляется клетками таламуса, имеющими представительство в коре; каждой такой клетке соответствует небольшая зона в коре. Напротив, проекция коры на таламус весьма специфична. В таком случае отображения g и h в отсутствие интерференции могут быть обратными друг другу и, возможно, вызывать появление α-ритма. Разумеется, активация или определенная направленность внимания создают интерференцию, и α-ритм исчезает.

Остается проблема изменения жесткого векторного поля υ_C коры C. Мы допустили, что υ_C определяется активностью кортикальных синапсов и что эти синапсы могут изменяться лишь в результате активности клеток, которые они соединяют. Изменение активности жестких синапсов, по-видимому, произойдет под влиянием коры. Гартсайд и Липпольд [9}, а также другие авторы показали, что если на несколько минут искусственно увеличить частоту разрядов кортикального нейрона, его спонтанная активность в течение значительного периода времени остается на высоком уровне.

Эта поддерживаемая активность дает способ превращения некоего динамического состояния коры в новое статическое состояние ее векторного поля. Мы можем предположить, что в этом начальном повышении активности участвует гиппокамп (см. [2]), который изменяет υ_T в таламусе таким образом, что υ_T и υ_C «резонируют» до тех пор, пока не возникнет это повышение. Для этого не требуется значительных изменений отдельных синапсов: хотя каждое локальное изменение невелико, изменение результирующего глобального поля выходит за пределы толерантности.

В абстрактном плане взаимодействие (coupling) жесткого кортикального поля υ_C и гибкого поля таламуса υ_T должно привести к возникновению множества периодических явлений. Форма этих явлений будет изменяться вместе с любым изменением υ_T, так, любое изменение активности гипоталамуса или ретикулярной формации немедленно отражается на электрической активности коры. Чтобы выяснить природу этого взаимодействия полей υ_T и υ_C, нам необходимо развить представление об обобщенных трансформациях и взаимодействующих дифференциальных уравнениях в толерантных пространствах. Необходимо понять, каким образом это взаимодействие нарушает резонанс между двумя полями, одновременно изгибая жесткое поле (переход от кратковременной к долговременной памяти); эта ситуация аналогична передаче энергии между взаимодействующими динамическими системами, хотя, разумеется, речь здесь идет не об энергии. Нам надо также представить себе непрерывное наложение таких изменений, чтобы объяснить, как может осуществляться непрерывное превращение непрерывно действующих раздражений в долговременную память.

Язык. Мы хотели бы подчеркнуть спекулятивный характер рассуждений, изложенных в предыдущих разделах. Цель этих рассуждений состояла в том, чтобы показать, как представление о толерантных пространствах может послужить основой для построения общей теории мышления и памяти, в целом достаточно содержательной, чтобы охватить всю деятельность мозга, и достаточно гибкой, чтобы допустить почти любое биохимическое объяснение. Единственный недостаток нашей модели заключается в том, что она еще недостаточно специфична для разработки поддающихся экспериментальной проверке гипотез и, следовательно, ее познавательная ценность невелика. Быть может, ее главная роль состоит в том, чтобы указать подход к этой проблеме с общей точки зрения.

Прежде чем покончить со спекуляциями, мы покажем, как можно использовать представление о толерантных пространствах при обсуждении языка. Мысли иногда искажаются, если облечь их в слова, и этот процесс подразумевает наличие толерантности в множестве мыслей. Передача мыслей от одного человека к другому по схеме

$$\text{Мысли} \to \text{Слова} \to \text{Мысли}$$

должна быть неточной в пределах произведения двух толерантностей. Чем сильнее различаются условия, в которых выросли и живут люди, тем больше это произведение и тем менее точна передача информации от одного из них к другому. Если люди знакомы друг с другом, то соответствующая толерантность значительно уменьшается в результате дополнения языка обертонами в виде оттенков голоса и мимики, и таким образом повышается точность передачи сообщения. Различным языкам соответствует разная толерантность, и поэтому знание двух языков уменьшает соответствующую толерантность, обостряя восприятие. В то же время перевод с языка на язык различными людьми, скажем с английского на русский, по схеме

$$\begin{tikzcd} & \text{Мысли} \to \text{Французский язык} \\ \text{Английский язык} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \text{Мысли} \to \text{Французский язык} \end{tikzcd}$$

неточен в пределах толерантности, по крайней мере вдвое превышающей обычную. Следовательно, перевод, сделанный одним человеком, всегда будет неточен для другого, как бы старательно он ни был выполнен.

Толерантные пространства. В заключение приведем некоторые определения и перечислим элементарные свойства толерантных пространств.

Определения. Толерантность ξ в множестве X является рефлексивным симметричным отношением. Термин «рефлексивное» означает, что $x \sim x$ для всех x из X, а «симметричное» означает, что из $x_1 \sim x_2$ следует $x_2 \sim x_1$. Отметим, что ξ нетранзитивно. *Толерантное пространство* (X, ξ) — это множество X с заданной в нем толерантностью ξ.

Пример 1. X — множество точек на этом листе бумаги, а ξ — толерантность, определяемая следующим образом: $x_1 \sim x_2$, если расстояние между x_1 и x_2 меньше 1 мм.

Пример 2. X — множество атомов, из которых состоит этот лист бумаги, а ξ — снова толерантность, связывающая два атома, если расстояние между ними меньше 1 *мм*.

Пример 3. Если (X, ξ) — толерантное пространство, а Y — подмножество множества X, то сужение толерантности ξ на пары точек из Y превращает Y в толерантное пространство (Y, ξ).

Пример 4. Предположим, что (X, ξ) — толерантное пространство. Обозначим совокупность всех подмножеств множества X через 2^X. Введем в 2^X толерантность 2^ξ, положив по определению, что $A \sim B$ в 2^X, если любая точка из A толерантна в смысле ξ-толерантности некоторой точке из B и обратно. Это построение позволяет нам перейти от толерантности в множестве точек поля зрения к толерантности в множестве черно-белых картин в этом поле.

Пример 5. Предположим, что (X, ξ) и (Y, η) — толерантные пространства. Тогда $\xi \times \eta$ определяет толерантность в произведении $X \times Y$.

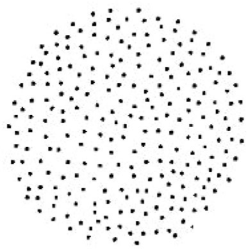
Пример 6. Предположим, что (X, ξ) и (Y, η) — толерантные пространства. Обозначим через Y^X совокупность всех отображений множества X в Y. Определим в Y^X толерантность η^ξ. Полагая, что $f \sim g$, если графики этих отображений в $X \times Y$ толерантны между собой в смысле толерантности $\xi \times \eta$. Это построение позволяет нам перейти от толерантного пространства (X, ξ) полей зрения и толерантного пространства (Y, η) цветов к толерантному пространству (Y^X, η) цветных изображений.

Пример 7. Допустим, что X — множество двумерных проекций трехмерного мира. Пусть ξ — толерантность, определяемая небольшими параллактическими движениями головы. Тогда (X, ξ) представит довольно детальное описание геометрии трехмерного пространства. Это та геометрическая структура, которая имеется у нас на сетчатке и благодаря которой возможно правильное зрительное восприятие трехмерного мира.

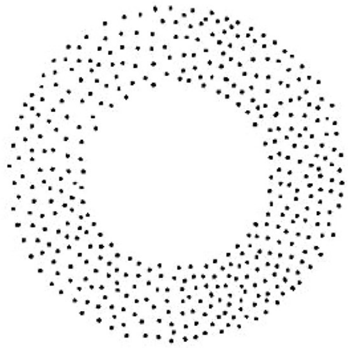
Пример 8. Допустим, что $f : \mathrm{X} \to Y$ — некоторое отображение, а (Y, η) — толерантное пространство. Определим в X толерантность ξ, полагая $x_1 \sim x_2$, если $fx_1 \sim fx_2$ в смысле толерантности η. Назовем ξ *прообразом толерантности* η и запишем $\xi = f^{-1}\eta$. Толерантность остроты зрения в поле зрения представляет собой прообраз толерантности в сетчатке, определяемой рецепторными полями ганглиев сетчатки.

Определения. Допустим, что $f : \mathrm{X} \to Y$ — отображение, связывающее два толерантных пространства (X, ξ) и (Y, η). Мы говорим, что f — *толерант-*

ное отображение, если из $x_1 \sim x_2$ в смысле толерантности ξ следует $fx_1 \sim fx_2$ в смысле толерантности η. Если справедливо и обратное, т. е. из $fx_1 \sim fx_2$ следует $x_1 \sim x_2$, то f называется *толерантным вложением*. Если же, далее, каждая точка y из Y толерантна некоторой точке fx, где x принадлежит X, то мы называем f *толерантным гомеоморфизмом*.



А



Б

Фиг. 3.

Пример 9. Допустим, что (X, ξ), как и в примере 2,— атомы, составляющие этот лист бумаги, а (Y, η), как в примере 1, — точки на нем. Предположим, что отображение $f : X \to Y$ ставит в соответствие каждому атому точку, в которой он находится. Тогда f представляет собой толерантный гомеоморфизм. Этот пример хорошо иллюстрирует совпадение с точностью до толерантности реального и теоретического листов бумаги.

Пример 10. Вводя, как это было сделано в примере 8, прообраз η толерантности, мы превращаем введенное там же отображение f в толерантное вложение. В силу этого зрительный опыт с точностью до толерантности вкладывается в опыт сетчатки.

Пример 11. Если $f : (X, \xi) \to (Y, \eta)$ — толерантное вложение, то $(X, \xi) \to (fX, \eta)$ представляет собой толерантный гомеоморфизм. При толерантном гомеоморфизме сохраняются все глобальные свойства толерантного пространства.

Пример 12. Композиция двух толерантных отображений или вложений будет отображением того же типа. Однако композиция двух толерантных гомеоморфизмов, вообще говоря, не будет таковым; чтобы превратить эту композицию в толерантный гомеоморфизм, надо «удвоить» толерантность. С методической точки зрения этот пример хорошо иллюстрирует характер нетранзитивности, возникающей в теории толерантных пространств. С точки зрения приложений мы не заинтересованы специально в локальных явлениях, и тогда с точностью до «удвоенной» толерантности ξ^2 между ξ и ξ^2 никакой разницы нет.

Пример 13. Мы полагаем, что все отображения, встречавшиеся нам выше, представляют собой толерантные вложения. Доводы в пользу такого предположения см. [4] и [10].

Легко видеть, что если считать толерантными между собой точки, находящиеся друг от друга на расстоянии менее 1 см, то изображенное на фиг. 3 толерантное пространство будет состоять из двух связных частей, одна из которых имеет отверстие. Это типичные глобальные свойства толерантного пространства, и для того, чтобы охватить их все сразу, лучше всего применить теорию гомологий. Если дано толерантное пространство (X, ξ), то мы можем построить симплициальный комплекс, состоящий из всех симплексов, где симплекс — это такое конечное ориентированное подмножество множества X, все точки которого толерантны между собой. Группой гомологий $H(X, \xi)$ будет тогда по определению группа гомологий этого комплекса. Хотелось бы иметь следующую теорему:

Теорема: толерантный гомеоморфизм индуцирует изоморфизмы соответствующих групп гомологий.

Однако это не вполне верно; необходимо сделать некоторые технические уточнения (см. [11]). Все же из правильной формулировки этой теоремы можно сделать вывод о том, что такие свойства, как связность, число отверстий и размерность, сохраняются при толерантном гомеоморфизме. В результате довольно тонкая трехмерная структура (пример 7) сохраняется, например, в полях памяти коры головного мозга. Теорию гомологий следует использовать также при обсуждении взаимодействия и резонанса для дифференциальных уравнений, связанных с гиппокампом и корой головного мозга.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Eccles J. C.*, Physiology of synapses, Springer, 1964. (Дж. Экклс, Физиология синапсов, изд-во «Мир», М., 1966).
2. *Adey W. R., Dunlop C. W., Hendrix C. E.,* Arch. Neurol., 3, 74—90, 1960.
3. *Penfields W., Roberts L.*, Speech and brain mechanisms, Princeton, 1959.
4. *Zeeman E. C.*, in: Topology of 3 manifolds, K. Fort, ed., Prentice Hall, pp. 240— 256, 1962.
5. *Cragg B. G.* (в печати).
6. *Hubei D. H., Wiesel T. N., J. Physiol.*, 160, 106—154, 1962.
7. *Heerden P. J.* van, Applied optics, 2, 387—400, 1963.
8. *Green J. D.*, Physiol. Rev., 44, 561—608, 1964.
9. *Gartside B., Lippold O. C. J., J. Physiol.*, 189, 475—487, 1967.
10. *Zeeman E. C.,* in: Mathematics and computer science in biology and medicine, M. R. C,, pp. 240—256, 1965.
11. *Zeeman E. C.,* Homology of tolerance spaces (в печати).

ДИНАМИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ МОРФОГЕНЕЗА[1]

Р. ТОМ
(Институт высших исследовании, Бюр-сюр-Ивет))

Термин «морфогенез». Как полагают некоторые ревнители чистоты французского языка, термин «morphogénése» следует употреблять лишь в тех случаях, когда речь идет о возникновении новых органических форм в процессе эволюции, тогда как в английском языке термин «morphogenesis» имеет более широкий смысл, поскольку он означает главным образом формирование взрослого организма из зародыша. И все же некоторые английские и американские исследователи противопоставляют термину *морфогенез* термин *образование пространственной структуры* (pattern formation). При этом под «морфогенезом» понимают лишь процессы, сопровождающиеся пространственными перемещениями глобального характера, как, например, гаструляция или нейруляция у амфибий, а под «образованием пространственной структуры» — формообразовательные процессы более статического характера, например формирование кости или рост волос или перьев на коже. Подобное разграничение этих терминов может показаться довольно произвольным, а значение его — сомнительным. В настоящей работе мы будем употреблять термин «морфогенез» в соответствии с его этимологией в самом общем смысле, а именно для обозначения любого процесса возникновения (или разрушения) формы, причем мы оставим в стороне как природу субстрата рассматриваемых форм, так и природу сил, вызывающих подобные изменения.

Возникновение теории и область ее применения. Предлагаемая здесь теория имеет два источника. Это, с одной стороны, мои собственные топологические и аналитические исследования по проблеме так называемой структурной устойчивости: пусть дана некая «форма», геометрически определяемая, например, графиком функции $F(x)$; требуется выяснить, обладает ли эта функция «структурной устойчивостью», т. е. сохраняет ли эта возмущенная функция ту же топологическую форму, если первоначальная функция F переводится малым возмущением в $G = F + \delta F$. С другой стороны, разработке этой теории способствовало чтение руководств по эмбриологии, в частности книг Уоддингтона, представления которого о «креодах» и «эпигенетическом ландшафте», как мне кажется, хорошо укладываются в абстрактную схему, содержащуюся

[1] В английском издании статья опубликована на французском языке. — *Прим. ред*. 10 Зак. 741

в моей теории структурной устойчивости дифференцируемых функций и отображений. Это означает, что теория носит весьма абстрактный и общий характер и что область ее приложения выхолит далеко за пределы эмбриологии или даже биологии. Она используется, в частности, в геометрической оптике, гидродинамике и газовой динамике (устойчивость фронтов волны И ударных волн). Несколько более спекулятивным, хотя тем нс менее полезным, является установление соответствия в физиологическом плане между «морфогенетическим полем» и функциональным полем физиологов; применительно к высшей нервной деятельности человека таким полем в пространстве активностей нейронов можно считать *слово* (речь), а изучение «устойчивых» сочетаний слов открывает путь к созданию геометрической теории языка.

Независимость от субстрата. Основная идея нашей теории, состоящая в том, что морфогенетические процессы можно в какой-то степени попять, не касаясь особых свойств субстрата форм или природы действующих сил, может показаться неприемлемой, особенно экспериментаторам, привыкшим резать по живому и находиться в непрерывной борьбе с сопротивляющейся им объективной реальностью. Между тем эта мысль нс нова — ее почти исчерпывающе сформулировал д'Арси Томпсон в своей классической работе «О росте и форме». Однако идеи этого провидца далеко опередили свое время и не привлекли к себе должного внимания; они зачастую формулировались в чересчур откровенно геометрической манере и им недоставало математического и динамического обоснования, которое могли бы обеспечить лишь современные исследования. Чтобы проиллюстрировать эту относительную независимость морфогенеза от наших представлений о субстрате, я приведу два примера:

1. Рассмотрим сначала оплодотворенное и развивающееся в оптимальных условиях яйцо лягушки; на основании руководств по эмбриологии мы можем с очень большой точностью предсказать (разумеется, если не произойдет непредвиденных отклонений от нормы) все изменения, которые должен претерпеть этот организм, и описать морфологию его развития.

2. Рассмотрим затем скалистый уступ, образовавшийся в определенный момент времени t_0 в результате тектонического сброса; допустим, что нам известны петрографический состав этой скалы и все микроклиматические условия данного района (ветры, осадки, температура и т. д.). Можно ли предвидеть окончательную форму, которую примет скала под действием денудации?

Мы отлично знаем, из чего состоит скала и какие силы на нее действуют; тем не менее геоморфология нс может сколько-нибудь точно предсказать скульптурную форму, которую примет скала под действием денудации. В первом случае, для развивающегося яйца лягушки, предсказание может быть весьма точным, хотя в наших знаниях о субстрате и механизмах морфогенеза (если не считать некоторых общих биохимических представлений о синтезе белков) гораздо больше пробелов. Следовательно, в случае морфогенеза наша способность предсказывать события очень мало зависит от наших знаний о субстрате.

Мне могут возразить, что я сравниваю несравнимое, ставя на одну доску биологический процесс и процесс, происходящий в неживой природе. Однако лишь при таком сравнении выявляется очень важный момент, который сознают очень немногие, а именно что морфогенез в неживой природе значительно менее изучен и столь же мало понятен, как морфогенез в мире живых существ. Морфогенез в живых системах привлекает внимание биологов уже на протяжении нескольких веков. Напротив, к проблемам морфологии в физической химии ученые почти неизменно относились с пренебрежением. Типичным примером может служить весьма важная проблема пространственного распределения вещества по двум фазам — об этом известно очень мало, и, насколько я знаю, нс существует никакой теории, объясняющей древовидный рост кристаллов. Пренебрежительное отношение физико-хим иков к такого рода вопросам легко объяснимо: ведь речь идет о явлениях чрезвычайно лабильных, трудно воспроизводимых и не поддающихся математической формализации. Собственно говоря, сущность любой формы, любой морфологии выражается дискретностью свойств среды, а ничто так не раздражает математика, как отсутствие непрерывности, ибо функции, лежащие в основе любой количественной модели, которой можно пользоваться, должны быть аналитическими, а следовательно, и непрерывными. Если, бросая камень в лужу, вы захотите узнать, что при этом происходит, то гораздо полезнее провести опыт и заснять его на пленку, чем пытаться строить теории по этому поводу. Даже лучшие специалисты по уравнению Навье — Стокса, безусловно, не могли бы сказать об этом больше. Важно преодолеть это отставание, однако не следует удивляться тому, что морфогенез в живой природе, о котором мы знаем гораздо больше, который протекает более медленно и регулируется более строго, не помогает нам понять некоторые быстро протекающие и мимолетные явления морфогенеза в неживой природе.

Детерминизм. Существует в принципе два типа механических моделей: классическая детерминистская модель и существенно недетермнннстская квантовая модель, детерминизм которой проявляется лишь статистически. Обычно считают, что явления на субатомном уровне соответствуют квантовым моделям (и, следовательно, недетерминированы), тогда как макроскопические явления соответствуют классическим моделям и в силу этого строго детерминированы. Эта распространенная точка зрения, как мне кажется, в корне ошибочна. Я не буду обсуждать здесь неопределенность на квантовом уровне, но и на макроскопическом уровне многие явления обнаруживают известную нестабильность, возникающую вследствие нарушения исходной симметрии; так, например, однородный диск, свободно падающий из начального горизонтального положения, описывает спиральную траекторию; вода из цилиндрического сосуда вытекает через расположенное в центре дна отверстие так, что возникает вращательное движение жидкости, причем направление этого вращения a priori неизвестно и его нельзя предсказать. Во всех подобных случаях незначительное изменение начальных условий может повлечь за собой весьма существенные отклонения на заключительных стадиях процесса. Все перечисленные явления можно считать детерминистскими, но это чисто метафизическая точка зрения, не поддающаяся никакой экспериментальной проверке. Если ограничиться свойствами, поддающимися регулированию в эксперименте, то эту детерминистскую гипотезу можно заменить эмпирическим представлением о «структурной устойчивости»: процесс P можно считать структурно устойчивым, если небольшое изменение начальных условий переводит его в процесс P', изоморфный процессу P, т. е. малая деформация пространства—времени (на геометрическом языке е-гомеоморфизм) переводит процесс P' снова в процесс P. Подобные соображения естественным образом приводят нас к понятию «креода» Уоддингтона и вообще к понятию «морфогенетического поля»; морфогенетическое поле в области U в пространстве — времени определяется заданием некоторой «универсальной модели», существенной чертой которой является самовоспроизведение определенного процесса. В силу этого данный процесс обладает структурной устойчивостью; следовательно, в понятии морфогенетического поля нет ничего таинственного: это понятие означает лишь, что некий процесс происходит в соответствии с заданной a priori моделью и притом так, что имеет место структурная устойчивость. При анализе любого естественного процесса сначала приходится вычленять те части области, в которых процесс обладает структурной устойчивостью, — «креоды» процесса, островки детерминизма, разделенные зонами, где процесс недетерминирован или структурно неустойчив. Вводя динамические модели, мы пытаемся затем разложить каждый креод на «элементарные креоды», связанные с тем, что я называю «элементарными катастрофами», после чего объединяем эти элементарные креоды в глобальную устойчивую фигуру под действием некой присущей динамической системе сингулярности — «организующего центра». Что касается организации различающихся между собой креодов, то эта проблема представляется более сложной, поскольку она в принципе недетерминирована. Среди всех возможных конфигураций различных креодов одни более устойчивы, чем другие: это те креоды, которые являются наиболее «важными». Эта трудная проблема по существу сравнима с расшифровкой текста на незнакомом языке. Теперь мы перейдем к описанию нашей динамической модели.

Описание модели. Отправным пунктом нам будет служить биохимическая интерпретация клеточной дифференцировки[1]. Возьмем ограниченное пространство и поместим в него k химических веществ s_1, s_2,.., s_k в концентрациях, равных соответственно $c_1, c_2,.., c_k$. В результате происходящих между этими веществами химических реакций концентрации c_i, меняются по дифференциальному закону, который записывается в виде уравнений

$$dc_i \,/\, dt = X_i(c_i,.., c_k) \qquad (1)$$

Мы не будем пытаться выписать в явном виде члены, стоящие в правой части этих уравнений, с помощью законов химической кинетики (закон действия масс и т. п.); нас здесь интересует лишь следующий факт: уравнения (1) определяют в k-мерном евклидовом пространстве R^h с координатами (c_i... c_k) векторное поле X с составляющими X_i. Изменение смеси с течением времени будет описываться перемещением представляющей ее состояние точки $c_i(t)$ по траектории дифференциальной системы, определяемой уравнениями (1). Как правило, такая система стремится к некоторому единственному предельному состоянию c_i^0; бывают, однако, случаи, когда существует несколько таких предельных состояний. Возможно также появление в качестве предельного состояния замкнутой траектории и даже более сложной фигуры (например, некоторая поверхность или — в случае большего числа измерений — некоторое многообразие); связное множество таких предельных точек называется *центром притяжения* системы уравнений (1). Если A — один из таких центров притяжения, то множество траекторий поля, притягивающихся к A, образует в пространстве R^h область, называемую («бассейном») *центра притяжения А*. Если в системе имеется несколько непересекающихся центров притяжения, то между ними возникает конкуренция. В некоторых простых случаях области действия, отвечающие разным центрам притяжения, отделяются «гиперповерхностями» типа «гребня», регулярно расположенными в пространстве; однако в более сложных, но тем не менее «структурно устойчивых» случаях (устойчивых к малым возмущениям) области действия двух разных центров притяжения A_1 и A_2 могут взаимно проникать друг в друга топологически весьма сложным образом. При этом выбор между конечным стремлением к A_1 или A_2 осуществляется практически случайно, и можно оценить возможность каждого исхода лишь статистически, измеряя локальную плотность каждой из областей. В этом случае мы вправе говорить о «борьбе» или «конфликте» между двумя центрами притяжения.

Приняв все это, мы теперь «локализуем» наше построение следующим образом: если x— система координат в области U, в которой определен наш процесс, то концентрации c_i — функции координат (x, t), удовлетворяющие в принципе, системе уравнений в частных производных

[1] Идею истолкования клеточной дифференцировки в терминах «устойчивого режима метаболизма», т. с. центров притяжения в биохимических кинетических системах, часто приписывают Дельбрюку и Сци. тларду. В действительности опа была предложена — в своей локальной и, на мой взгляд, единственно правильной форме—Уоддингтоном в его «Введении в современную генетику» еще в 1939 г.

$$\frac{\partial c_i}{\partial t}(x,t)_j = X_j(c_j,x,t) + k\Delta c_i \quad (\Delta \text{ — оператор Лапласа}),$$

где член $k\Delta c_i$ описывает выравнивающее действие диффузии. В дальнейшем всюду его величина считается малой по сравнению с X_i и он рассматривается как возмущение величин X_i. Если векторное поле X_i структурно устойчиво (по крайней мере в окрестности того центра притяжения, который определяет локальный режим рассматриваемой области), то это не оказывает качественного влияния на ход развития. Таким образом, каждой точке x области U отвечает некоторое векторное поле в R^k, или, иначе говоря, «динамическая система»; задав для каждой точки x области U и такое векторное поле, мы получим то, что можно назвать «полем локальных динамических систем». Допустим, что в каждой точке x локальная динамическая система уже достигла «предельного состояния», т. е. центра притяжения этой локальной системы. Этот последний, будучи структурно устойчив, определяет поведение системы в каждой точке, принадлежащей некоторой системе точек в окрестности точки x; таким образом, вся область U оказывается разделенной на участки U_i, связанные с центрами притяжения A_j и разделенные поверхностями ударных волн, которые образуют так называемую совокупность *катастрофических точек* процесса. Эта совокупность и определяет *морфологию* процесса.

Без более точной гипотезы кажется практически невозможным определить положение ударных волн, разделяющих сферы действия различных центров притяжения; даже в теоретически наиболее простых случаях, например рассматриваемых гидродинамикой, эта проблема имеет лишь весьма частные решения. Тем не менее если нас интересует не количественный аспект, а только качественная (топологическая) структура разграничивающих поверхностей, то проблема становится более доступной. С помощью более общей гипотезы — «условий Максвелла» (которое в какой-то степени отражает равенство «локальных потенциалов», отвечающих каждому из центров притяжения, расположенных по одну и по другую стороны разграничивающей поверхности) — можно показать, что эти разграничивающие поверхности образованы лишь небольшим числом устойчивых сингулярностей, всегда одних и тех же (во всяком случае, если локальная динамическая си стема имеет градиентный тип $X = \text{grad } V$). Для этого случая я составил полный список таких сингулярностей, которые одновременно представляют собой «элементарные катастрофы» (кризисы развития) в пространстве — времени (R^4). Эти элементы появляются, когда локальная динамическая система ($X = \text{grad } V$) находится в «критическом» состоянии, вызванном, например, разрушением центра притяжения или его разделением на несколько таких центров (явление, которое Анри Пуанкаре назвал «бифуркацией»). Можно составить перечень всех сингулярностей потенциала V, которые существуют в структурно устойчивом виде в R^4, и построить алгебраическую модель, соответствующую поверхностям катастрофы. Ниже приведен этот перечень.

1. *Складка*. Разрушение центра притяжения и поглощение его центром притяжения с меньшим потенциалом.

2. *Сборка*. Разделение центра притяжения на два отдельных центра. В гидродинамике это приводит к явлению Римана — Гугоньо (образование ударной волны со свободной границей).

3. *Ласточкин хвост или крунодальная точка*. Поверхность «фронта волны» образует борозду, дном которой служит ударная волна. Примером такой ситуации из области эмбриологии может служить образование бластопора в процессе гаструляции у амфибий.

4. *«Бабочка»*. Эта сингулярность шестого порядка на V возникает в результате отслоения, «вздутия» ударной волны со свободной границей.

5. *Гиперболическая «омбилическая точка»*. Сингулярность, представленная гребнем распадающейся волны.

6. *Эллиптическая «омбилическая точка».* Сингулярность, представляющая собой кончик «шипа» типа заостренной пирамиды с треугольным основанием.

7. *Параболическая «омбилическая точка»*. Элемент в виде структуры, переходной между гиперболическим и эллиптическим типом. Он имеет форму гриба, образуемого разбивающейся струей.

Три последние сингулярности связаны с сингулярностями потенциала V более сложного типа (точка «коранга» два). В гидродинамике они определяют морфологию возбуждения, а в биологии, по всей вероятности, регулируют формообразование в процессе захвата (фагоцитоз у одноклеточных организмов) и в половом процессе (образование и выброс гамет).

Во всех этих случаях можно представить себе следующую геометрическую схему: в точке (x, t) области U локальная динамическая система имеет сингулярность данного алгебраического типа (s). Далее, каждой деформации критической динамической системы s можно поставить в соответствие некоторую точку евклидова пространства W, связанного с этой сингулярностью s; это пространство, с помощью которого параметризуются все возможные определяемые с точностью до гомеоморфизма деформации сингулярной динамической системы, составляет то, что я называю «универсальной развerткой» (déploiement universel) сингулярности s. При этом переход от исходной ситуации, когда локальная динамическая система находится в критическом состоянии s, в состояние X_0 определяется отображением F_t области U в W (волна роста), а конечные превращения определяются пересечением образа $F_t(U)$ с «универсальным множеством катастроф», связанным с сингулярностью s в W. Таким образом, идея «эпигенетического ландшафта», высказанная Уоддингтоном около 20 лет назад, получает матемагическое обоснование. Доведя эту схему до крайности, можно было бы сказать, что взрослый организм представляет собой лишь часть «универсальной развертки» зародышевой динамической системы, господствующей в яйцеклетке. «Элементарные катастрофы», перечень которых приведен выше, соответствуют сингулярностям динамической системы коразмерности 4; связанное с ними пространство W имеет размерность меньше четырех. Лишь эти сингулярности, связанные с градиентными динамическими системами, могут быть устойчивы в нашем пространстве — времени; не потому ли их находят и в неживой природе? Однако ясно, что одних этих сингулярностей недостаточно для того, чтобы объяснить все развитие живого организма. Первая трудность связана с устойчивостью конфигурации «креодов», a priori независимых друг от друга; ее можно объяснить (иногда) существованием некой сигулярности — «организующего центра» — коразмерности больше четырех, которая не затрагивается волной роста $F_t : U \to W$. Однако подобное развитие требует участия гомеостатических механизмов, удерживающих «волну» F_t в строго определенной области пространства W. Именно такие системы и выявляются в зародышевом развитии: в раннем развитии мы видим лишь сингулярности типа «элементарных катастроф», тогда как более сложные органогенезы, происходящие, например, при развитии глаза или кости, наблюдаются гораздо позднее.

Более того, сингулярности, связанные с градиентными динамическими системами, очень просты, и даже в неживой природе можно наблюдать локальные динамические системы «рекуррентного» типа (их траектории замкнуты или «почти замкнуты»), К сожалению, математическое изучение «бифуркаций» этих многомерных центров притяжения и топологической природы возникающих при этом катастроф только началось (оно, кстати, сопряжено со значительными трудностями). Один момент все же можно считать установленным: в то время как катастрофы, связанные с градиентными динамическими системами, определяются множествами типа полиэдров, катастрофы, связанные с уменьшением размерности центра притяжения (например, в результате явления резонанса), в общем приводят к множествам катастроф, очень сложным в топологическом отношении и имеющим древовидную форму. Именно в этом проявляется общность динамического происхождения дендритных форм, наблюдаемых в неживой природе (рост некоторых кристаллов) и в живых организмах (деревья, система кровообращения; сюда же можно отнести «классификационные схемы» в структуре памяти). В общем виде можно сказать, что возникновение новой «фазы» в первоначально гомогенной среде приводит к явлению, которое мы называем «обобщенной катастрофой»; всякий процесс, в котором нарушается начальная симметрия, становится поэтому структурно неустойчивым и приводит к некоторой обобщенной катастрофе. Такие процессы не поддаются формализации, но не следует забывать, что даже если сам процесс структурно неустойчив, его конечный результат может быть вполне детерминированным. Становится понятным, почему обобщенные катастрофы столь часто встречаются в ходе зародышевого развития (можно сравнить гаструляцию у амфибий, обусловленную обычными катастрофами, с гаструляцией у птиц или млекопитающих, вызываемой обобщенными катастрофами). Гибель всякого живого организма сопровождается переходом динамической системы, описывающей его локальный метаболизм, от рекуррентной конфигурации к градиентной — это также типичная обобщенная катастрофа.

Экспериментальная проверка. Мы не будем продолжать дальнейшее описание нашей модели, так как это потребовало бы значительных усилий, не способствуя сколько-нибудь значительному прояснению существа дела. Я коснусь вопроса, который, по-видимому, интересует всех: возможна ли экспериментальная проверка этих моделей? Я вынужден ответить на этот вопрос отрицательно, по крайней мере в данный момент.

В самом деле, при изучении некоего естественного процесса P возможны два варианта:

1. Изучаемый процесс структурно устойчив и целиком входит в некоторый «креод»; в этом случае P допускает представление с помощью некоторой раз и навсегда заданной качественной модели, а эксперимент служил бы лишь для подтверждения структурной устойчивости креода. Разумеется, можно попытаться изучить внутреннюю структуру креода: разложив креод на «элементарные катастрофы» и связав конфигурацию этих катастроф с действием некоего «организующего центра» (иногда поддерживающего креод извне), можно попытаться проанализировать динамические процессы, обеспечивающие устойчивость креода. Однако такой анализ зачастую носит произвольный характер; нередко он приводит к созданию нескольких моделей, выбор между которыми обусловлен лишь соображениями экономии или изящества математического решения. Кстати, теория катастроф еще не настолько хорошо разработана, чтобы на ее основе можно было создать количественную модель,— в качестве единственного известного примера можно привести элементарную катастрофу, определяемую эволюцией ударной волны в гидродинамике. Этот единственный пример лишь подчеркивает трудности проблемы.

2. Процесс P структурно неустойчив и содержит в себе несколько креодов (например, два креода C_1 и C_2, разделенные зонами неустойчивости или неопределенности). В этом случае можно было бы в принципе объяснить неопределенность действием некоторой обобщенной катастрофы, которая сама по себе не поддается формализации. Поэтому единственный возможный путь построения модели — использование статистики. Это означает, что мы должны принимать во внимание не один процесс, а целую совокупность процессов, морфологические проявления которых поддаются статистиче-

ской обработке (кстати, именно такой метод используют в количественной биологии). Но здесь опять-таки обнаруживается, что теория обобщенных катастроф недостаточно разработана, чтобы на ее основе можно было создать модель. Я лично думаю, что с этой точки зрения обычная квантовая механика представляет собой не что иное, как статистику гамильтоновских катастроф.

Принимая во внимание эту невозможность экспериментальной проверки нашей модели, я допускаю, что со строго эмпирических позиций— à 1а Бэкон — ее можно отбросить как бесполезную спекуляцию. С точки зрения ближайшего будущего науки я могу лишь оправдать такую оценку; однако если иметь в виду более далекие перспективы, то эту модель, как мне кажется, следовало бы поддержать, учитывая два соображения:

1. Каждый экспериментатор работает в какой-либо специальной области. Мы принимаем как данную а priori классификацию наук — это разделение изучаемых нами явлений на области физики, химии, биологии... А чем обусловлено это разделение, если не расчленением поля нашего восприятия на «креоды», кажущиеся нам обособленными? Бесполезно было бы противопоставлять нашей качественной модели модели количественные, считая их единственно научными и полезными. Ибо *любая количественная модель подразумевает качественное разделение реальных явлений*, предварительное выделение «системы», рассматриваемой как устойчивая и экспериментально воспроизводимая. Даже статистические модели исходят из определения «совокупностей» устойчивых и воспроизводимых процессов. Это расчленение, осуществляемое нами в процессе восприятия почти бессознательно, используется любым ученым независимо от того, что он об этом думает, подобно тому как герой Мольера говорил прозой, не зная этого. Разве не представило бы интереса, учитывая все это, вновь подвергнуть изучению это расчленение и ввести его в рамки некой общей и абстрактной теории, вместо того чтобы слепо принимать его как неизбежную черту реальной действительности?

2. Конечная цель науки заключается не в том, чтобы собирать без разбора любые эмпирические данные, а в том, чтобы организовать эти данные в более или менее формализованные системы для первичного обобщения и объяснения. Для этого необходимо иметь а priori какие-то представления о том, как происходят те или иные явления, т. е. надо иметь модели. До настоящего времени построение модели в науке — это прежде всего вопрос удачи, результат «счастливой догадки». Но придет время, когда само построение моделей станет если не наукой, то по меньшей мере искусством. Моя попытка описать динамические модели, совместимые с морфологическими данными, представляет собой первый шаг на пути к созданию этой «Общей теории моделей», которую рано или поздно придется создать.

Для тех, кто интересуется философией, я добавлю, что наша модель открывает интересные перспективы в области изучения психики и самого механизма познания. На мой взгляд, наша психическая жизнь представляет собой не что иное, как следствие катастроф, которые претерпевают центры притяжения динамических систем, образуемых стационарной активностью наших нейронов. Динамика, присущая нашему мышлению, не отличается существенным образом от динамики, свойственной окружающему миру. Таким образом, становится возможным объяснить, как в результате взаимодействия (couplage) структур, имитирующих внешние силы, в нашем сознании могут возникать соответствующие понятия, в чем, собственно, и состоит процесс познания.

Аналогичным образом можно показать, какие перспективы открывает наша модель при рассмотрении давней проблемы — проблемы биологической целесообразности.

Целесообразность в биологии. В настоящее время более или менее общепризнано, что не существует особого «живого состояния материи»: жизнь нельзя дробить до бесконечности, поскольку, как это хорошо известно, клетка представляет собой элементарную единицу живой материи. Жизнь скорее можно представить в виде некоторой глобальной структуры, характеризующейся одновременно наличием элементарных подсистем, но в то же время некой целостной и устойчивой (пространственной и биохимической) конфигурацией. Эта конфигурация должна обладать «структурной устойчивостью» и играть роль «организующего центра» по отношению к различным субкреодам, направляющим эволюцию элементарных систем. Следовательно, мы можем согласиться с положением виталистов (например, Дриша) о том, что любое микроявление, присущее живому организму, возникает в соответствии с некоторым глобальным «планом» или «программой»; однако столь же верным оказывается также утверждение, что эволюция каждой из этих подсистем осуществляется своим особым путем, под влиянием локального детерминизма, в принципе сводимого к физическим и химическим явлениям. Таким образом, виталистическую и механистическую точки зрения никак нельзя считать несовместимыми (причем из этих двух точек зрения, как это ни невероятно, «метафизической» является именно механистическая точка зрения, поскольку она постулирует сводимость всех явлений к физико-химическим процессам, а это не подтверждается экспериментально).

Я полагаю, что телеологические утверждения в биологии оправданы; справедливо говорить, как это делал в свое время Вольтер, что наши глаза созданы для того, чтобы видеть, а ноги — чтобы ходить. Какой смысл можно вложить в такого рода утверждения? Только динамический анализ зародышевого развития позволяет, как мне кажется, уточнить смысл таких утверждений. Я отважусь представить здесь такой анализ, носящий, однако, чисто спекулятивный характер.

В основе нашей модели лежит представление о том, что всякая клеточная специализация характеризуется некоторым устойчивым режимом локального обмена веществ, т. е. обладает определенным центром притяжения A биохимической кинетической системы, связанной с рассматриваемой областью, а функциональное значение соответствующей ткани выражается в геометрической или топологической структуре этого центра притяжения A. Мы поясним это положение на нескольких примерах. Однако прежде следует ввести понятие: фигура глобальной регуляции живого существа. Например, животное характеризуется некоторой глобальной устойчивостью: если его подвергнуть действию раздражения s, то оно ответит на это реакцией r, которая в принципе предназначена для снятия возмущения, вызванного раздражением s. А раздражения в силу одного лишь того, что они исходят из окружающей среды, образуют многомерный геометрический континуум W. Начало координат O этого евклидова пространства W соответствует состоянию покоя (отсутствия возбуждения) животного; имеется бесконечное множество раздражений, тогда как число коррегирующих реакций r_j, напротив, в принципе ограничено. Это означает, что после воздействия на организм раздражения s точка, отражающая состояние организма, перемещается в некую точку s пространства W, а затем возвращается в начальное положение O, но траектория соответствующего перемещения строго определена и характерна для данной коррегирующей реакции $r(s)$. Таким образом, пространство W подразделяется на «области притяжения», связанные с каждой из реакций ряда r_j; эту-то конфигурацию и называют «фигурой глобальной регуляции» данного животного.

Рассмотрим теперь яйцеклетку избранного нами вида животных: до оплодотворения обмен веществ в яйцеклетке протекает вяло и, следовательно, характеризуется неким центром притяжения υ_0 низкой размерности; однако оплодотворение приводит в действие множество био-химических циклов и освобождает значительное число степеней свободы, так что размерность центра притяжения υ_0 возрастает и он становится «многообразием» V достаточно большой размерности — это явление «безмолвной катастрофы», не оказывающей непосредственного морфогенетического действия, но приводящей к тому, что в эмбриологии называют «становлением компетенции».

Наша основная гипотеза состоит в следующем: в эктодерме ранней гаструлы состояние этого центра притяжения V еще не фиксировано и он совершает многочисленные колебания между состояниями с большей размерностью (s) и состояниями с меньшей размерностью (r). К тому же топология функционального пространства состояний s и состояний r, в которые в конечном счете вырождаются состояния s, такова, что она реализует модель фигуры глобальной регуляции данного вида, а именно соответствие $s \to r(s)$.

Полученная таким образом фигура слишком сложна, чтобы быть устойчивой; некоторые клетки при специализации утрачивают состояния s и сохраняют лишь состояния r; к их числу относятся прежде всего эктодермальные клетки (которые сохраняют лишь состояния r, связанные с пищевыми рефлексами). У мезодермальных клеток также сохраняются лишь состояния r, связанные с двигательными рефлексами и с регуляцией биохимических процессов. Другие клетки, напротив, утрачивают состояния r, сохраняя только состояния s; к ним относятся, например, нервные клетки, утратившие способность регулировать свой обмен веществ, но регистрирующие все, что с ними происходит, — качество, весьма важное для будущего органа памяти. (Разумеется, на самом деле регуляция в них происходит, но она носит катастрофический и недифференцированный характер и связана с нервным импульсом.) Развитие клеток третьего типа (эпидермальные клетки) носит характер старения; в процессе этого развития они подпадают под действие центра притяжения, расположенного посередине между s и r, и утрачивают компетенцию. Центр притяжения M мезодермы содержит группу евклидовых смещений D; некоторые клетки в результате конечного вырождения совершенно утрачивают эту группу и становятся костными клетками (остеобластами).

В других случаях происходит менее полное вырождение и центр притяжения сохраняет некоторую однопараметрическую подгруппу группы D — такие клетки превращаются в мышечные клетки (миобласты). Геометрическая характеристика этого вырождения, перенесенная на некоторый метрический «креод», описывает образование кости и мышцы из этих клеток.

Аналогичным образом происходит образование клеток органов чувств: поле s разлагается в прямое произведение полей S_v, S_a, S_t и т. д. (зрительное, слуховое, тактильное и т. д.), причем каждое из этих полей переносит его определенным образом в некоторую предпочтительную зону нервной ткани. Например, если мы возьмем зрительное поле S_r, то в нем также действует группа смещений D а конечное вырождение приводит к возникновению метрически регулируемого креода, представляющего собой глазное яблоко. Действие группы D проявляется присутствием в этом креоде мезенхимы, образующей в конечном счете сосудистую оболочку глаза и склеру, к которой затем прикрепляются три пары мышц, «символизирующие» разложение группы D на три однопараметрические подгруппы. Эта группа D оказывает также компенсаторное действие на поле стационарной активности нейронов, способствующей приближенному восстановлению поля S_v после завершения образования мозга. Это явление общего характера: регуляторное поле $s \to r$ (s) претерпевает в ходе органогенеза ряд разрушений, «катастроф», связанных с образованием отдельных органов, но в конце концов восстанавливается в форме глобальной нервной деятельности. Так, например, типичный пищевой рефлекс F можно представить себе в виде следующей цепи: 1) раздражение: вид жертвы (p); 2) моторное поле (r): схватить жертву, поднести ее ко рту и съесть; 3) висцеральное поле, управляющее моторикой пищеварительного тракта и деятельностью пищеварительных желез. Я считаю вполне вероятным существование такого поля в виде предпочтительных геометрических превращений $s \to r$ (s) обмена веществ уже в эктодерме ранней гаструлы; затем оно локализуется в основном в энтодерме, но спорадически появляется и в других тканях. Когда настает время образования рта и зубов, оно индуцируется контактом эктодермы с энтодермой и с мезодермой, берущей начало от нервного гребня; затем поле F восстанавливается путем резонанса в компетентных тканях, находящихся в контакте с энтодермой, где оно порождает образование рта и зубов. «Креод» органогенеза можно было бы сравнить со «свободной границей» физиологической «ударной волны», определяющей начало активности поля F. Эта концепция объясняет до какой-то степени образование химер лягушки с тритоном в классическом опыте Шпемана, когда пересаженная эктодерма тритона участвовала в образовании ротовых структур хозяина, используя свой собственный генетический материал: между «фигурами регуляции» различных видов животных, даже филогенетически весьма далеких, несомненно, существует некий приближенный изоморфизм, поскольку ограничения, накладываемые регуляцией, гомеостатическими механизмами животных, в общем одинаковы для всех видов и компенсируются одинаковыми функциями; возникновение специфичных для каждого вида структур определяется лишь деталями катастроф, происходящих в ходе органогенеза. Восстановление — в виде нервной деятельности, канализованной в «креоды»,— функциональных полей, разделившихся в ходе органогенеза, может показаться загадочным процессом виталистического духа. Однако я разработал абстрактную динамическую схему, которая может объяснить этот процесс, по крайней мере в теоретическом плане. Так, между такими различными органами, как мозг и половые железы, существует определенная функциональная гомология: мозг (или вообще нервная система) воссоздает исходные функциональные поля в виде устойчивой нервной деятельности; что касается половых желез, то в каждой гамете воссоздается «организующий центр» общей динамической системы данного вида, его специфическая «фигура регуляции». (В конце гаметогенеза обмен веществ блокируется, и эта глобальная фигура каким-то образом «кристаллизуется» в макромолекулярные структуры, а после оплодотворения она вновь может восстановиться в результате биохимических «вибраций» этих структур.)

Излишне указывать, что представленная здесь схема общей динамической системы организма носит гипотетический характер. Моя единственная цель заключалась в том, чтобы наметить некоторые концепции, в рамках которых можно искать объяснения этого весьма неясного и сложного вопроса.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, синтез «виталистической» и «механистической» точек зрения в биологии невозможен без коренного пересмотра наших представлений о неживой природе. В биологии (и особенно в молекулярной биологии!) весьма свободно пользуются такими терминами, заимствованными из человеческой практики, как «информация», «код», «сообщение», «программа»... В чистой физике или химии использование этих терминов рассматривалось бы как крайнее проявление антропоморфизма. Согласно нашей модели, морфогенез обусловлен конфликтом, борьбой между двумя или несколькими «центрами притяжения» — ее, таким образом, можно представить как своего рода возврат к идеям первых материалистов Анаксимандра и Гераклита, имеющим 25-вековую давность. Взгляды этих философов расценивали как примитивное смешение понятий, поскольку они использовали термины социологического происхождения, например конфликт, несправедливость, для объяснения явлений физического мира. Такая оценка, на наш взгляд, совершенно несправедлива, ибо их интуиция была в сущности верна: динамические состояния, управляющие эволюцией явлений природы, по существу не отличаются от тех, которые управляют эволюцией человека, так что использование антропоморфных терминов в физике вполне оправданно. В той мере, в какой, говоря о «борьбе», мы имеем в виду определенное геометрическое состояние динамической системы, вряд ли можно возражать против использования этого термина для быстрого качественного описания данной динамической ситуации. В случае геометрической интерпретации таких терминов, как «информация», «сообщение», «план» (к чему стремится наша модель), отпадут также возражения и против этих терминов. Современная биология превратила естественный отбор в некий исключительный принцип — deus ex machina — всех биологических явлений; единственная ее ошибка состоит в том, что она при этом рассматривает организм (или вид) как некий несводимый функциональный элемент. На самом же деле устойчивость организма или вида сама зиждется на конкуренции между «полями», между еще более простыми «архетипами», борьба которых порождает структурно устойчивую геометрическую конфигурацию, обеспечивающую регуляцию, гомеостаз обмена веществ и устойчивость размножения. Именно анализируя эти подчиненные, более глубоко скрытые структуры, мы сможем лучше понять механизмы, определяющие морфогенез организма и эволюцию вида. «Борьба» происходит не только между организмами или видами, но также в каждый момент в любой точке отдельного организма. Вспомним слова Гераклита: «Следует знать, что борьба идет повсюду, что справедливость есть борьба и что все вещи порождаются борьбой и необходимостью».

Информация и правила для авторов

Общие положения

Журнал «Наноструктуры. Математическая физика и моделирование» (сокращенно: НМФМ) публикуется с 2009 года и является периодическим научным изданием. Электронная версия журнала размещается на сайте http://www.nano-journal.ru. Основная цель издания: представление новых теоретических и вычислительных методов моделирования наноструктур и мягкой материи, общих подходов в исследовании мезосистем, а также ключевых экспериментальных результатов в данной области и связанных с этим проблем математической физики.

Журнал НМФМ имеет междисциплинарный характер и в силу этого несет определенную образовательную направленность, а не только узко научную. Работы, представляемые в журнал, должны содержать вводные сведения, которые обеспечат понимание постановок задач и восприятие результатов не только прямыми специалистами. Определения понятий, объяснение обозначений и терминов, оценки характерных параметров, теоретические предпосылки и идеи, используемые методы, и т.п., должны быть кратко объяснены в тексте статьи, имея в виду читателей, специализирующихся в иных направлениях. Должны быть описаны базовые математические модели и уравнения. Во Введении и в последующих разделах очерчивается стратегия и основные трудности, это увязывается с используемыми моделями. Структура статьи ориентируется на прояснение общей логики и методики исследования, содержит резюмирующие выводы. В тексте должны быть рассмотрены характерные примеры (хотя бы, методические), ясно иллюстрирующие предлагаемые алгоритмы.

Журнал публикует научные обзоры, исследовательские статьи и краткие научные сообщения, а также избранные аналитические и информационно-образовательные материалы, тексты докладов и циклов лекций, прочитанных в университетах, научных центрах, на школах-семинарах, конференциях, нигде ранее не публиковавшиеся и не принятые к публикации в других изданиях. Язык публикации в журнале НМФМ, как правило, русский. Работы, представляемые в журнал, не могут иметь научно-популярный или компилятивный характер. Все статьи рецензируются и могут быть отклонены редколлегией журнала. В случае принятия работы к печати ее авторы передают издателю журнала НМФМ право на разовую безвозмездную публикацию текста и его размещение в электронной версии на сайте журнала. Перевод опубликованных в журнале статей на другие языки может осуществляться только с разрешения и при участии авторов.

Порядок представления статей

- В редакцию изначально представляются:
  - файл статьи, файлы с иллюстрациями;
  - сопроводительное письмо, можно в электронной форме, содержащее сведения об объеме статьи и обо всех авторах (фамилии, имена, отчества, полные названия мест работы, почтовый адрес с индексом, номер контактного телефона с кодом города, электронный адрес автора, ответственного за переписку с редакцией); предпочтительно, чтобы это письмо было выполнено на бланке учреждения, в котором работает кто-то из авторов, было заверенное печатью и содержало утверждение о возможности открытого опубликования статьи;
  - файл с переводом на английский язык названия статьи, фамилий и инициалов авторов, аннотации, ключевых слов.
- Авторские файлы могут быть присланы на электронный адрес: papers@nano-journal.ru; (резервный адрес в случаях затруднений с пересылкой: nano@miem.edu.ru) или переданы в редакцию на любом электронном носителе. Авторы получают из редакции подтверждение о получении их материалов.
- Телефон (факс) редакции: +7 (495) 916-8876. Адрес редакции: Москва 109028, Б. Трехсвятительский пер., 3/12, Московский институт электроники и математики (МИЭМ), комн. 449.

Общие требования к представляемым файлам

- Допускается использование текстовых редакторов WORD и LATEX.
  К рабочим файлам должна быть приложена их pdf-копия. В названии файлов используется латинский алфавит, пробелы заменяются знаком _. Шапка статьи содержит название, инициалы и фамилии авторов, место работы, электронный адрес, краткую аннотацию, ключевые слова. В аннотации не следует использовать формулы и ссылки на текст работы или список литературы; в конце она должна содержать индекс УДК (к английской версии аннотации можно добавить индексы зарубежных рубрикаторов).
- Объем кратких сообщений 4-8 страниц, исследовательских статей, как правило, до 20 страниц, а обзоров – более 20 страниц. Верхняя граница согласуется с редколлегией. При подсчете объема нужно ориентироваться на страницы формата А4, шрифт 12, знаков в строке 80, интервалов между строками 1.
- Авторы не должны злоупотреблять сокращениями, составленными из заглавных начальных букв терминов. Предпочтительней каждый раз использовать полное наименование объекта. Возможно использование только устоявшихся аббревиатур.

Требования к файлам Word

- Рекомендуемый шрифт – Times New Roman.
- Строки в пределах абзаца не должны разделяться символом возврата каретки (Enter).
- Нельзя использовать автоматическое создание сносок, автоматический перенос или автоматический запрет переносов, создание списков, автоматический отступ и т.п.
- Ссылки на список литературы даются цифрами в квадратных скобках: [1], [5,6,7], [1-9].
- Все без исключения формулы и обозначения размерности, даже состоящие из одной латинской буквы, и в тексте и вынесенные в отдельную строку, всегда набираются в формульном редакторе и никогда – в обычном текстовом редакторе.

- При создании таблицы рекомендуется использовать возможности Word или MS Excel. Таблицы, набранные вручную (с помощью большого числа пробелов), не принимаются.

Требования к иллюстрациям

- Иллюстрации представляются в отдельных файлах, черно-белыми. Они должны иметь разрешение не менее 600 dpi.
- Форматы файлов – TIFF, EPS, PSD, JPEG.

Требования к списку литературы

- Ф.И.О. авторов или редактров выделяются курсивом.
- Для статей приводится название. Названия отделяются от выходных данных знаком //. Расположение выходных данных указано на образце ниже. Номер тома выделяется жирным шрифтом, номер выпуска дается в скобках. Указываются номера первой и последней страниц статьи, либо уникальный номер статьи и ее объем. Для книг желательно указывать их объем. Если известна ссылка на электронный архив или сайт, то ее желательно указать.

Фамилия И.О. Название статьи // Назв. журн., 2000, **1** (1), 1-6.

Family F.M. and Family F. Title of the paper // Name of the Jornal, 2006, **73**, 165313, 9 pp.

Фамилия И.О., Фамилия И.О. Название книги // Наука, С.-П., 1999, 176 стр.

Family F.M. Title of the paper // In book: Family F.M. (et al. eds), Title of the collection, Publisher, Boston, 2005, 9-24.

Family F.M. (ed.), Title of the collection // Publisher, N.Y., 2005, 324 pp.

Фамилия И.О. Название доклада // Доклад на конференции «Название конференции (место и дата проведения)»; ссылка на электронный ресурс.

Наноструктуры. Математическая физика и моделирование

Журнал зарегистрирован
в Министерстве РФ по делам печати,
телерадиовещания и средств массовых коммуникаций.
Свидетельство о регистрации
ПИ № ФС77-34934 от 29 декабря 2008 г.

Учредители
Московский институт электроники и математики (МИЭМ),
Европейский центр по качеству

Издатель
ООО Сенсор Микрон
Журнал входит в перечень ВАК РФ
Статьи рецензируются

Контакты для представления статей и деловой переписки
Ответственный секретарь Махиборода А.В.
+7 (916) 578-95-27
makhiboroda@yandex.ru
